圧電効果と圧電基本式　その1

2022.12.5　　鈴木　実

1　はじめに

圧力を加えると電荷（分極）を発生する現象を圧電効果という．圧電効果を示す物質，すなわち圧電体では，電気機械結合効果により，電気エネルギーと機械エネルギーが相互に変換される．圧電体に応力を加えると，歪と同時に分極が形成される．この現象は，歪 $\widetilde{S}$，応力 $\widetilde{T}$，電束 $\mathbf{D}$，および電場 $\mathbf{E}$ の4個の物理量を結びつける二つの関係式で表される．この関係式を圧電基本式という．圧電基本式は，電気機械結合係数の表し方により，d-形式，e-形式，g-形式，h-形式という四つの形式がある．d-形式が基本であり，他の三つの形式は d-形式を変換することによって得られる．本稿では，基礎的な歪テンソルと応力テンソルからはじめて，圧電効果と結晶系，最後に圧電基本式までを述べたいと考えている．

2　歪テンソルと応力テンソル

気体の圧力は，有限な大きさの一つの面に対して働く力として定義される．固体においても，固体中の力，すなわち応力は，一つの面に対して働く力として定義される．ただし，気体は等方的であるから，気体の圧力は等方的であり，面に対して垂直に働き，圧力はベクトルで表される．一方，固体では弾力的な性質が異方的であるから，一つの面に対して働く力は必ずしも垂直ではない．したがって，応力を定義するには面の方向と力の方向の二つの量が必要である．このことから，応力 (stress) は2階のテンソルで表される．

外部から力が加わっている物体において，ある部分に応力があるとき，その応力に見合う物質の変位が生じていて，熱的平衡状態に戻ろうとする応力とつり合いがとれて平衡が成り立つ．もし，この変位が一様なら，それは物体の平衡移動を意味するので物質内に応力はない．したがって，外部からの力によって発生する微小部分の変位は，場所に依存して変化するものでなければならない．これが固体の歪である．固体は等方的ではないので，一般に，このような変位量の変化はその物質の方向に依存する．このように，物質の歪は，物質の微小部分の変位の方向と，変位量の変化を決める物質の方向という二つの方向によって定義されることがわかる．したがって，物質の歪 (strain) も2階のテンソルで表されることになる．

2.1　歪テンソルの導出

物体のある点の位置を $\mathbf{r}$，変形した後でその点が変位した位置を $\mathbf{r}'$ とするとき，変位した量 $\mathbf{u} = \mathbf{r}' - \mathbf{r}$ は $\mathbf{r}$ の関数とみなすことができるから，変位ベクトル $\mathbf{u}$ は

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}' - \mathbf{r} \tag{1}$$

と書くことができる．このとき，圧電効果を表す変数として，次式で定義される歪テンソル S_{ij} が用いられる．

$$u_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}u_j(\mathbf{r}) + \frac{\partial}{\partial x_j}u_i(\mathbf{r})\right) \tag{2}$$

ここで，x_i と u_i は，$\mathbf{r}$ および $\mathbf{u}$ の成分である．

歪テンソルの定義式が式 (2) の形になる必然性ともいうべきものは，直感的にわかりにくい．このことは専門書にもあまり記載がないが，アシュクロフト - マーミン [1] とランダウ - リフシッツ [2] には比較的明快な記

述がある．前者は調和振動モデルによる格子系のエネルギーから出発し，後者は変形に伴う微小長さの変化から出発している．それぞれの導出法は以下の通りである．アシュクロフト - マーミンの場合は少し長い．

2.1.1 アシュクロフト - マーミンの場合　調和近似

原子全体のポテンシャルエネルギーは 1 対の原子間のポテンシャルエネルギー $\phi(\mathbf{r})$ の総和であるとし，$\mathbf{R}$ を，原子がポテンシャルの中で運動しているときの原子の平均位置とする．簡単に，$\mathbf{R}$ を格子点ということにする．$\mathbf{R}$ の全体がブラヴェー格子を構成していると考える．すべての原子がこのようなポテンシャルの底となる平衡位置 $\mathbf{R}$ にあるとき，この原子系のポテンシャルエネルギー U は，

$$U = \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{R}\,\mathbf{R}'} \phi(\mathbf{R}-\mathbf{R}') = \frac{N}{2}\sum_{\mathbf{R}\neq\mathbf{0}} \phi(\mathbf{R}) \tag{22.2}$$

となる (少数の式番号はアシュクロフト - マーミン)．第 3 式は，第 2 式で $\mathbf{R}'=\mathbf{0}$ のときを考え，ブラヴェー格子であるから等価な格子点が N 個あるので N 倍してこのようになる．

原子が $\mathbf{R}$ から $\mathbf{u}(\mathbf{R})$ だけ変位している場合，$\mathbf{R}$ の原子の位置は，$\mathbf{r}(\mathbf{R}) = \mathbf{R} + \mathbf{u}(\mathbf{R})$ となり，

$$U = \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{R}\,\mathbf{R}'} \phi(\mathbf{r}(\mathbf{R})-\mathbf{r}(\mathbf{R}')) = \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{R}\,\mathbf{R}'} \phi(\mathbf{R}-\mathbf{R}'+\mathbf{u}(\mathbf{R})-\mathbf{u}(\mathbf{R}')) \tag{22.3}$$

となる．これを $\mathbf{r} = \mathbf{R}-\mathbf{R}'$ でテイラー展開し，$\mathbf{u}$ の 2 次の項を残して，定数項 (式 (22.2)) と，総和して相殺する 1 次の項，および 3 次以上の微小項を省略すると，

$$U = \frac{1}{4}\sum_{\substack{\mathbf{R}\,\mathbf{R}'\\ \mu\nu}} [u_\mu(\mathbf{R})-u_\mu(\mathbf{R}')]\phi_{\mu\nu}(\mathbf{R}-\mathbf{R}')[u_\nu(\mathbf{R})-u_\nu(\mathbf{R}')] \tag{22.9a}$$

$$\phi_{\mu\nu}(\mathbf{r}) = \frac{\partial^2\phi(\mathbf{r})}{\partial r_\mu \partial r_\nu} \tag{22.9b}$$

