等エネルギー面の曲率半径

2022.5.10　　鈴木　実

1　はじめに

「固体物性と電気伝導」[1] の 158 頁脚注に記載した等エネルギー面の曲率半径を導出する．

2　曲率半径

3 次元空間におけるなめらかな曲線において，十分近い 2 点を取り上げた場合，それぞれの点における法線は，接触平面上にあり，1 点で交わる．そのとき，曲線上の 2 点は十分近いので，この交点と 2 点とのそれぞれの距離は等しいとみなしてよい．これから，2 つの法線と曲線で切り取られた部分は一つの円の扇形の部分に相当する．したがって，法線の交点は，2 点間の曲線を円弧とみなしたとき，その円の中心である．曲線状の点とこの円の中心の間の距離を，この点における曲率半径といい，円の中心を曲率半径の中心，曲率半径の逆数を曲率という．

図 1 に示すように，曲線上の 2 点を P と Q とし，円弧の弧長を Δs，曲率半径を ρ，2 つの法線の間の角度（ラジアン）を $\Delta\theta$ とすると，

$$\Delta s = \rho\Delta\theta \tag{1}$$

という関係が成り立つ．s は曲線の距離である．微分で表すと，

$$\rho = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta} \tag{2}$$

とすることができる．曲率 κ は，曲率半径 ρ を用いて，

$$\kappa = \frac{1}{\rho} \tag{3}$$

と定義される．

以上からわかるように，曲率半径を求めるには，曲線上の 2 点間の弧長および各点の法線で作られる扇形の中心角を計算すればよい．2 つの法線のなす角は，それぞれの点における接線のなす角にも等しいから（図 1），二つの接線のなす角度でもよい．実際に計算される法線あるいは接線は，2 次元空間では傾きであり，3 次元空間ではベクトルであって，前者では傾きから中心角を計算することができ，後者の場合は，ベクトルのスカラー積あるいはベクトル積を用いて計算することができる．この 2 つのベクトルで作られる扇形は，実際の空間における曲率半径を含む扇形とは相似の関係にあるので，弧長と半径の比例関係から曲率半径を求めることもできる．

式 (1)〜(3) で出てくる Δs や $\Delta\theta$ は，接線ベクトルや法線ベクトルを用いて計算することができる．ベクトルあるいは傾きは，座標あるいは媒介するパラメータを用いて表されるが，もっとも基本的な表現は，曲線の長さ s をパラメータとして用いた場合である．二つの十分近接した点の間の距離 $|\Delta\mathbf{r}|$ は，1 次の微小量までとると，$\mathbf{r}(s+\Delta) \simeq \mathbf{r}(s) + \mathbf{r}'(s)\Delta s$ であるから，

$$|\Delta\mathbf{r}| = |\mathbf{r}(s+\Delta) - \mathbf{r}(s)| \simeq |\mathbf{r}'(s)|\Delta s \tag{4}$$

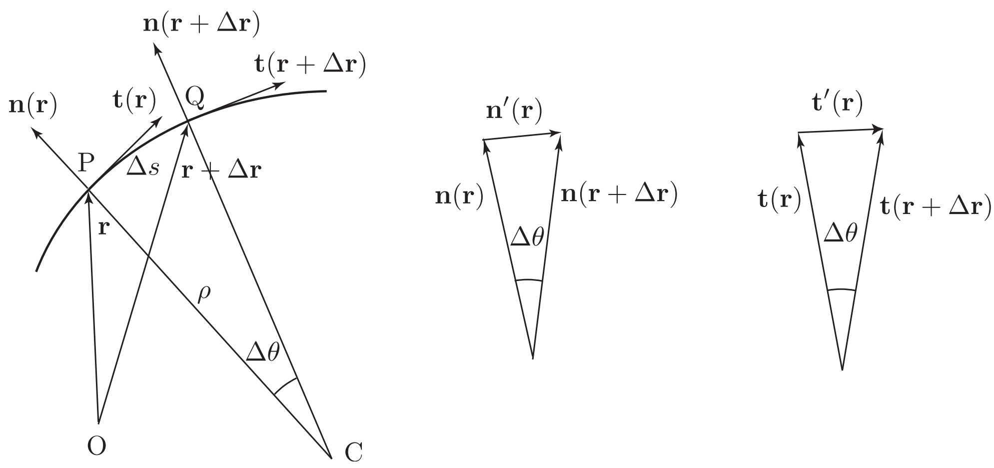

図 1: 曲率半径を決める扇形の相似形

一方，接線のベクトルは $\mathbf{r}'(s)$ および $\mathbf{r}'(s+\Delta s)$ であり，その間の角度 $\Delta\theta$ は，次の二つの接線ベクトルの外積に関する式から求められる．すなわち，1 次の微小量までとって，

$$\begin{aligned} |\mathbf{r}'(s)\times\mathbf{r}'(s+\Delta)| &= |\mathbf{r}'(s)|\,|\mathbf{r}'(s+\Delta)|\sin\Delta\theta \simeq |\mathbf{r}'(s)|\,|\mathbf{r}'(s+\Delta)|\Delta\theta \\ \mathbf{r}'(s)\times\mathbf{r}'(s+\Delta) &\simeq \mathbf{r}'(s)\times\{\mathbf{r}'(s)+\mathbf{r}''(s)\Delta s\} = \mathbf{r}'(s)\times\mathbf{r}''(s)\Delta s \end{aligned} \tag{5}$$

となり，これから，

$$\begin{aligned} \Delta\theta &= \frac{|\mathbf{r}'(s)\times\mathbf{r}''(s)|}{|\mathbf{r}'(s)|\,|\mathbf{r}'(s+\Delta)|}\Delta s \\ &\simeq \frac{|\mathbf{r}'(s)\times\mathbf{r}''(s)|}{|\mathbf{r}'(s)|^2}\Delta s \end{aligned} \tag{6}$$

