1　衝突確率とポアッソン分布

2012.4.26　鈴木　実

これは Ashcroft-Mermin の第 1 章の章末問題 1 のタイトルがなぜ Poisson Distribution なのか，という学生の質問に対する回答である．

1.1　確率の総和と積分 — 準備

連続な変数をパラメータとする確率の総和と積分について考える。具体的に時間 t の 1 変数をパラメータとする。総和をとる確率としては t=0 から t まで衝突しない確率 $P(0,t)$ を考えると ($\mathrm{d}t$ の間に衝突する確率を $\mathrm{d}t/\tau$ とする)，$P(0,t)$ は

$$P(0,t) = \mathrm{e}^{-t/\tau}$$

である．$t = 0$ から $0 < t_1 < t_2 < t_3 < \cdots < t_N < T$ を満たし、かつ $t = 0$ から t_i $(i = 1, 2, \cdots, N)$ まで衝突しない確率の総和 S を考える (それぞれは相反事象である)．そうすると

$$S = \sum_{i=1}^{N} \mathrm{e}^{-t_i/\tau}$$

が成り立つ。しかし、この定義では $N \to \infty$ に対し総和は収束しない。簡単のために、t_i の間隔を一定値 $\varepsilon = T/N$ とすれば、S は ε に依存して変化する。一定の収束値を得るにはリーマン積分のように規格化因子が必要である。すなわち経路積分と同じ考えで (例えばファインマンの「経路積分と量子力学」の第 2 章)、規格化因子を εA とすれば $\varepsilon \to 0$ の時 $P = \varepsilon AS$ は収束する。すなわち

$$P = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^{N} \varepsilon \mathrm{e}^{-t_i/\tau} \tag{1}$$

$$P = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{A} \sum_{i=1}^{N} \varepsilon \mathrm{e}^{-t_i/\tau} = \frac{1}{A} \int_0^T \mathrm{e}^{-t/\tau} \mathrm{d}t \tag{2}$$

$T \to \infty$ の時に $P = 1$ となるように A を定義すると

$$P = \frac{1}{A} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t/\tau} \mathrm{d}t = \frac{\tau}{A} = 1$$

となるから

$$A = \tau \tag{3}$$

となる。

1.2　N 回衝突する確率 — ポアッソン分布

$t=0$ から $t=T$ までの間に対象とする粒子が N 回衝突する確率 $P(N)$ を考える。そのため，まず，$0<t_1<t_2<t_3<\cdots<t_N<T$ とすると，粒子が $t=t_1,\ldots,t_N$ で N 回衝突し，その間の時間帯では衝突しない確率 P を考える．明らかに，確率 P は，

$$P=P(0,t_1)P(t_1,t_2)\cdots P(t_N,T)=\mathrm{e}^{-t_1/\tau}\mathrm{e}^{-(t_2-t_1)/\tau}\cdots\mathrm{e}^{-(T-t_N)/\tau} \tag{4}$$

である (前提から t_i で衝突する確率は 1)．N 回衝突する確率は $0<t_1<t_2<t_3<\cdots<t_N<T$ を満たす全ての t_i $(0<t_i<T,\ i=1,\cdots,N)$ の異なる組み合わせの総和で与えられる (これは経路積分的な考え方)。前節の総和の計算手法を用いると、

$$\begin{aligned}
P(N) &= \int_0^{t_2}\mathrm{d}t_1 A^{-1}\mathrm{e}^{-(t_1-t_0)/\tau}\int_0^{t_3}\mathrm{d}t_2 A^{-1}\mathrm{e}^{-(t_2-t_1)/\tau}\int_0^{t_4}\mathrm{d}t_3 A^{-1}\mathrm{e}^{-(t_3-t_2)/\tau}\\
&\quad\cdots\int_0^{T}\mathrm{d}t_N A^{-1}\mathrm{e}^{-(t_N-t_{N-1})/\tau}\mathrm{e}^{-(T-t_N)/\tau}\\
&= \frac{1}{N!A^N}\int_0^T\int_0^T\cdots\int_0^T \mathrm{e}^{-(t_1-t_0)/\tau}\mathrm{e}^{-(t_2-t_1)/\tau}\cdots\mathrm{e}^{-(t_N-t_{N-1})/\tau}\mathrm{e}^{-(T-t_N)/\tau}\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\cdots\mathrm{d}t_N\\
&= \frac{1}{N!A^N}\int_0^T\int_0^T\cdots\int_0^T \mathrm{e}^{-T/\tau}\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\cdots\mathrm{d}t_N\\
&= \frac{T^N}{N!A^N}\mathrm{e}^{-T/\tau}=\frac{1}{N!}\left(\frac{T}{\tau}\right)^N\mathrm{e}^{-T/\tau}
\end{aligned}$$

という結果が得られる。これは平均を $\lambda=T/\tau$ とするポアッソン分布 $\lambda^N\mathrm{e}^{-\lambda}/N!$ である。つまり時間 T の間に N 回衝突する確率はポアッソン分布になるということである。

あるいは確率の総和の意味を厳密に問わなければ、次のようにもできる。$0\simeq t$ で衝突せず、$t\simeq t+\mathrm{d}t$ で衝突する確率は

$$\frac{\mathrm{d}t}{\tau}\mathrm{e}^{-t/\tau}$$

これから $0<t_1<t_2<\cdots<t_N<T$ の順序で $t_i\simeq t_i+\mathrm{d}t_i$ で衝突する確率は

$$P=\frac{\mathrm{d}t_1}{\tau}\mathrm{e}^{-t/\tau}\frac{\mathrm{d}t_2}{\tau}\mathrm{e}^{-(t_2-t_1)/\tau}\cdots\frac{\mathrm{d}t_N}{\tau}\mathrm{e}^{-(t_N-t_{N-1})/\tau}\mathrm{e}^{-(T-t_N)/\tau} \tag{5}$$

これに対して全ての異なる t_i の組み合わせについて総和を取ると同じ結果が得られる。