となる．添字は μ，ν は $i = 1, 2, 3$ の値をとり，r_i が x，y，z のいずれかになる．式 (22.9a) が調和振動子のポテンシャルに相当する部分で，これを調和近似 (harmonic approximation) という．さらに，これをもっと一般的な形に書き換えると，

$$U = \frac{1}{2}\sum_{\substack{\mathbf{R}\,\mathbf{R}'\\ \mu\nu}} u_\mu(\mathbf{R})D_{\mu\nu}(\mathbf{R}-\mathbf{R}')u_\nu(\mathbf{R}') = \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{R}\mathbf{R}'} \mathbf{u}(\mathbf{R})\,\mathbf{D}(\mathbf{R}-\mathbf{R}')\,\mathbf{u}(\mathbf{R}') \tag{22.10}$$

$$D_{\mu\nu}(\mathbf{R}-\mathbf{R}') = \delta_{\mathbf{R},\,\mathbf{R}'}\sum_{\mathbf{R}''} \phi_{\mu\nu}(\mathbf{R}-\mathbf{R}'') - \phi_{\mu\nu}(\mathbf{R}-\mathbf{R}') \tag{22.11}$$

となる．$\mathbf{D}$ は，ベクトルのように見えるが，ここでは $D_{\mu\nu}$ を成分とする行列である．式 (22.10) の導出は次のようにする．式 (22.9a) の総和の中を展開すると，$u_\mu(\mathbf{R})u_\nu(\mathbf{R})$，$u_\mu(\mathbf{R}')u_\nu(\mathbf{R}')$，$u_\mu(\mathbf{R})u_\nu(\mathbf{R}')$，および $u_\mu(\mathbf{R}')u_\nu(\mathbf{R})$ の 4 個の項ができる．その中で，$u_\mu(\mathbf{R})u_\nu(\mathbf{R})$ および $u_\mu(\mathbf{R}')u_\nu(\mathbf{R}')$ の項の和が，式 (22.11) 右辺の第 1 項を式 (22.10) 歳 2 式に代入した部分に相当し[*1]，$u_\mu(\mathbf{R})u_\nu(\mathbf{R}')$ および $u_\mu(\mathbf{R}')u_\nu(\mathbf{R})$ の項の和が，式 (22.11) 右辺の第 2 項を式 (22.10) 第 2 式に代入した部分に相当する．したがって，式 (22.9a) は式 (22.10) のように書けることになる．

[*1] たとえば，$u_\mu(\mathbf{R})u_\nu(\mathbf{R})$ の項の場合，

$$\sum_{\mathbf{R},\mathbf{R}'} u_\mu(\mathbf{R})\delta_{\mathbf{R},\mathbf{R}'}\sum_{\mathbf{R}''}\phi_{\mu\nu}(\mathbf{R}-\mathbf{R}'')u_\nu(\mathbf{R}) = \sum_{\mathbf{R}'} u_\mu(\mathbf{R}')\sum_{\mathbf{R}''}\phi_{\mu\nu}(\mathbf{R}'-\mathbf{R}'')u_\nu(\mathbf{R}')$$
$$= \sum_{\mathbf{R}'} u_\mu(\mathbf{R}')\sum_{\mathbf{R}}\phi_{\mu\nu}(\mathbf{R}'-\mathbf{R})u_\nu(\mathbf{R}') = \sum_{\mathbf{R}'} u_\mu(\mathbf{R}')\sum_{\mathbf{R}}\phi_{\mu\nu}(\mathbf{R}-\mathbf{R}')u_\nu(\mathbf{R}')$$

となる．途中，$\mathbf{R}''$ を $\mathbf{R}$ で置き換え，$\phi_{\mu\nu}(\mathbf{R}'-\mathbf{R}) = \phi_{\mu\nu}(\mathbf{R}-\mathbf{R}')$ の関係を用いた．
$u_\mu(\mathbf{R}')u_\nu(\mathbf{R}')$ の項の場合は，$\sum_{\mathbf{R},\mathbf{R}'}$ で先に $\mathbf{R}'$ の総和をとればよい．

さらに，式 (22.10) は次のように変形することができる．

$$U = -\frac{1}{4} \sum_{\mathbf{R},\mathbf{R}'} \{\mathbf{u}(\mathbf{R}') - \mathbf{u}(\mathbf{R})\}\, \mathbf{D}(\mathbf{R} - \mathbf{R}')\, \{\mathbf{u}(\mathbf{R}') - \mathbf{u}(\mathbf{R})\} \tag{22.69}$$

である．これは以下のような理由による．

$\mathbf{R}$ と $\mathbf{R}'$ は格子点にある原子の位置である．ここで，行列 $\mathbf{D}$ に関して，次の関係式が成り立つ．

$$\sum_{\mathbf{R}} \mathbf{D}(\mathbf{R}) = \sum_{\mathbf{R}} \mathbf{D}(\mathbf{R} - \mathbf{R}') = 0 \tag{3}$$

これを説明する．まず，式 (22.10) で $\mathbf{u}$ がすべての格子点で一定値 $\mathbf{d}$ の場合を考える．すなわち，$\mathbf{r}(\mathbf{R}) = \mathbf{R} + \mathbf{u}(\mathbf{R}) = \mathbf{R} + \mathbf{d}$ である．これは単なる物体の平行移動を意味するから，原子系全体のエネルギーとしては $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ の場合と同じであるから $U = 0$ でなる．式 (22.10) で任意の $\mathbf{u} = \mathbf{d}$ についてこれが成り立つということから，式 (3) が導かれる．

次に，次式の左辺で $\mathbf{R}$ と $\mathbf{R}'$ 入れ替え，$\mathbf{D}(\mathbf{R} - \mathbf{R}') = \mathbf{D}(\mathbf{R}' - \mathbf{R})$ であることを用いるとり，

$$\sum_{\substack{\mathbf{R}\mathbf{R}' \\ \mu\nu}} \mathbf{u}(\mathbf{R})\, \mathbf{D}(\mathbf{R} - \mathbf{R}')\, \mathbf{u}(\mathbf{R}') = \sum_{\substack{\mathbf{R}\mathbf{R}' \\ \mu\nu}} \mathbf{u}(\mathbf{R}')\, \mathbf{D}(\mathbf{R} - \mathbf{R}')\, \mathbf{u}(\mathbf{R}) \tag{4}$$