が得られる．接線 $\mathbf{r}'(s)$ と法線 $\mathbf{r}''(s)$ は垂直であるから，$|\mathbf{r}'(s)\times\mathbf{r}''(s)| = |\mathbf{r}'(s)|\,|\mathbf{r}''(s)|$ となり，今の場合，$|\mathbf{r}'(s)| = |\,\mathrm{d}\mathbf{r}/\,\mathrm{d}s| = 1$ であることを考慮すると，結局，

$$\rho = \frac{\Delta s}{\Delta\theta} = \frac{|\mathbf{r}'(s)|^2}{|\mathbf{r}'(s)\times\mathbf{r}''(s)|} = \frac{|\mathbf{r}'(s)|}{|\mathbf{r}''(s)|} = \frac{1}{|\mathbf{r}''(s)|} \tag{7}$$

という関係式が得られる．

曲率と曲率半径は，図 1 に示す微小な中心角を三角形を扇形とみなすと，二つの扇形における相似関係から得られる．式 (7) の導出も，二つの扇形で角度が等しいことを用いている．同じ相似関係により，弧長と半径の比が等しいことから曲率半径を求めることができる．実際の曲率半径を含む平面では，弧長が Δs，扇形の半径が ρ である．もう一つの，接線を半径とする扇形では，半径が $\mathbf{r}'(s)$ または $\mathbf{r}'(s+\Delta s)$ で，両者は微小極限において等しい．弧長は，式 (5) の展開からわかるように，$|\mathbf{r}''(s)|\Delta s$ である．したがって，比例関係から，

$$\frac{\mathbf{r}'(s)\Delta s}{\rho} = \frac{|\mathbf{r}''(s)|\Delta s}{\mathbf{r}'(s)} \tag{8}$$

となる．これから，式 (7) と同じ次の関係式が得られる．

$$\rho = \frac{|\mathbf{r}'(s)|^2}{|\mathbf{r}''(s)|} = \frac{1}{|\mathbf{r}''(s)|} \tag{9}$$

曲率半径を求めるときには，最初に角度 $\Delta\theta$ を求めるか，あるいは比例関係から計算するか，二つの方法があるが，計算の簡単な方を選べばよく，両者とも同じ結果が得られる．この後で導く，種々の場合の曲率半径の表式は，一つの傾向は見られるものの，式の形はそれぞれに異なる．この差異は，微分における，弧長 s と

座標を決めるパラメータ t の関数関係に由来する．実際，どの曲率半径でも式 (8) から導出することが可能である．具体的な例は，一部脚注に示した．

以下では，平面上の曲線と 3 次元空間における曲線の曲率半径と，最後に，等エネルギー面における曲率半径を導く．

3 x-y 平面上の曲線の曲率半径

3.1 曲線が $y = f(x)$ で与えられる場合

曲線 $y = f(x)$ 上の十分に近い 2 点 (x, y) と $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ における接線の傾きを，それぞれ，$\tan\theta$ および $\tan(\theta + \Delta\theta)$ とすると，

$$\tan\theta = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = f' \tag{10}$$

$$\tan(\theta + \Delta\theta) = \frac{\mathrm{d}f(x + \Delta x)}{\mathrm{d}x} \simeq \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2}\Delta x = f' + f''\Delta x \tag{11}$$

である．ここで，

$$\begin{aligned}
\tan(\theta + \Delta\theta) - \tan\theta &= \frac{\tan\theta + \tan\Delta\theta}{1 - \tan\theta\tan\Delta\theta} - \tan\theta \\
&= \frac{\sin\theta\cos\Delta\theta + \cos\theta\sin\Delta\theta}{\cos\theta\cos\Delta\theta - \sin\theta\sin\Delta\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \\
&= \frac{\sin\theta\cos\theta\cos\Delta\theta + \sin\Delta\theta\cos^2\theta - \cos\theta\sin\theta\cos\Delta\theta + \sin^2\theta\sin\Delta\theta}{\cos^2\theta\cos\Delta\theta - \cos\theta\sin\Delta\theta\sin\theta} \\
&= \frac{\sin\Delta\theta}{\cos^2\theta\cos\Delta\theta - \cos\theta\sin\Delta\theta\sin\theta} \\
&\simeq \frac{\Delta\theta}{\cos^2\theta} = \Delta\theta(\tan^2\theta + 1)
\end{aligned} \tag{12}$$

となる．ただし，最後の式への変形で，分子は 1 次の微小量に比例するから，分母の 1 次の微小量を無視して $\cos\Delta\theta \simeq 1$，$\sin\Delta\theta \simeq 0$ とした．したがって，式 (10)〜(12) より，

$$\Delta\theta = \frac{\tan(\theta + \Delta\theta) - \tan\theta}{\tan^2\theta + 1} = \frac{f''}{1 + f'^2}\Delta x \tag{13}$$

となる．一方，弧長 Δs は

$$\Delta s \simeq \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\Delta x \simeq \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\Delta x = \sqrt{1 + f'^2}\Delta x \tag{14}$$

となる．したがって，

$$\frac{\Delta s}{\Delta\theta} = \frac{(1 + f'^2)^{3/2}}{f''} \tag{15}$$

となる．これから，$\Delta x \to 0$ の極限として，

$$\rho = \left|\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}\right| = \lim_{\Delta x \to 0}\left|\frac{\Delta s}{\Delta\theta}\right| = \frac{(1 + f'^2)^{3/2}}{|f''|} \tag{16}$$

