圧電効果と圧電基本式　その2

2023.1.19　　鈴木　実

3　弾性率と弾性コンプライアンス

歪と応力が十分小さい範囲において，前節の歪テンソルと応力テンソルの間には線形関係式が成り立つ．歪テンソル ϵ_{ij} と応力テンソル σ_{ij} は 2 階のテンソルであるので，それぞれのテンソルは次のように 4 階のテンソルで結ばれる．

$$\sigma_{ij} = \sum_{kl} c_{ijkl}\epsilon_{kl} \tag{39}$$

$$\epsilon_{ij} = \sum_{kl} s_{ijkl}\sigma_{kl} \tag{40}$$

ここで，c_{ijkl} は弾性率 (elastic modulus または elastic stiffness) といい，s_{ijkl} を弾性コンプライアンス (elastic compliance) という．

式 (22.78) の下で述べたように，c_{ijkl} は，i と j，k と l の交換に関して不変であり，(i,j) と (k,l) の交換に関して不変である．これから，2 重の添字 $(1,1)$，$(2,2)$，$(3,3)$，$(2,3)$，$(3,1)$，$(1,2)$ を単独の添字 $1,2,\cdots,6$ に置き換えることにより，すなわち，

$$\begin{array}{cccccc} (1,1) & (2,2) & (3,3) & (2,3) & (3,1) & (1,2) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array}$$

のように置き換えることにより，4 階のテンソルは 6 次の対称行列に表現することができる[*1]．このとき，c_{ijkl} のテンソル成分において独立な成分の数は 81 から 21 まで減少する．一方，歪テンソルと応力テンソルにおいても i と j，k と l の交換に関して不変であることから，c_{ijkl} と同様に，2 重の添え字を単独の添字によるベクトルに変換できる．応力テンソルについても同様である．したがって，式 (39)，(40) は

$$\sigma_i = \sum_j c_{ij}\epsilon_j \tag{41}$$

$$\epsilon_i = \sum_j s_{ij}\sigma_j \tag{42}$$

となる，と一見思われるかもしれない．しかし，式 (39)，(40) と式 (41)，(42) の右辺の項の間には 1 対 1 対応が成立せず，式 (39)，(40) には重複があるので，そのまま式 (41)，(42) にはならない．すなわち，$k \neq l$ のとき，$c_{ijkl} = c_{ijlk}$ および $\epsilon_{kl} = \epsilon_{lk}$ であるから，式 (39) の右辺には

$$c_{ijkl}\epsilon_{kl} + c_{ijlk}\epsilon_{lk} = 2c_{ijkl}\epsilon_{kl} \tag{43}$$

のように係数 2 が含まれ，式 (41) には含まれていない．これを式 (41) のような形にするには，(k,l) が単独添字の j とすると，

$$2\epsilon_{kl} = \epsilon_j \tag{44}$$

とすればよいことがわかる．

$k = l$ のときには，

$$\epsilon_{kk} = \epsilon_k \tag{45}$$

[*1] 添字の 4, 5, 6 は，(1, 2, 3) から順に 1, 2, 3 が欠けていると憶えればよい．

とすればよい．すなわち，ϵ_{ij} と ϵ_i $(i = 1, \cdots, 6)$ の関係を，

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \epsilon_1 & \frac{1}{2}\epsilon_6 & \frac{1}{2}\epsilon_5 \\ \frac{1}{2}\epsilon_6 & \epsilon_2 & \frac{1}{2}\epsilon_4 \\ \frac{1}{2}\epsilon_5 & \frac{1}{2}\epsilon_4 & \epsilon_2 \end{pmatrix} \tag{46}$$

としなければならない．

一方，式 (39) から式 (41) への添字の変換に関して，σ_{ij} と c_{ijkl} には変更の必要がない．したがって，σ_{ij} と c_{ijkl} を行列表記にしたときの添字は以下のようになる．