となる．さらに，式 (3) から，

$$\sum_{\substack{\mathbf{R}\mathbf{R} \\ \mu\nu}} \mathbf{u}(\mathbf{R})\, \mathbf{D}(\mathbf{R} - \mathbf{R}')\, \mathbf{u}(\mathbf{R}) = \sum_{\substack{\mathbf{R}\mathbf{R}' \\ \mu\nu}} \mathbf{u}(\mathbf{R}')\, \mathbf{D}(\mathbf{R} - \mathbf{R}')\, \mathbf{u}(\mathbf{R}') = 0 \tag{5}$$

となるので，式 (22.69) を展開した式に，式 (4) と式 (5) を代入すれば式 (22.10) と等しいことがわかる．

$\mathbf{u}(\mathbf{R})$ を連続変数の関数として扱うことにする．すなわち，格子定数は十分小さいので，格子定数よりも十分大きな物体では，$\mathbf{R}$ と $\mathbf{R}'$ は連続な $\mathbf{r}$ および $\mathbf{r}'$ とみなしても問題ない．$\mathbf{u}(\mathbf{R})$ は格子点 $\mathbf{R}$ における変位で十分小さく，かつ $\mathbf{r}$ の緩やかな関数の場合，

$$\mathbf{u}(\mathbf{R}') = \mathbf{u}(\mathbf{R}) + (\mathbf{R}' - \mathbf{R}) \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{r})\big|_{\mathbf{r}=\mathbf{R}} \tag{22.70}$$

と近似することができる．これを式 (22.69) に代入すると，

$$U = -\frac{1}{4} \sum_{\substack{\mathbf{R},\mathbf{R}' \\ \sigma\mu\tau\nu}} \left((R'_\sigma - R_\sigma) \frac{\partial}{\partial x_\sigma} u_\mu(\mathbf{R}) \right) D_{\mu\nu}(\mathbf{R} - \mathbf{R}') \left((R'_\tau - R_\tau) \frac{\partial}{\partial x_\tau} u_\nu(\mathbf{R}) \right) \tag{6}$$

$\mathbf{R}' - \mathbf{R} = \mathbf{R}''$ とおき，総和を $\mathbf{R}, \mathbf{R}'$ から $\mathbf{R}, \mathbf{R}''$ に変換すると，

$$U = -\frac{1}{4} \sum_{\substack{\mathbf{R},\mathbf{R}'' \\ \sigma\mu\tau\nu}} \left(R''_\sigma \frac{\partial}{\partial x_\sigma} u_\mu(\mathbf{R}) \right) D_{\mu\nu}(-\mathbf{R}'') \left(R''_\tau \frac{\partial}{\partial x_\tau} u_\nu(\mathbf{R}) \right) \tag{7}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{R},\mu\nu\sigma\tau} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_\sigma} u_\mu(\mathbf{R}) \right) \left(\frac{\partial}{\partial x_\tau} u_\nu(\mathbf{R}) \right) \left[-\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{R}''} R''_\sigma D_{\mu\nu}(\mathbf{R}'') R''_\tau \right] \right\} \tag{8}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{R},\mu\nu\sigma\tau} \left(\frac{\partial}{\partial x_\sigma} u_\mu(\mathbf{R}) \right) \left(\frac{\partial}{\partial x_\tau} u_\nu(\mathbf{R}) \right) E_{\sigma\mu\tau\nu} \tag{22.71}$$

$$E_{\sigma\mu\tau\nu} = -\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{R}} R_\sigma D_{\mu\nu}(\mathbf{R}) R_\tau \tag{22.72}$$

となる．$u(\mathbf{r})$ は十分緩やかな関数であり，格子定数が物体の大きさに比較して十分小さいから，総和を積分にすることができて，式 (22.71), (22.72) は，

$$U = \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu\sigma\tau} \int \mathrm{d}\mathbf{r} \left(\frac{\partial}{\partial x_\sigma} u_\mu(\mathbf{r}) \right) \left(\frac{\partial}{\partial x_\tau} u_\nu(\mathbf{r}) \right) \overline{E}_{\sigma\mu\tau\nu} \tag{22.73}$$

$$\overline{E}_{\sigma\mu\tau\nu} = \frac{E_{\sigma\mu\tau\nu}}{v} \tag{22.74}$$

となる．式 (22.73) が弾性理論の出発式になる．式 (22.11)，式 (22.72) から，$E_{\sigma\mu\tau\nu}$ は σ と τ の交換および μ と ν の交換に関して不変である．

式 (22.73) が原子間ポテンシャルのみのエネルギーになるには，式 (22.73) から物体全体の平行移動と回転が除く必要がある．物体の平行移動に関しては，変位が物体の全体にわたって一様になり，式 (22.73) は変位の偏微分になっているので，平行移動による寄与は微分で消える．

一方，物体の回転に関しては，式 (22.73) からすぐにはわからない．そこで，物体の任意の回転軸 $\mathbf{n}$ の回りの回転を考える．$\mathbf{n}$ の回りに微小角度 $\delta\boldsymbol{\omega}$ だけ回転した場合，$\mathbf{R}$ における変位 $\mathbf{u}(\mathbf{R})$ は

$$\mathbf{u}(\mathbf{R}) = \delta\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}, \quad \delta\boldsymbol{\omega} = \delta\omega\mathbf{n} \tag{22.76}$$

となる．これを，式 (22.73) の $(\partial/\partial x_\sigma)u_\mu(\mathbf{r})$ に代入すると，

$$\frac{\partial}{\partial x_\sigma}u_\mu(\mathbf{r}) = \frac{\partial}{\partial x_\sigma}\left(\sum_{\alpha,\beta}\epsilon_{\mu\alpha\beta}n_\alpha x_\beta\right)\delta\omega \tag{9}$$

となる．σ，μ，α，β などは $1,2,3$ のいずれかであり，$\epsilon_{\mu\alpha\beta}$ は 3 階の完全反対称テンソルで，μ,α,β が $1,2,3$ の偶置換の場合に 1，奇置換の場合に -1，それ以外は 0 である（用語として，$\epsilon_{\mu\alpha\beta}$ を完全反対称テンソルとして用いるのはここの 2.2.1 節のみで，後で出てくる歪テンソル ϵ_{ij} とは区別する）．$\sigma = \mu$ の場合には，$\sigma \neq \alpha,\beta$ となるため $\partial x_\alpha/\partial\sigma = \partial x_\beta/\partial\sigma = 0$ となり，式 (1) は 0 になるが，それ以外は，0 とはならず，任意の $\mathbf{n}$ および $\overline{E}$ に対して，式 (22.73) すなわち U が 0 になることはない．すなわち，物体の全体の回転に関して U は 0 にならないことになる．