が得られる．

式 (4) を微分しても同じ結果が得られるが，このほうが計算の意味がよくわかり，より複雑な計算の場合に，計算の指針を容易に把握できるという利点がある．

3.2　曲線がパラメータ t で与えられる場合

この場合の曲線の式は t をパラメータとして，点 P の座標を $x = x(t)$，$y = y(t)$ とする．点 Q の座標は，$t + \Delta t$ で与えられ，Δt を微小量として，

$$
\begin{aligned}
x(t+\Delta t) &\simeq x(t) + \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\Delta t = x(t) + x'(t)\Delta t = x + x'\Delta t \\
y(t+\Delta t) &\simeq y(t) + \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\Delta t = y(t) + y'(t)\Delta t = y + y'\Delta t
\end{aligned}
$$

である．簡単のため，引数が t の場合は，最後の等号の後の式のように，引数を省略する．そうすると，弧長 Δs は，2 点間の距離が十分小さいときには，2 点間の距離とみなしてもよいので，(Δt) の 1 次の項までとると，

$$
\Delta s \simeq \sqrt{[x(t+\Delta t) - x(t)]^2 + [y(t+\Delta t) - y(t)]^2} = \sqrt{x'^2 + y'^2}\,\Delta t \tag{17}
$$

となる．点 P および点 Q の接線の傾きを，それぞれ，$\tan\theta$ および $\tan(\theta + \Delta\theta)$ とすると，$(\Delta t)^2$ 以上の項を無視して，それぞれ，

$$
\tan\theta = \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{x(t+\Delta t) - x(t)} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{y'}{x'} \tag{18}
$$

$$
\tan(\theta + \Delta\theta) = \frac{y'(t+\Delta t)}{x'(t+\Delta t)} = \frac{y' + y''\Delta t}{x' + x''\Delta t} \tag{19}
$$

となる．ここで，$x'(t+\Delta t) \simeq x'(t) + x''(t)\Delta t$，および $y'(t+\Delta t) \simeq y'(t) + y''(t)\Delta t$ の関係を使った．これから，Δt の 1 次の項までとると，

$$
\begin{aligned}
\tan(\theta + \Delta\theta) - \tan\theta &= \frac{(x' + x''\Delta t)y' - x'(y' + y''\Delta t)}{x'(x' + x''\Delta t)} \\
&= \frac{x''y' - x'y''}{x'^2 + x'x''\Delta t}\Delta t \\
&\simeq \frac{x''y' - x'y''}{x'^2}\Delta t
\end{aligned} \tag{20}
$$

となる．一方，前節で導いた次の式は，一般に成り立つ．

$$
\tan(\theta + \Delta\theta) - \tan\theta = (\tan^2\theta + 1)\,\Delta\theta \tag{21}
$$

したがって，

$$
\begin{aligned}
\Delta\theta &= \frac{\tan(\theta + \Delta\theta) - \tan\theta}{\tan^2\theta + 1} = \frac{1}{\tan^2\theta + 1}\frac{x''y' - x'y''}{x'^2}\Delta t = \frac{1}{(y'/x')^2 + 1}\frac{x''y' - x'y''}{x'^2}\Delta t \\
&= \frac{x''y' - x'y''}{x'^2 + y'^2}\Delta t
\end{aligned} \tag{22}
$$

となる．結局，

$$
\frac{\Delta s}{\Delta\theta} = \frac{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}{x''y' - x'y''} \tag{23}
$$

となり，これから，$\Delta t \to 0$ の極限として，

$$
\rho = \left|\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}\right| = \lim_{\Delta t \to 0}\left|\frac{\Delta s}{\Delta\theta}\right| = \frac{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}{|x''y' - x'y''|} \tag{24}
$$

が得られる[1]．

[1] これは式 (16) と整合している．実際，x をパラメータ t とみなすと，$x' = 1$，$x'' = 0$，$y' = f'$，$y'' = f''$ であるから，これを式 (24) に代入すると，式 (16) が得られる．

3.3 曲線が $F(x,y)=0$ で表される場合

以下では,

$$\frac{\partial F}{\partial x}=F_x,\quad \frac{\partial F}{\partial y}=F_y, \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=F_{xx},\quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=F_{yy},\quad \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=F_{xy}$$

のように書くことにする.

曲線 $F(x,y)=0$ 上の十分近い 2 点を $\mathrm{P}(x,y)$，$\mathrm{Q}(x+\Delta x, y+\Delta y)$ とする．それぞれの点における法線ベクトルは,

$$(F_x(x,y), F_y(x,y)) \equiv (F_x, F_y) \tag{25}$$

$$(F_x(x+\Delta x, y+\Delta y), F_y(x+\Delta x, y+\Delta y)) \equiv (F_x^+, F_y^+) \tag{26}$$

である．ここで，簡単のため，引数が $(x+\Delta x, y+\Delta y)$ の場合に上付きの添字「$^+$」で示した．この 2 つの法線ベクトルの内積をとれば，法線ベクトルの間の角度を $\Delta\theta$ とすると，$\cos\Delta\theta$ が現れるが，その場合最低次の項が $\Delta\theta^2$ の項になるため，計算が煩瑣になる．そこで，二つの法線ベクトルのうちの一つのかわりに，点 A における接線のベクトルを考えることにする．そうすれば，内積には $\cos(\pi/2-\Delta\theta)=\sin\Delta\theta$ が現れて最低次の項は $\Delta\theta$ の 1 次の項になるため，2 次以上の項を微小量として無視することができる．このような点 A における接線ベクトルとして，式 (25) と直交し，大きさが同じ,

$$(F_y(x,y), -F_x(x,y)) \equiv (F_y, -F_x) \tag{27}$$

を取り上げる．そうすると，式 (26) と式 (27) の内積は

$$\sqrt{F_x^2+F_y^2}\sqrt{F_x^{+2}+F_y^{+2}}\sin\Delta\theta = F_yF_x^+ - F_xF_y^+ \tag{28}$$