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \sigma_1 & \sigma_6 & \sigma_5 \\ \sigma_6 & \sigma_2 & \sigma_4 \\ \sigma_5 & \sigma_4 & \sigma_2 \end{pmatrix} \tag{47}$$

$$\begin{pmatrix} c_{1111} & c_{1122} & c_{1133} & c_{1123} & c_{1131} & c_{1112} \\ c_{2211} & c_{2222} & c_{2233} & c_{2223} & c_{2231} & c_{2212} \\ c_{3311} & c_{3322} & c_{3333} & c_{3323} & c_{3331} & c_{3312} \\ c_{2311} & c_{2322} & c_{2333} & c_{2323} & c_{2331} & c_{2312} \\ c_{3111} & c_{3122} & c_{3133} & c_{3123} & c_{3131} & c_{3112} \\ c_{1211} & c_{1222} & c_{1233} & c_{1223} & c_{1231} & c_{1212} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} & c_{56} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66} \end{pmatrix} \tag{48}$$

次に，弾性コンプライアンス s_{ijkl} に関して，式 (42) を見ると，応力テンソルと歪テンソルは，式 (47) と式 (48) によりすでに固定されているので，4 階のテンソルから 2 階のテンソルへの変換における係数の変更は s_{ijkl} に限られる．s_{ijkl} から s_{ij} への変換は，式 (40) と式 (42) の関係から決まる．$k \neq l$ のとき，式 (40) の右辺には，

$$s_{ijkl}\sigma_{kl} + s_{ijlk}\sigma_{lk} = 2s_{ijkl}\sigma_{kl} \tag{49}$$

が含まれる．一方，左辺は，$i \neq j$ のとき，$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}\epsilon_i$ であるから，式 (42) の形にするには，

$$4s_{ijkl} = s_{ij} \tag{50}$$

でなければならないことがわかる．$i = j$ のときは，$\epsilon_{ii} = \epsilon_i$ であるから，式 (42) の形になるには，

$$2s_{ijkl} = s_{ij} \tag{51}$$

でなけらばならない．以上の行列はすべて対称行列である．

次に，$k = l$ のとき，$i \neq j$ ならば，式 (40) の右辺は，

$$\sum_k s_{ijkk}\sigma_{kk} \tag{52}$$

であり，左辺は $\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}\epsilon_i$ であるから，式 (42) の形にするには，

$$2s_{ijkk} = s_{ik} \tag{53}$$

でなければならない．

$i = j$ ならば，式 (40) の左辺は $\epsilon_{ii} = i\epsilon_i$ であるから，

$$s_{iikk} = s_{ik} \tag{54}$$

とすればよい．

まとめると，

$$s_{ijkl} = \frac{1}{4}s_{pq} \qquad (i \neq j \text{ かつ } k \neq l \text{ のとき，すなわち，} p, q \in \{4,5,6\}) \tag{55}$$

$$s_{ijkl} = \frac{1}{2}s_{iq} \qquad (i = j \text{ かつ } k \neq l \text{ のとき，すなわち，} i \in \{1,2,3\},\ q \in \{4,5,6\}) \tag{56}$$

$$s_{ijkl} = \frac{1}{2}s_{pk} \qquad (i \neq j \text{ かつ } k = l \text{ のとき，すなわち，} p \in \{4,5,6\},\ k \in \{1,2,3\}) \tag{57}$$

$$s_{ijkl} = s_{ik} \qquad (i = j \text{ かつ } k = l \text{ のとき，すなわち，} i, k \in \{1,2,3\}) \tag{58}$$