ところが，$(\partial/\partial x_\sigma)u_\mu(\mathbf{r})$ を次のような σ と μ に関する対称形にすると，以下に示すように，式 (22.76) を代入して 0 になる．これを示す．式 (22.76) を代入した形は，

$$\begin{aligned}\Psi &\equiv \frac{\partial}{\partial x_\sigma}u_\mu(\mathbf{r}) + \frac{\partial}{\partial x_\mu}u_\sigma(\mathbf{r}) && (10)\\ &= \frac{\partial}{\partial x_\sigma}\left(\sum_{\alpha,\beta}\epsilon_{\sigma\alpha\beta}n_\alpha x_\beta\right)\delta\omega + \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\sum_{\alpha,\beta}\epsilon_{\sigma\alpha\beta}n_\alpha x_\beta\right)\delta\omega && (11)\end{aligned}$$

となる．

$\sigma = \mu$ の場合，$\sigma = \mu \neq \alpha,\beta$ であるから $\partial x_\alpha/\partial\sigma = \partial x_\beta/\partial\sigma = 0$ となり，かつ，$\mu = \sigma \neq \alpha,\beta$ であるから，$\partial x_\alpha/\partial\mu = \partial x_\beta/\partial\mu = 0$ である．したがって，$\Psi = 0$ となる．

$\sigma \neq \mu$ 場合，x,y,z のうち σ と μ 以外は一つのみである．これを α としよう．そうすると，

$$\begin{aligned}\Psi &= \frac{\partial}{\partial x_\sigma}\left(\epsilon_{\mu\sigma\alpha}\, n_\sigma x_\alpha + \epsilon_{\mu\alpha\sigma}\, n_\alpha x_\sigma\right)\delta\omega + \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\epsilon_{\sigma\mu\alpha}\, n_\mu x_\alpha + \epsilon_{\sigma\alpha\mu}\, n_\alpha x_\mu\right)\delta\omega && (12)\\ &= \left(\epsilon_{\mu\sigma\alpha}\, n_\sigma\frac{\partial x_\alpha}{\partial x_\sigma} + \epsilon_{\mu\alpha\sigma}\, n_\alpha\frac{\partial x_\sigma}{\partial x_\sigma}\right)\delta\omega + \left(\epsilon_{\sigma\mu\alpha}\, n_\mu\frac{\partial x_\alpha}{\partial x_\mu} + \epsilon_{\sigma\alpha\mu}\, n_\alpha\frac{\partial x_\mu}{\partial x_\mu}\right)\delta\omega && (13)\\ &= (\epsilon_{\mu\alpha\sigma} + \epsilon_{\sigma\alpha\mu})n_\alpha\delta\omega = 0 && (14)\end{aligned}$$

となり，$\Psi = 0$ となる．すなわち，式 (10) を用いて式 (22.73) を次のように対称的に書き直したい．

$$U = \frac{1}{2}\sum_{\mu,\nu,\sigma,\tau}\int d\mathbf{r}\left(\frac{\partial}{\partial x_\sigma}u_\mu(\mathbf{r}) + \frac{\partial}{\partial x_\sigma}u_\mu(\mathbf{r})\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_\tau}u_\nu(\mathbf{r}) + \frac{\partial}{\partial x_\nu}u_\tau(\mathbf{r})\right)\overline{E}_{\sigma\mu\tau\nu} \tag{15}$$

しかし，この式にするためには $\overline{E}_{\sigma\mu\tau\nu}$ をそのまま使うことができないので，書き換える必要がある．それには，次のように，対となる $R_\sigma D_{\mu\nu} R_\tau$ と $R_\sigma D_{\mu\tau} R_\nu$ の平均を考えればよい．すなわち

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_\sigma}u_\mu(\mathbf{r})\frac{\partial}{\partial x_\tau}u_\nu(\mathbf{r})\right)R_\sigma D_{\mu\nu}R_\tau \quad\rightarrow\quad \left(\frac{\partial}{\partial x_\sigma}u_\mu(\mathbf{r})\frac{\partial}{\partial x_\tau}u_\nu(\mathbf{r})\right)\frac{R_\sigma D_{\mu\nu}R_\tau + R_\sigma D_{\mu\tau}R_\nu}{2} \tag{16}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_\sigma}u_\mu(\mathbf{r})\frac{\partial}{\partial x_\nu}u_\tau(\mathbf{r})\right)R_\sigma D_{\mu\tau}R_\nu \quad\rightarrow\quad \left(\frac{\partial}{\partial x_\sigma}u_\mu(\mathbf{r})\frac{\partial}{\partial x_\nu}u_\tau(\mathbf{r})\right)\frac{R_\sigma D_{\mu\tau}R_\nu + R_\sigma D_{\mu\nu}R_\tau}{2} \tag{17}$$

とする．これをさらに平均すると，

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x_\sigma}u_\mu(\mathbf{r})\frac{\partial}{\partial x_\tau}u_\nu(\mathbf{r})\right)\frac{R_\sigma D_{\mu\nu}R_\tau + R_\sigma D_{\mu\tau}R_\nu}{2} + \left(\frac{\partial}{\partial x_\sigma}u_\mu(\mathbf{r})\frac{\partial}{\partial x_\nu}u_\tau(\mathbf{r})\right)\frac{R_\sigma D_{\mu\tau}R_\nu + R_\sigma D_{\mu\nu}R_\tau}{2}\right] \\ &\qquad = \frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial x_\sigma}u_\mu(\mathbf{r})\left(\frac{\partial}{\partial x_\tau}u_\nu(\mathbf{r}) + \frac{\partial}{\partial x_\nu}u_\tau(\mathbf{r})\right)(R_\sigma D_{\mu\nu}R_\tau + R_\sigma D_{\mu\tau}R_\nu)\end{aligned} \tag{18}$$

となる．

同様に，対となる $R_\sigma D_{\mu\nu} R_\tau$ と $R_\sigma D_{\mu\tau} R_\nu$ についても平均をとると，