である．ここで右辺は，$F_x(x+\Delta x, y+\Delta y)=F_x^+ \simeq F_x + F_{xx}\Delta x + F_{xy}\Delta y$，$F_y(x+\Delta x, y+\Delta y)=F_y^+ \simeq F_y + F_{yx}\Delta x + F_{yy}\Delta y$，および，$F(x,y)=0$ を微分して得られる $F_x\Delta x + F_y\Delta y = 0$ より,

$$\begin{aligned} F_yF_x^+ - F_xF_y^+ &= F_y(F_x + F_{xx}\Delta x + F_{xy}\Delta y) - F_x(F_y + F_{yx}\Delta x + F_{yy}\Delta y) \\ &= F_yF_{xx}\Delta x + F_yF_{xy}\Delta y - F_xF_{yx}\Delta x - F_xF_{yy}\Delta y \\ &= \left(F_yF_{xx} - F_xF_{xy} - F_xF_{yx} + \frac{F_x}{F_y}F_xF_{yy}\right)\Delta x \end{aligned} \tag{29}$$

となる．$\sin\Delta\theta \simeq \Delta\theta$ とすると，式 (28) 左辺は $\Delta\theta$ の 1 次の微小量を係数にもつので，同じ左辺の $\sqrt{F_x^{+2}+F_y^{+2}}$ に含まれる Δx などは 2 次の微小量となり，省略してもよい．したがって，式 (28)，(29) から,

$$\Delta\theta = \frac{F_yF_{xx} - F_xF_{xy} - F_xF_{yx} + \dfrac{F_x}{F_y}F_xF_{yy}}{F_x^2+F_y^2}\Delta x \tag{30}$$

となる.

一方，円弧 Δs に関しては，$F_x\Delta x + F_y\Delta y = 0$ を用いて,

$$\Delta s \simeq \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\Delta x = \sqrt{1+\left(\frac{-F_x}{F_y}\right)^2}\Delta x = \sqrt{F_x^2+F_y^2}\frac{\Delta x}{|F_y|} \tag{31}$$

となる．これから,

$$\begin{aligned} \frac{\Delta s}{\Delta\theta} &= \frac{(F_x^2+F_y^2)^{3/2}}{F_y^2F_{xx} - F_xF_yF_{xy} - F_xF_yF_{yx} + F_x^2F_{yy}} \\ &= \frac{(F_x^2+F_y^2)^{3/2}}{F_y(F_yF_{xx} - F_xF_{xy}) + F_x(F_xF_{yy} - F_yF_{yx})} \end{aligned} \tag{32}$$

となる．結局，

$$\rho = \left|\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}\right| = \lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\Delta s}{\Delta\theta}\right| = \frac{(F_x^2+F_y^2)^{3/2}}{|F_y(F_yF_{xx}-F_xF_{xy})+F_x(F_xF_{yy}-F_yF_{yx})|} \tag{33}$$

が得られる．

4　3次元空間における曲線の曲率半径

4.1　曲線がパラメータ t で与えられる場合

曲線上の十分に近い 2 点の座標を $\mathrm{P}(x(t),y(t),z(t))$，$\mathrm{Q}(x(t+\Delta t),y(t+\Delta t),z(t+\Delta t))$ とする．点 P および点 Q における接線ベクトル $\mathbf{t}$ と $\mathbf{t}(t+\Delta t)$ は，

$$\mathbf{t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathbf{r}(t+\Delta t)-\mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}(t)}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} \dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} \\ \dfrac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} \\ \dfrac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \mathbf{r}'(t) \tag{34}$$

$$\mathbf{t}(t+\Delta t) = \mathbf{r}'(t+\Delta t) = \begin{pmatrix} x'(t+\Delta t) \\ y'(t+\Delta t) \\ z'(t+\Delta t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'(t)+x''(t)\Delta t \\ y'(t)+y''(t)\Delta t \\ z'(t)+z''(t)\Delta t \end{pmatrix} = \mathbf{r}'(t)+\mathbf{r}''(t)\Delta t \tag{35}$$

$\mathbf{t}(t)$ と $\mathbf{t}(t+\Delta t)$ の間の角度 $\Delta\theta$ は，この二つのベクトルの外積を作ることにより求めることができる．(内積の場合でも可能であるが，計算が複雑になるので，付録に示す.）すなわち，

$$|\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}'(t+\Delta t)| = |\mathbf{r}'(t)|\,|\mathbf{r}'(t+\Delta t)|\sin\Delta\theta \tag{36}$$

左辺は，式 (35) より，$|\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)|\Delta t$ となり，2 点が十分近いときに $\Delta\theta$ に比例する．一方，右辺で，$|\mathbf{r}'(t+\Delta t)|$ は $\Delta\theta$ のべきで展開されるが，右辺全体で 2 次以上の項を無視できるので，$|\mathbf{r}'|$ とみなすことができる．つまり，式 (36) は

$$|\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)|\Delta t = |\mathbf{r}'(t)|^2\sin\Delta\theta \tag{37}$$

となる．2 点が十分近いときには $\sin\Delta\theta\simeq\Delta\theta$ であるから，式 (37) から，

$$\Delta\theta = \frac{|\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^2}\Delta t \tag{38}$$

となる．一方，弧長 Δs に関しては，

$$\Delta s = |\mathbf{r}(t+\Delta t)-\mathbf{r}(t)| = |\mathbf{r}(t)+\mathbf{r}'(t)\Delta t-\mathbf{r}(t)| = |\mathbf{r}'(t)|\Delta t \tag{39}$$