である．すべて表示すると，

$$\begin{pmatrix} s_{1111} & s_{1122} & s_{1133} & s_{1123} & s_{1131} & s_{1112} \\ s_{2211} & s_{2222} & s_{2233} & s_{2223} & s_{2231} & s_{2212} \\ s_{3311} & s_{3322} & s_{3333} & s_{3323} & s_{3331} & s_{3312} \\ s_{2311} & s_{2322} & s_{2333} & s_{2323} & s_{2331} & s_{2312} \\ s_{3111} & s_{3122} & s_{3133} & s_{3123} & s_{3131} & s_{3112} \\ s_{1211} & s_{1222} & s_{1233} & s_{1223} & s_{1231} & s_{1212} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & \frac{1}{2}s_{14} & \frac{1}{2}s_{15} & \frac{1}{2}s_{16} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} & \frac{1}{2}s_{24} & \frac{1}{2}s_{25} & \frac{1}{2}s_{26} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} & \frac{1}{2}s_{34} & \frac{1}{2}s_{35} & \frac{1}{2}s_{36} \\ \frac{1}{2}s_{41} & \frac{1}{2}s_{42} & \frac{1}{2}s_{43} & \frac{1}{4}s_{44} & \frac{1}{4}s_{45} & \frac{1}{4}s_{46} \\ \frac{1}{2}s_{51} & \frac{1}{2}s_{52} & \frac{1}{2}s_{53} & \frac{1}{4}s_{54} & \frac{1}{4}s_{55} & \frac{1}{4}s_{56} \\ \frac{1}{2}s_{61} & \frac{1}{2}s_{62} & \frac{1}{2}s_{63} & \frac{1}{4}s_{64} & \frac{1}{4}s_{65} & \frac{1}{4}s_{66} \end{pmatrix} \tag{59}$$

となる．

4 結晶の対称性と弾性率テンソルおよび弾性コンプライアンステンソルの独立な成分

結晶の対称性により，弾性率テンソル c_{ijkl} と弾性コンプライアンス s_{ijkl} のテンソル成分は 0 になるか，あるいは他の成分と等しくなる場合がある．結晶の対称性を 32 の点群で分類した場合，それぞれの点群によりこのような成分間の関係は一般に異なる．以下では結晶の対称性とこれら二つのテンソルの成分間の関係を示す．このような関係性は，対称変換を表す座標変換を用いて得られるので，弾性率テンソルと弾性コンプライアンステンソルで同一である．したがって，ここでは弾性率テンソルについて述べる．結晶点群の表記は国際表記を用いる．

4.1 対称操作と座標変換

結晶のもつ対称性を満足する対称変換と等価な座標変換を施した場合，結晶は不変であるから，新しい座標系におけるテンソルは元の座標系の表示によるテンソルから変わらない．このような関係を利用することにより，結晶の対称性によるテンソルの独立な成分を求めることができる．

変換前の直交座標系における基底ベクトルを $\mathbf{e}_1$，$\mathbf{e}_2$，$\mathbf{e}_3$ とする．変換後の座標系の基底ベクトルを $\mathbf{e}'_1$，$\mathbf{e}'_2$，$\mathbf{e}'_3$ で表す．本来なら，ここで反変と共変の区別をすべきところであるが，ここでは同一単位長のデカルト座標系を扱っているので区別する必要がない．そうすると，元の座標系における歪テンソルを ϵ_{ij}，応力テンソルを σ_{ij}，変換後の座標系における歪テンソルを ϵ'_{ij}，応力テンソルを σ'_{ij} とする．変換後の基底ベクトルが次のように表されるとき，

$$\mathbf{e}'_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}\mathbf{e}_j \tag{60}$$

a_{ij} は $\mathbf{e}'_i$ の $\mathbf{e}_j$ $(j = 1,2,3)$ への射影である．すなわち，$\mathbf{e}'_i$ と $\mathbf{e}_j$ の方向余弦である．これは，二つの座標系の間の変換行列であり，直交行列になる．この変換行列を用いると，座標変換後の歪テンソルおよび応力テンソ

ルは次のように表される[*2].

$$\sigma'_{ij} = \sum_{\alpha,\beta} a_{i\alpha} a_{j\beta} \sigma_{\alpha\beta} \tag{61}$$

$$\epsilon'_{kl} = \sum_{\gamma,\delta} a_{k\gamma} a_{l\delta} \epsilon_{\gamma\delta} \tag{62}$$