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}u_\sigma(\mathbf{r})\frac{\partial}{\partial x_\tau}u_\nu(\mathbf{r})\right)R_\mu D_{\sigma\nu}R_\tau \quad\rightarrow\quad \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}u_\sigma(\mathbf{r})\frac{\partial}{\partial x_\tau}u_\nu(\mathbf{r})\right)\frac{R_\mu D_{\sigma\nu}R_\tau + R_\mu D_{\sigma\tau}R_\nu}{2} \tag{19}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}u_\sigma(\mathbf{r})\frac{\partial}{\partial x_\nu}u_\tau(\mathbf{r})\right)R_\mu D_{\sigma\tau}R_\nu \quad\rightarrow\quad \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}u_\sigma(\mathbf{r})\frac{\partial}{\partial x_\nu}u_\tau(\mathbf{r})\right)\frac{R_\mu D_{\sigma\tau}R_\nu + R_\mu D_{\sigma\nu}R_\tau}{2} \tag{20}$$

となる．両者を平均すると，

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}u_\sigma(\mathbf{r})\frac{\partial}{\partial x_\tau}u_\nu(\mathbf{r})\right)\frac{R_\mu D_{\sigma\nu}R_\tau + R_\mu D_{\sigma\tau}R_\nu}{2} + \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}u_\sigma(\mathbf{r})\frac{\partial}{\partial x_\nu}u_\tau(\mathbf{r})\right)\frac{R_\mu D_{\sigma\tau}R_\nu + R_\mu D_{\sigma\nu}R_\tau}{2}\right] \\ &\qquad = \frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial x_\mu}u_\sigma(\mathbf{r})\left(\frac{\partial}{\partial x_\tau}u_\nu(\mathbf{r}) + \frac{\partial}{\partial x_\nu}u_\tau(\mathbf{r})\right)(R_\mu D_{\sigma\nu}R_\tau + R_\mu D_{\sigma\tau}R_\nu)\end{aligned} \tag{21}$$

となる．

最後に，式 (18) の $(R_\sigma D_{\mu\nu}R_\tau + R_\sigma D_{\mu\tau}R_\nu)$ と式 (21) の $(R_\mu D_{\sigma\nu}R_\tau + R_\mu D_{\sigma\tau}R_\nu)$ を両者の平均で置き換えてから，それぞれ加えると，

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial x_\sigma}u_\mu(\mathbf{r})\left(\frac{\partial}{\partial x_\tau}u_\nu(\mathbf{r}) + \frac{\partial}{\partial x_\nu}u_\tau(\mathbf{r})\right)(R_\sigma D_{\mu\nu}R_\tau + R_\sigma D_{\mu\tau}R_\nu) \\ &+\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial x_\mu}u_\sigma(\mathbf{r})\left(\frac{\partial}{\partial x_\tau}u_\nu(\mathbf{r}) + \frac{\partial}{\partial x_\nu}u_\tau(\mathbf{r})\right)(R_\mu D_{\sigma\nu}R_\tau + R_\mu D_{\sigma\tau}R_\nu) \\ \rightarrow\quad &\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial x_\sigma}u_\mu(\mathbf{r})\left(\frac{\partial}{\partial x_\tau}u_\nu(\mathbf{r}) + \frac{\partial}{\partial x_\nu}u_\tau(\mathbf{r})\right)\frac{R_\sigma D_{\mu\nu}R_\tau + R_\sigma D_{\mu\tau}R_\nu + R_\mu D_{\sigma\nu}R_\tau + R_\mu D_{\sigma\tau}R_\nu}{2}\right. \\ &\left.+\ \frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial x_\mu}u_\sigma(\mathbf{r})\left(\frac{\partial}{\partial x_\tau}u_\nu(\mathbf{r}) + \frac{\partial}{\partial x_\nu}u_\tau(\mathbf{r})\right)\frac{R_\sigma D_{\mu\nu}R_\tau + R_\sigma D_{\mu\tau}R_\nu + R_\mu D_{\sigma\nu}R_\tau + R_\mu D_{\sigma\tau}R_\nu}{2}\right] \\ &=\frac{1}{16}\left(\frac{\partial}{\partial x_\sigma}u_\mu(\mathbf{r}) + \frac{\partial}{\partial x_\mu}u_\sigma(\mathbf{r})\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_\tau}u_\nu(\mathbf{r}) + \frac{\partial}{\partial x_\nu}u_\tau(\mathbf{r})\right) \\ &\qquad\qquad \times (R_\sigma D_{\mu\nu}R_\tau + R_\sigma D_{\mu\tau}R_\nu + R_\mu D_{\sigma\nu}R_\tau + R_\mu D_{\sigma\tau}R_\nu) \\ &=\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_\sigma}u_\mu(\mathbf{r}) + \frac{\partial}{\partial x_\mu}u_\sigma(\mathbf{r})\right)\right\}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_\tau}u_\nu(\mathbf{r}) + \frac{\partial}{\partial x_\nu}u_\tau(\mathbf{r})\right)\right\} \\ &\qquad\qquad \times \frac{1}{4}(R_\sigma D_{\mu\nu}R_\tau + R_\sigma D_{\mu\tau}R_\nu + R_\mu D_{\sigma\nu}R_\tau + R_\mu D_{\sigma\tau}R_\nu)\end{aligned} \tag{22}$$

となる．この式が式 (22.73) の $(\partial/\partial x_\sigma)u_\mu(\mathbf{r})(\partial/\partial x_\tau)u_\nu(\mathbf{r})$ と $\overline{E}_{\sigma\mu\tau\nu}$ の中の $R_\sigma D_{\mu\nu} R_\tau$ を置き換えることになる．そうすると，

$$U = \frac{1}{2}\sum_{\substack{\sigma\tau\\ \mu\nu}}\int \mathrm{d}\mathbf{r}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_\sigma}u_\mu(\mathbf{r}) + \frac{\partial}{\partial x_\mu}u_\sigma(\mathbf{r})\right)\right\}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_\tau}u_\nu(\mathbf{r}) + \frac{\partial}{\partial x_\nu}u_\tau(\mathbf{r})\right)\right\}c_{\sigma\mu\tau\nu} \tag{23}$$

$$c_{\sigma\mu\tau\nu} = \frac{1}{8v}\sum_{\mathbf{R}}\left[R_\sigma D_{\mu\nu} R_\tau + R_\sigma D_{\mu\tau} R_\nu + R_\mu D_{\sigma\nu} R_\tau + R_\mu D_{\sigma\tau} R_\nu\right] \tag{22.79}$$