であるから，

$$\frac{\Delta s}{\Delta\theta} = \frac{|\mathbf{r}'(t)|^3}{|\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)|} \tag{40}$$

となる．結局，

$$\rho = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\Delta s}{\Delta\theta} = \frac{|\mathbf{r}'(t)|^3}{|\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)|} \tag{41}$$

が得られる．

ところで，空間の曲線上の 1 点 $\mathbf{r}(t)$ において，$\mathbf{r}'(t)$ は接線ベクトル，$\mathbf{r}''(t)$ は法線ベクトルを表すことが明白な場合，つまり，微分幾何の範囲内においては，$\mathbf{r}'(t)$ と $\mathbf{r}''(t)$ は直交する．そのとき，明らかに，$|\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)| = |\mathbf{r}'(t)|\,|\mathbf{r}''(t)|$ となる．すなわち，式 (41) はさらに簡略化できて，

$$\rho = \frac{|\mathbf{r}'(t)|^2}{|\mathbf{r}''(t)|} \tag{42}$$

となる[2]．式 (42) の導出は，曲線の長さ s をパラメータとする式 (7) の導出と同様な過程であるが，式 (41), (42) を式 (7) から直接導くこともできる[3].

4.2 $F(x, y, z) = 0$ で与えられる曲面の曲率　法線を含む面内の場合

曲面上の 1 点における曲率は，その点を含む平面が曲面と交わるところの曲線で決定される．一般に，曲面の曲率とは，曲面を切る平面がその点における法線を含む場合である．その平面が，法線を含まない場合にも曲率を定義できるが，その計算は次節で述べる．

---

[2] 実際，これが成り立つことは次のようにしてわかる．式 (41) の分母は

$$\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t) = \begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}\mathbf{e}_x + \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}\mathbf{e}_y + \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}\mathbf{e}_z$$

であるから，

$$\begin{aligned}|\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)|^2 &= (y'z''-z'y'')^2+(z'x''-x'z'')^2+(x'y''-y'x'')^2 \\ &= z''^2(y'^2+x'^2)+y''^2(z'^2+x'^2)+x''^2(z'^2+y'^2)-2y'z'y''z''-2z'x'z''x''-2x'y'x''y'' \\ &= (x'^2+y'^2+z'^2)(x''^2+y''^2+z''^2)-(x'x''+y'y''+z'z'')^2\end{aligned}$$

となる．最後の式第 2 項は $\mathbf{r}'\cdot\mathbf{r}''$ で，今の場合，接線ベクトルと法線ベクトルの内積であるから，直交して 0 になる．第 1 項は $|\mathbf{r}'|^2|\mathbf{r}''|^2$ であるから，結局，$\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)|^2 = |\mathbf{r}'|^2|\mathbf{r}''|^2$ となり，式 (41) は式 (42) に等しい．

[3] 式 (7) の $\mathrm{d}^2\mathbf{r}/\mathrm{d}s^2$ を t の関数として直接計算しよう．まず，$\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2} = |\Delta\mathbf{r}|$ より，

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2} = \left|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\right|, \quad \frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2} = \frac{1}{\sqrt{(\mathrm{d}\mathbf{r}/\mathrm{d}t)^2}}\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2} = \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2}\right)\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^{-1} \tag{*}$$

である．次に，

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^{-1}$$

である．さらに，

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}s^2} = \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2}\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right)^2 - \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^{-2}\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}$$

である．これに式 (*) を代入して，

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}s^2} = \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^{-2} - \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^{-4}\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2}\right) = \left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^{-4}\left[\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2 - \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2}\right)\right]$$

したがって，

$$\begin{aligned}\left(\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}s^2}\right)^2 &= \left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^{-8}\left[\left(\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2}\right)^2\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\right)^4 - 2\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2}\right)^2\right] \\ &= \left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^{-6}\left[\left(\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}s^2}\right)^2\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2}\right)^2\right]\end{aligned}$$

となる．右辺の [　] は，脚注 2 から，$|\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)|^2$ に等しいことがわかる．また，$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\perp\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2}$ であるから，右辺第 2 項は消えて，

$$\left|\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}s^2}\right| = \left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^{-2}\left|\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2}\right| = \left|\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2}\right| \Big/ \left|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\right|^2$$

となり，式 (7) と比較すれば，式 (42) と等しいことがわかる．

曲面 $F(x,y,z)=0$ 上の点 P における法線を含む平面がこの曲面交わるところの曲線において，曲線上のもう一つの点 Q をとり，二つの点 P と点 Q は十分近いとする．点 P と点 Q の曲線上の距離を Δs，点 P から点 Q へのベクトルを $\Delta\mathbf{r}$ とする．点 P と点 Q を表すベクトル $\mathbf{r}$ と $\mathbf{r}+\Delta r$ は平面内にとる．点 P と点 Q の法線ベクトル，および接線ベクトルはすべてこの平面内にある．点 $\mathrm{P}(x,y,z)$ における法線ベクトル $\mathbf{n}(x,y,z)$ は，$F(x,y,z)$ の勾配で与えられるから，

$$\mathbf{n}(\mathbf{r})=\frac{\partial F}{\partial \mathbf{r}}=\left(\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z),\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z),\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)\right)=(F_x,F_y,F_z) \tag{43}$$

となる．点 P における曲線への単位接線ベクトルを $\mathbf{t}$ とする．点 Q が点 P に十分近いときに

$$\Delta\mathbf{r}\simeq\mathbf{t}\Delta s \tag{44}$$

とすることができる．そのとき，点 Q における法線ベクトル $\mathbf{n}(\mathbf{r}+\Delta\mathbf{r})$ は，

$$\begin{aligned}
\mathbf{n}(\mathbf{r}+\Delta\mathbf{r}) &= (F_x(\mathbf{r}+\Delta\mathbf{r}),F_y(F_x(\mathbf{r}+\Delta\mathbf{r}),F_z(F_x(\mathbf{r}+\Delta\mathbf{r}))\\
&=\frac{\partial F}{\partial \mathbf{r}}+\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}F_x(\mathbf{r})\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}F_x(\mathbf{r})\Delta y+\frac{\partial}{\partial z}F_x(\mathbf{r})\Delta z\\ \frac{\partial}{\partial y}F_y(\mathbf{r})\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}F_y(\mathbf{r})\Delta y+\frac{\partial}{\partial z}F_y(\mathbf{r})\Delta z\\ \frac{\partial}{\partial z}F_z(\mathbf{r})\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}F_z(\mathbf{r})\Delta y+\frac{\partial}{\partial z}F_z(\mathbf{r})\Delta z\end{pmatrix}\\
&=\mathbf{n}(\mathbf{r})+{}^{\mathrm{t}}\!\left[\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial x}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}F_x & F_y & F_z\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\\ \Delta z\end{pmatrix}\\
&=\mathbf{n}(\mathbf{r})+{}^{\mathrm{t}}\!\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\circ\frac{\partial F}{\partial \mathbf{r}}\right)\Delta\mathbf{r}\\
&=\mathbf{n}(\mathbf{r})+{}^{\mathrm{t}}\!\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\circ\frac{\partial F}{\partial \mathbf{r}}\right)\mathbf{t}\,\Delta s
\end{aligned} \tag{45}$$

となる．ここで，$\circ$ は dyad である．そうすると，P と Q における法線ベクトルの差 $\Delta\mathbf{n}$ は，

$$\Delta\mathbf{n}=\mathbf{n}(\mathbf{r}+\Delta\mathbf{r})-\mathbf{n}(\mathbf{r})={}^{\mathrm{t}}\!\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\circ\frac{\partial F}{\partial \mathbf{r}}\right)\mathbf{t}\,\Delta s \tag{46}$$

となる．

2 つの法線ベクトル $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ および $\mathbf{n}(\mathbf{r}+\Delta\mathbf{r})$ と，$\Delta\mathbf{n}$ がつくる擬扇形と曲線上の 2 点 P および Q における法線の交点，および P と Q でできる扇形は，P と Q が十分ちかいときに，相似とみなしてよい．このとき，法線の交点と点 P の距離は曲率半径 ρ であるから，次式が成り立つ．

$$\frac{\Delta s}{\rho}=\frac{\left|{}^{\mathrm{t}}\!\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\circ\frac{\partial F}{\partial \mathbf{r}}\right)\mathbf{t}\right|\Delta s}{|\mathbf{n}(\mathbf{r})|}=\frac{\left|{}^{\mathrm{t}}\!\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\circ\frac{\partial F}{\partial \mathbf{r}}\right)\mathbf{t}\right|\Delta s}{\left|\frac{\partial F}{\partial \mathbf{r}}\right|} \tag{47}$$

これから，次の曲率半径の式が得られる．

$$\rho=\frac{\left|\frac{\partial F}{\partial \mathbf{r}}\right|}{\left|{}^{\mathrm{t}}\!\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\circ\frac{\partial F}{\partial \mathbf{r}}\right)\mathbf{t}\right|} \tag{48}$$

以上で，曲率半径は得られたのであるが，$\Delta\theta$ から導出する方法も述べておこう．$\Delta\theta$ は $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ と $\mathbf{n}(\mathbf{r}+\Delta\mathbf{r})$) の間の角度であり，すなわち，P と Q の法線の作る角度である．$\mathbf{n}(\mathbf{r})$ と $\mathbf{n}(\mathbf{r}+\Delta\mathbf{r})$ の外積をとることにより，

$$\mathbf{n}(\mathbf{r}) \times \mathbf{n}(\mathbf{r}+\Delta\mathbf{r}) = |\mathbf{n}(\mathbf{r})|\;|\mathbf{n}(\mathbf{r}+\Delta\mathbf{r})| \sin\Delta\theta \tag{49}$$

となる．左辺は，

$$\begin{aligned}\mathbf{n}(\mathbf{r}) \times \mathbf{n}(\mathbf{r}+\Delta\mathbf{r}) &= \mathbf{n}(\mathbf{r}) \times (\mathbf{n}(\mathbf{r}) + \Delta\mathbf{n}(\mathbf{r})) = \mathbf{n}(\mathbf{r}) \times \Delta\mathbf{n}(\mathbf{r}) \\ &= \mathbf{n}(\mathbf{r}) \times {}^{\mathrm{t}}\!\left(\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}} \circ \frac{\partial F}{\partial\mathbf{r}}\right)\mathbf{t}\;\Delta s\end{aligned} \tag{50}$$

となる．右辺は，2 次の微小量を省略すると，

$$|\mathbf{n}(\mathbf{r})|\;|\mathbf{n}(\mathbf{r}+\Delta\mathbf{r})| \sin\Delta\theta = |\mathbf{n}(\mathbf{r})|^2\;\Delta\theta \tag{51}$$

である．これから，

$$\rho = \left|\frac{\Delta s}{\Delta\theta}\right| = \frac{|\mathbf{n}(\mathbf{r})|^2}{\left|\mathbf{n}(\mathbf{r}) \times {}^{\mathrm{t}}\!\left(\dfrac{\partial}{\partial\mathbf{r}} \circ \dfrac{\partial F}{\partial\mathbf{r}}\right)\mathbf{t}\right|} \tag{52}$$