となる．あるいは,

$$\epsilon_{\sigma\mu} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_\sigma}u_\mu(\mathbf{r}) + \frac{\partial}{\partial x_\mu}u_\sigma(\mathbf{r})\right) \tag{22.77}$$

と表せば,

$$U = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}\mathbf{r}\left[\sum_{\substack{\sigma\tau\\ \mu\nu}} \epsilon_{\sigma\mu}\, c_{\sigma\mu\tau\nu}\, \epsilon_{\tau\nu}\right] \tag{22.78}$$

となる．上記の計算で $R_\sigma D_{\mu\nu} R_\tau$ などの平均操作は物体の回転に関係する変位を相殺する意味がある．たとえば，物体の回転の場合，$\partial u_y/\partial x$ と $\partial u_x/\partial y$ は大きさが同じで符号が反対になるから平均操作で相殺される．平均操作が 3 回行われることにより，3 次元の任意の回転軸に関する物体の回転による変位が相殺されることになる．

式 (22.77) が求める歪テンソル (strain tensor) である．このように，この式の形はそうなる必然性をもつ．また，$c_{\sigma\mu\tau\nu}$ は 4 階のテンソルで弾性率 (elastic stiffness constant または elastic modulus) と呼ばれる．

式 (22.79) から，$c_{\sigma\mu\tau\nu}$ は σ と μ，または τ と ν を交換しても変わらない．さらに，σ と τ，および μ と ν を同時に交換しても変わらない．これから，4 階のテンソル $c_{\sigma\mu\tau\nu}$ には $3^4 = 81$ 個の成分があるが，そのうち，独立な成分は 21 個であることが次のようにしてわかる．

まず，σ, μ, τ, ν を $c_{\sigma\mu\tau\nu}$ の順番通りの添字とする．すなわち，σ, μ は前半二つの添字，τ, ν は後半二つの添字である．さらに，$(\sigma,\mu) \leftrightarrow (\tau,\nu)$ は $\sigma \leftrightarrow \tau$，および $\mu \leftrightarrow \nu$ の同時交換とする．$(\sigma,\mu) = (\tau,\nu)$ のときは，$\sigma = \tau$ かつ $\mu = \nu$ であるとする．以上のような記号の使い方をすると，$(\sigma,\mu) \leftrightarrow (\tau,\nu)$ よって変化しない c の成分は $\sigma = \tau$ および $\mu = \nu$ となる $3 \times 3 = 9$ 個である．この場合を A とする．

A 以外の 72 個には $(\sigma_1,\mu_1) = (\tau_2,\nu_2)$，$(\sigma_2,\mu_2) = (\tau_1,\nu_1)$ となる対 $\sigma_1\mu_1\tau_1\nu_1$ と $\sigma_2\mu_2\tau_2\nu_2$ が必ずかつ重複なくあり，$(\sigma,\mu) \leftrightarrow (\tau,\nu)$ により，これらの対は互いに等しくなる．したがって，これらの対の半分の 36 個は独立な成分ではない．

以上の 9 個と 36 個の和 45 個の中には，$\sigma \leftrightarrow \mu$，または $\tau \leftrightarrow \nu$ の交換によって等しくなる成分がある．まず，A において，$\sigma = \mu$，かつ，$\tau = \nu$ とした場合，$xyxy$ と $yxyx$，$yzyz$ と $zyzy$，および $zxzx$ と $xzxz$ で $c_{\sigma\mu\tau\nu}$ は等しくなり不変であり，A の独立した c の成分は 6 個になる．

次に $(\sigma,\mu) \leftrightarrow (\tau,\nu)$ によって $c_{\sigma\mu\tau\nu}$ が不変であり，かつ，$\sigma \leftrightarrow \mu$，$\tau \leftrightarrow \nu$ の一方または同時の変換でも不変であるから，(σ,μ) と (τ,ν) を，(xy) のように，順番を区別しない添字の対で考えることにする．

そうすると，まず，$\sigma = \mu$ かつ $\tau = \nu$ の場合，(σ,μ) と (τ,ν) には (xx)，(yy)，(zz) から 2 個選ぶ組み合わせの 6 個が可能である．そのうち，$(xxxx)$，$(yyyy)$，$(zzzz)$ はすでに A に含まれているので，独立な c の成分は 3 個である．この場合を B とする．

次に，$\sigma = \mu$ または $\tau = \nu$ の場合で，かつ B を除く場合は，(σ,μ) と (τ,ν) に，(xx)，(yy)，(zz) から一つ，(xy)，(yz)，(zx) から一つ選ぶ組み合わせが該当する．これらの成分は σ と μ，または τ と ν を交換しても変わらないのですべて独立である．結局，$3 \times 3 = 9$ 個が独立な成分となる．この場合を C とする．

最後に，$\sigma \neq \mu$ または $\tau \neq \nu$ の場合は，(σ,μ) と (τ,ν) に，(xy)，(yz)，(zx) からから二つの対を選べばよいので，結局，3 個の成分が残り，すべて独立である．この場合を D とする．

以上の 4 つの A, B, C, D の場合を合計すると，6+3+9+3=21 となり，21 個の独立な成分があることがわかる．

2.1.2　歪テンソルのベクトル化，弾性定数の行列化

弾性定数 $c_{\sigma\mu\tau\nu}$ は，(σ,μ) と (τ,ν) を一つの組として取り扱うことができて，σ と μ，または τ と ν に交換に関して不変，(σ,μ) と (τ,ν) の同時交換に関して不変，かつ，歪テンソルの添字の対 (σ,μ) と整合しているので，この二つの添字一組を一つの添字で表すことができる．二つの添字は xx，yy，zz，xy，yx，zx の 6 種類あるから，これを 1 から 6 の添字に変換することができる．そうすると，式 (22.78) は，

$$U=\frac{1}{2}\int \mathrm{d}\mathbf{r}\left[\sum_{\alpha,\beta}\epsilon_\alpha\ c_{\alpha\beta}\ \epsilon_\beta\right] \tag{22.82}$$