となる．

この式は，式 (48) とは一見異なるが，以下の理由により等しいことがわかる．まず，$\Delta\mathbf{n}$ は P と Q が十分近い極限において，$\mathbf{n}(\mathbf{r})$ と直交し，$\theta \simeq \pi/2$ とみなすことができる．したがって，$\mathbf{n}(\mathbf{r})\times\Delta\mathbf{n}(\mathbf{r}) = |\mathbf{n}(\mathbf{r})|\;|\Delta\mathbf{n}(\mathbf{r})| \sin\theta \simeq |\mathbf{n}(\mathbf{r})|\;|\Delta\mathbf{n}(\mathbf{r})|$ とすることができる．これから，

$$\rho = \lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta s}{\Delta\theta}\right| = \frac{|\mathbf{n}(\mathbf{r})|^2}{\mathbf{n}(\mathbf{r})\;\left|{}^{\mathrm{t}}\!\left(\dfrac{\partial}{\partial\mathbf{r}} \circ \dfrac{\partial F}{\partial\mathbf{r}}\right)\mathbf{t}\right|} = \frac{|\mathbf{n}(\mathbf{r})|}{\left|{}^{\mathrm{t}}\!\left(\dfrac{\partial}{\partial\mathbf{r}} \circ \dfrac{\partial F}{\partial\mathbf{r}}\right)\mathbf{t}\right|} \tag{53}$$

となり，式 (48) と一致する．

4.3 $F(x,y,z)=0$ で与えられる曲面の曲率　法線を含まない面内の場合

曲面と交差する平面が点 P における法線を含まない場合，その平面の方程式を

$$ax+by+cz=d \tag{54}$$

とすると，この式の z を $F(x,y,z)=0$ に代入すれば，この式は $F(x,y)=0$ という曲線の式になる．すなわち，この場合は，第 3.3 節の曲率半径の場合に帰着することがわかる．

4.4 等エネルギー面の曲率半径

固体中の電子のエネルギー $\mathscr{E}$ が波数空間で $\mathbf{k}$ 依存性をもつとき，$\mathscr{E}$ が一定の点は波数空間で曲面を形成する．これが等エネルギー面で，固体の種類ごとに特有の形をもつ．その等エネルギー面の曲率半径は，有効質量と密接な関係があるため，曲率半径を知ることは重要である．この曲率半径は，第 4.2 節の方法で求めることができる．

第 4.2 節で，実空間の $\mathbf{r}$ を波数空間の $\mathbf{k}$ で置き換え，曲面の関数 F をエネルギー $\mathscr{E}$ で置き換えればよい．したがって，式 (48) から，

$$\rho = \frac{\left|\dfrac{\partial\mathscr{E}}{\partial\mathbf{k}}\right|}{\left|{}^{\mathrm{t}}\!\left(\dfrac{\partial}{\partial\mathbf{k}} \circ \dfrac{\partial\mathscr{E}}{\partial\mathbf{k}}\right)\mathbf{t}\right|} \tag{55}$$

となる．なお，この式の分母ではdyadの転置行列を用いているが，$\partial^2\mathscr{E}/\partial k_x\partial k_y = \partial^2\mathscr{E}/\partial k_y\partial k_x$，$\partial^2\mathscr{E}/\partial k_y\partial k_z = \partial^2\mathscr{E}/\partial k_z\partial k_y$，$\partial^2\mathscr{E}/\partial k_z\partial k_x = \partial^2\mathscr{E}/\partial k_x\partial k_z$ であるから，この場合，転置はなくても結果は同じである．

5 付録

5.1 内積の $\Delta\theta$ を用いて曲率半径を計算する方法

点Pと点Qにおけるそれぞれの接線ベクトル $\mathbf{t}(t)$ と $\mathbf{t}(t+\Delta t)$ の間の角度は $\Delta\theta$ であり，この二つの接線ベクトルで作られる三角形は，点Pおよび点Qと曲率半径から作られる三角形と相似である．点Pと点Qの距離は $\Delta s \simeq \sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}$ である．角度 $\Delta\theta$ を知ることができれば，

$$\rho\Delta\theta = \Delta s \tag{A1}$$

より，曲率半径 ρ を求めることができる．

角度 $\Delta\theta$ は二つの接線ベクトルの外積あるいは内積から求めることができる．内積の場合，$\cos\Delta\theta$ の最低次の微小項は $(\Delta\theta)^2$ であるから，内積の計算は $(\Delta t)^2$ まで計算する必要がある．

$\mathbf{t}(t)$ と $\mathbf{t}(t+\Delta t)$ の内積は，

$$\mathbf{t}(t)\cdot\mathbf{t}(t+\Delta t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'(t+\Delta t) \\ y'(t+\Delta t) \\ z'(t+\Delta t) \end{pmatrix} = x'(t)x'(t+\Delta t) + y'(t)y'(t+\Delta t) + z'(t)z'(t+\Delta t)$$

である．ここで，x の2次の微分まで考えると，Δt の1次の項までになり，$x'(t+\Delta t) \simeq x'(t) + x''(t)\Delta t$ となる．$y'(t+\Delta t)$，$z'(t+\Delta t)$ についても同様である．以下引数は全て同じであるのでこれを省略して，ベクトルの成分による内積は，

$$\begin{aligned} \mathbf{t}(t)\cdot\mathbf{t}(t+\Delta t) &= x'(x'+x''\Delta t) + y'(y'+y''\Delta t) + z'(z'+z''\Delta t) \\ &= x'^2 + y'^2 + z'^2 + (x'x''+y'y''+z'z'')\Delta t \end{aligned} \tag{A2}$$