と書くことができる．ここで，

$$u_{\sigma\mu}=\begin{cases}\epsilon_\alpha & (\sigma=\mu)\\ \frac{1}{2}\epsilon_\alpha & (\sigma\neq\mu)\end{cases} \tag{22.80}$$

である．(σ,μ) が (τ,ν) の場合も同様である．ここで，係数が $\sigma\neq\mu$ の場合に 2 となるのは，$u_{\sigma\mu}$ と $u_{\mu\sigma}$ は等しく，それぞれを含む積の係数となる $c_{\alpha\beta}$ は等しいので，式 (22.78) の 2 個の同一項を含むことになる．これから，係数 2 を含めることにより式 (22.82) に等しくすることができる．$\sigma=\mu$ の場合は式 (22.78) で 1 通りであるから係数は 1 のままでよいことになる．

明らかに，$c_{\alpha\beta}=c_{\beta\alpha}$ であるから，独立な $c_{\alpha\beta}$ の数は，$c_{\alpha\alpha}$ の 6 個とそれ以外の 30 個は $c_{\alpha\beta}$ と $c_{\beta\alpha}$ の対が重複するので，その半分の 15 個が独立した成分となり，その合計 $6+15=21$ 個が $c_{\alpha\beta}$ の独立した成分の数となる．

2.1.3　ランダウ - リフシッツの場合

物体が変形を受けたとき，物体中の点 $\mathbf{r}$ が変形後に点 $\mathbf{r}'$ に移ったとする．そのとき，

$$\mathbf{u}=\mathbf{r}'-\mathbf{r} \tag{1.1}$$

は変位ベクトルである．物体中の十分近い 2 点を考え，その 2 点間のベクトルを $\mathrm{d}\mathbf{x}$，変形後の 2 点間のベクトルを $\mathrm{d}\mathbf{x}'$ とする．そうすると，

$$\mathrm{d}x_i'=\mathrm{d}x_i+\mathrm{d}u_i \tag{24}$$

とすることができる．変形前の距離 $\mathrm{d}l$ は

$$\mathrm{d}l^2=\mathrm{d}x_1^2+\mathrm{d}x_2^2+\mathrm{d}x_3^2 \tag{25}$$

変形後の距離 $\mathrm{d}l'$ は

$$\mathrm{d}l'^2=\mathrm{d}x_1'^2+\mathrm{d}x_2'^2+\mathrm{d}x_3'^2=\sum_{i=1}^{3}(\mathrm{d}x_i+\mathrm{d}u_i)^2 \tag{26}$$

となる．これに，

$$\mathrm{d}u_i=\sum_k\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\mathrm{d}x_k \tag{27}$$

を代入すると，

$$\mathrm{d}l'^2=\mathrm{d}l^2+2\sum_{i,k}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\mathrm{d}x_i\,\mathrm{d}x_k+\sum_{i,k,l}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_i}{\partial x_l}\mathrm{d}x_k\,\mathrm{d}x_l \tag{28}$$

となる．この式の右辺第 2 項では総和の i と k を入れ替えることにより，

$$\sum_{i,k}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\mathrm{d}x_i\,\mathrm{d}x_k=\sum_{i,k}\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\mathrm{d}x_k\,\mathrm{d}x_i \tag{29}$$

が成り立ち，第 3 項で総和の i と l を入れ替えることにより，

$$\sum_{i,k,l}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_i}{\partial x_l}\,\mathrm{d}x_k\,\mathrm{d}x_l=\sum_{i,k,l}\frac{\partial u_l}{\partial x_k}\frac{\partial u_l}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x_k\,\mathrm{d}x_i \tag{30}$$

が成り立つ．したがって，

$$\mathrm{d}l'^2=\mathrm{d}l^2+\sum_{i,k}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}+\sum_l\frac{\partial u_l}{\partial x_i}\frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right)\mathrm{d}x_i\,\mathrm{d}x_k \tag{31}$$

となる．ランダウ・リフシッツではここで数式を対称化して所期の形を導いている．対称化する理由は述べられていないが，近似はない．式 (31) で，

$$u_{ik}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}+\sum_l\frac{\partial u_l}{\partial x_i}\frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right) \tag{1.3}$$

とおくと，

$$\mathrm{d}l'^2=\mathrm{d}l^2+\sum_{i,k}2u_{ik}\,\mathrm{d}x_i\,\mathrm{d}x_k \tag{1.2}$$

となる．u_{ik} はテンソルで，対称テンソルである．これを一般に歪テンソルという．これは，歪が必ずしも微小ではないような場合，たとえば細長い棒などのような場合にも成り立つような定義になっている．

ここでは物体の変化が十分小さい場合を考える．そうすると，式 (31) の括弧内第 3 項はもともと式 (26) の $(\mathrm{d}u_i)^2$ に対応しており，第 2 項の $\mathrm{d}x_i\,\mathrm{d}u_i$ が $\mathrm{d}x_i$ を基準にして 1 次の微小量であるのに対して，第 3 項の $(\mathrm{d}u_i)^2$ は 2 次の微小量になるので，無視することができる．

これでよいと思われるが，歪テンソルの定義は終わると思われるが，ランダウ - リフシッツではそうではない．(この辺のところに他の専門書との違いがあるように感じられる．) 式 (1.3) は添字 i,k に関して対称である．したがって，(u_{ik}) は実対称行列であるから，対角化が可能である．対角化行列で変換される座標系で考え，u_{ik} を表すと $u_{ik}=u_{ik}\delta_{i,k}$ である．そうすると，

$$\mathrm{d}l'^2=\mathrm{d}l^2+\sum_{i,k}2u_{ik}\delta_{i,k}=\sum_i(1+2u_{ii})\,\mathrm{d}x_i^2 \tag{32}$$

となる．これは，主軸の方向に $\mathrm{d}x_i$ が $\mathrm{d}x_i'=\sqrt{1+2u_{ii}}\,\mathrm{d}x_i$ に伸びた（あるいは縮んだ）ことを示す．したがって，$(\mathrm{d}x'-\mathrm{d}x)/\mathrm{d}x=\sqrt{1+2u_{ii}}-1$ は主軸方向の相対伸び（縮み）である．一般に，どの方向にも極端に寸法が小さくはない 3 次元の物体で，変型が微小であれば，このような相対変形は非常に小さい．すなわち，$u_{ii}=\partial u_i/\partial x_i$ は非常に小さい．このようにして，式 (1.3) の括弧内第 2 項は 1 次の微小量となり，第 3 項はさらに 2 次の微小量となる．したがって，第 3 項は無視することができる．その結果，相対変形が微小な場合に，歪テンソル ϵ_{ij} は

$$\epsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{1.5}$$

と定義される．以上がランダウ - リフシッツにおける歪テンソルの導出である．

2.2 応力テンソルの導出

アシュクロフト - マーミンには応力テンソルの導出に関する記述は特にない．したがって，以下はランダウ - リフシッツの場合である．

2.2.1 ランダウ - リフシッツの場合

熱平衡状態にある物体では，その中のどの微小部分を取り出してもほかの部分と力学的つり合いの状態にある．すなわち，微小部分に働くすべての力の合力は 0 である．

物体に変形が加えられた場合，物体は釣り合いの状態に戻そうとする力が発生する．このような応力を内部応力という．

いま，物体に変形に伴う応力と，それと釣り合う内部応力が働いている場合を考える．この物体から任意の部分体積を選ぶ．そのとき，その部分体積に働く力の全体は，その中に含まれる微小体積に働く力 $\mathbf{F}\,\mathrm{d}V$ の積分で与えられる．すなわち，

$$\int \mathbf{F}\,\mathrm{d}V \tag{33}$$

である．この力は，この体積部分に含まれる微小体積の間の作用と反作用の力が合成されて最後に部分体積の表面に現れる．したがって，この表面に現れる力を合成した力が式 (33) である．ベクトル解析のガウスの定理により，体積成分は次のように表面積分と関係する．

$$\int_S \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = \int \mathrm{div}\,\mathbf{A}\,\mathrm{d}V \tag{34}$$

これから，$\mathbf{F}$ の各成分はベクトルの div の形をしていなければならない．すなわち，2 階のテンソルで，一つの添字は $\mathbf{F}$ の成分の座標であり，残った添字の座標について偏微分した値の和となたていなければならない.. すなわち，この 2 階のテンソルを σ_{ik} とすると，

$$F_i = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} \tag{35}$$

とならなければならない．したがって，

$$\int F_i\,\mathrm{d}V = \int \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}\,\mathrm{d}V = \int_S \sum_{k=1}^{3} \sigma_{ik}\,\mathrm{d}f_k = \int_S \boldsymbol{\sigma}_i\cdot\mathrm{d}\mathbf{f} \tag{2.2}$$

となる．ここで，$F_i = \sum_k \partial\sigma_{ik}/\partial x_k$ である．$\mathrm{d}\mathbf{f}$ は部分体積の微小表面積にそこに立つ法線単位ベクトルを掛けたものである．この力は，部分体積の表面に，その部分体積を囲む外側の部分から加えられる力である．一方，部分体積の内部では外側からの応力によって加えられた歪による内部応力が発生し，その力の全体は部分体積の表面において式 (2.2) と反対の符号をもつ．その結果，両方の力は釣り合い，合力は 0 になる．

この 2 階のテンソル σ_{ik} を応力テンソルとよぶ．本文冒頭に，応力テンソルを T_{ij} と記したが，ここでは，ランダウ - リフシッツにしたがって，σ_{ik} を用いた．圧電効果では慣例的に T_{ij} が用いられるが，それ以外では σ_{ik} を用いるのが一般的である．式 (2.2) の形からわかるように，σ_{ik} は x_k 方向に垂直な面の単位面積に働く力の i 成分である．x 軸に垂直な単位面積の表面を考えれば，σ_{xx} はこの面に垂直に働く力，σ_{yx} は y 軸方向に働く力，σ_{zx} は z 軸方向に働く力を意味する．特に，σ_{yx} は σ_{zx} 剪断応力とよばれる．

次に，この部分体積に働く力のモーメントを考える．部分体積の力のモーメント $\mathbf{M}$ は，微小体積のモーメントの総和であるから，

$$\mathbf{M} = \int \mathbf{r}\times\mathbf{F}\,\mathrm{d}V \tag{36}$$

である．成分で書くと，$\epsilon_{jik}=1$ として，

$$\begin{aligned}
M_j &= \int (F_i x_k - F_k x_i)\,\mathrm{d}V \\
&= \int \left(x_k \sum_l \frac{\partial \sigma_{il}}{\partial x_l} - x_i \sum_l \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial x_l} \right) \mathrm{d}V \\
&= \int \sum_l \frac{\partial}{\partial x_l} \left(x_k \sigma_{il} - x_i \sigma_{kl} \right) \mathrm{d}V + \int \sum_l \left(\sigma_{il} \frac{\partial x_k}{\partial x_l} - \sigma_{kl} \frac{\partial x_i}{\partial x_l} \right) \mathrm{d}V \\
&= \int \sum_l \frac{\partial}{\partial x_l} \left(x_k \sigma_{il} - x_i \sigma_{kl} \right) \mathrm{d}V + \int \sum_l \left(\sigma_{il} \delta_{k,l} - \sigma_{kl} \delta_{i,l} \right) \mathrm{d}V \\
&= \int \sum_l \frac{\partial}{\partial x_l} \left(x_k \sigma_{il} - x_i \sigma_{kl} \right) \mathrm{d}V + \int \left(\sigma_{ik} - \sigma_{ki} \right) \mathrm{d}V
\end{aligned} \tag{37}$$

となる．力のモーメントは部分物体の表面積分で表さなければならない．なぜなら，部分物体を囲む周囲の物体からの力のモーメントと部分物体内部からの内部応力のモーメントの釣り合いは表面のみでなされるからである．このことは，力のつり合いの場合と同じである．したがって，式 (**??**) が表面積分の形で表されるためには，第 2 項が任意の部分物体の表面で 0 でなければならない．これは

$$\sigma_{ik} = \sigma_{ki} \tag{38}$$

であることを意味する．すなわち，応力テンソルは対称でなければならない．

以上が，ランダウ - リフシッツによる応力テンソルの導出である．

(続く)

参考文献

[1] N. W. Ashcroft and N.. David Mermin, Solid State Physics, Harcourt College Publishers (1976).

[2] エリ・デ・ランダウ, イェ・エム・リフシッツ,「ランダウ - リフシッツ理論物理学教程　弾性理論」東京図書 (1972).