とすることができる．

一方，この内積のベクトルの角度を含む部分に関しては，

$$\mathbf{t}(t)\cdot\mathbf{t}(t+\Delta t) = |\mathbf{t}(t)||\mathbf{t}(t+\Delta t)|\cos\Delta\theta \tag{A3}$$

$$|\mathbf{t}(t)| = \sqrt{x'^2+y'^2+z'^2} \tag{A4}$$

$$|\mathbf{t}(t+\Delta t)| = \sqrt{(x'+x''\Delta t)^2 + (y'+y''\Delta t)^2 + (z'+z''\Delta t)^2}$$

である．$|\mathbf{t}(t+\Delta t)|$ は次のように変形する．

$$\begin{aligned} |\mathbf{t}(t+\Delta t)| &= \sqrt{(x'^2+y'^2+z'^2) + 2(x'x''+y'y''+z'z'')\Delta t + (x''^2+y''^2+z''^2)\Delta t^2} \\ &\simeq \sqrt{(x'^2+y'^2+z'^2)}\left(1 + \frac{2(x'x''+y'y''+z'z'')\Delta t + (x''^2+y''^2+z''^2)\Delta t^2}{(x'^2+y'^2+z'^2)}\right)^{1/2} \end{aligned} \tag{A5}$$

そうすると，式(A2)〜(A5)から，

$$\cos\Delta\theta = \frac{x'^2+y'^2+z'^2+(x'x''+y'y''+z'z'')\Delta t}{(x'^2+y'^2+z'^2)}\left(1 + \frac{2(x'x''+y'y''+z'z'')\Delta t + (x''^2+y''^2+z''^2)\Delta t^2}{(x'^2+y'^2+z'^2)}\right)^{-1/2} \tag{A6}$$

となる．ここで，$(1+x)^{-1/2} \simeq 1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2$ であることに注意して，Δt^3 以上の微小項を無視すると，

$$
\begin{aligned}
&\left(1+\frac{2(x'x''+y'y''+z'z'')\Delta t+(x''^2+y''^2+z''^2)\Delta t^2}{(x'^2+y'^2+z'^2)}\right)^{-1/2}\\
=&1-\frac{1}{2}\left[\frac{2(x'x''+y'y''+z'z'')\Delta t+(x''^2+y''^2+z''^2)\Delta t^2}{(x'^2+y'^2+z'^2)}\right]+\frac{3}{8}\left[\frac{2(x'x''+y'y''+z'z'')\Delta t+(x''^2+y''^2+z''^2)\Delta t^2}{(x'^2+y'^2+z'^2)}\right]^2\\
=&\left[\frac{2(x'^2+y'^2+z'^2)-2(x'x''+y'y''+z'z'')\Delta t-(x''^2+y''^2+z''^2)\Delta t^2}{2(x'^2+y'^2+z'^2)}\right]+\frac{3}{2}\left[\frac{(x'x''+y'y''+z'z'')^2\Delta t^2}{(x'^2+y'^2+z'^2)^2}\right]
\end{aligned}
$$

となるので，これを式 (A6) に代入すると，Δt^3 以上の項は無視して，

$$
\begin{aligned}
\cos\Delta\theta =& \frac{(x'^2+y'^2+z'^2)^2-(x'x''+y'y''+z'z'')^2\Delta t^2}{(x'^2+y'^2+z'^2)^2}\\
&-\frac{1}{2}\frac{(x'^2+y'^2+z'^2)^2(x''^2+y''^2+z''^2)\Delta t^2}{(x'^2+y'^2+z'^2)^2}+\frac{3}{2}\{\frac{(x'x''+y'y''+z'z'')^2\Delta t^2}{(x'^2+y'^2+z'^2)^2}\}\\
=&1+\frac{1}{2}\{\frac{(x'x''+y'y''+z'z'')^2\Delta t^2}{(x'^2+y'^2+z'^2)^2}\}-\frac{1}{2}\frac{(x'^2+y'^2+z'^2)^2(x''^2+y''^2+z''^2)\Delta t^2}{(x'^2+y'^2+z'^2)^2}\\
=&1+\frac{1}{2}\frac{2x'x''y'y''+2y'y''z'z''+2z'z''x'x''-x''^2y'^2-x''^2z'^2-y''^2x'^2-y''^2z'^2-z''^2x'^2-z''^2y'^2}{(x'^2+y'^2+z'^2)^2}\Delta t^2\\
=&1-\frac{1}{2}\frac{(x''y'-x'y'')^2+(y''z'-y'z'')^2+(z''x'-z'x'')^2}{(x'^2+y'^2+z'^2)^2}\Delta t^2
\end{aligned}
$$

となり，Δt の 1 次の項は消える．$\cos\Delta\theta-1=-2\sin^2(\Delta\theta/2)$ であるから，上式は，

$$4\sin^2\frac{\Delta\theta}{2}=\frac{(x''y'-x'y'')^2+(y''z'-y'z'')^2+(z''x'-z'x'')^2}{(x'^2+y'^2+z'^2)^2}\Delta t^2$$

となり，$\Delta\theta$ が十分小さい時には，$\sin^2(\Delta\theta/2)\simeq\Delta\theta^2/4$ であるから，

$$\Delta\theta=\frac{\sqrt{(x''y'-x'y'')^2+(y''z'-y'z'')^2+(z''x'-z'x'')}}{(x'^2+y'^2+z'^2)}\Delta t \tag{A7}$$

となる．ここで，

$$\Delta s=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\Delta t \tag{A8}$$

とできるから，式 (A1)，(A7)，(A8) から，

$$\rho=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta\theta}=\frac{(x'^2+y'^2+z'^2)^{3/2}}{\sqrt{(x''y'-x'y'')^2+(y''z'-y'z'')^2+(z''x'-z'x'')^2}} \tag{56}$$

となる．これは式 (41) に等しい．

参考文献

[1] 「固体物性と電気伝導」（森北出版）出版 2014/5/27