変換前後のそれぞれの座標系における弾性率テンソルを用いると，それぞれの歪テンソルと応力テンソルの間には同じ式が成り立つから

$$\sigma_{ij} = \sum_{k,l} c_{ijkl} \epsilon_{kl} \tag{63}$$

$$\sigma'_{ij} = \sum_{k,l} c'_{ijkl} \epsilon'_{kl} \tag{64}$$

が成り立つ．式 (63) を式 (61) に代入し，式 (62) を式 (64) に代入すると，

$$\sigma'_{ij} = \sum_{\alpha,\beta} a_{i\alpha} a_{j\beta} \sum_{k,l} c_{\alpha\beta kl} \epsilon_{kl} \tag{65}$$

$$\sigma'_{ij} = \sum_{k,l} c'_{ijkl} \sum_{\gamma,\delta} a_{k\gamma} a_{l\delta} \epsilon_{\gamma\delta} \tag{66}$$

となる．この二つの式は等しい．すなわち，

$$\sum_{\alpha,\beta} a_{i\alpha} a_{j\beta} \sum_{k,l} c_{\alpha\beta kl} \epsilon_{kl} = \sum_{k,l} c'_{ijkl} \sum_{\gamma,\delta} a_{k\gamma} a_{l\delta} \epsilon_{\gamma\delta} \tag{67}$$

である．そのとき，左辺はすべての ϵ_{kl} を含み，右辺も同様である．両辺で一致する ϵ_{kl} を ϵ_{pq} としよう．すなわち，式 (65) で $k = p$ および $l = q$ の項が該当し，式 (66) で $\gamma = p$ および $\delta = q$ の項が該当する．ϵ_{pq} は任意の値を持つことができるので，両辺の係数は等しい．したがって，

$$\sum_{\alpha,\beta} a_{i\alpha} a_{j\beta} c_{\alpha\beta pq} = \sum_{k,l} c'_{ijkl} a_{kp} a_{lq} \tag{68}$$

[*2] これはテンソルの基本的性質であって，以下のようにして示すことができる．まず，座標系の回転では $\mathbf{u}' = \mathbf{u}$，$\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma}$，$\mathbf{x}' = \mathbf{x}$ であるから，

$$\sigma'_1 \mathbf{e}'_1 + \sigma'_2 \mathbf{e}'_2 + \sigma'_3 \mathbf{e}'_3 = \sigma_1 \mathbf{e}_1 + \sigma_2 \mathbf{e}_2 + \sigma_3 \mathbf{e}_3$$
$$u'_1 \mathbf{e}'_1 + u'_2 \mathbf{e}'_2 + u'_3 \mathbf{e}'_3 = u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + u_3 \mathbf{e}_3$$
$$x'_1 \mathbf{e}'_1 + x'_2 \mathbf{e}'_2 + x'_3 \mathbf{e}'_3 = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3$$

となる．これに $\mathbf{e}'_i$ をかけ，$a_{ij} = \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}_j$ に注意すると，$\sigma'_i = \sum_k a_{ik}\sigma_k$，$u'_i = \sum_k a_{ik} u_k$，$x'_i = \sum_k a_{ik} x_k$ となる．さらに，$\partial x'_i / \partial x_k = a_{ik}$ である．これから，

$$\sigma'_{ij} = \frac{\partial \sigma'_i}{\partial x'_j} = \frac{\partial}{\partial x'_j}\left(\sum_k a_{ik}\sigma_k\right) = \sum_l \frac{\partial}{\partial x_l}\left(\sum_k a_{ik}\sigma_k\right)\frac{\partial x_l}{\partial x'_j} = \sum_{k,l} a_{ik} a_{jl} \frac{\partial \sigma_k}{\partial x_l} = \sum_{kl} a_{ik} a_{jl} \sigma_{kl}$$

となる．したがって，

$$\sigma'_{ij} = \sum_{kl} a_{ik} a_{jl} \sigma_{kl}$$

である．

歪テンソルに関してもほぼ同様に，

$$\frac{\partial u'_i}{\partial x'_j} = \frac{\partial}{\partial x'_j}\left(\sum_k a_{ik} u_k\right) = \sum_l \frac{\partial}{\partial x_l}\left(\sum_k a_{ik} u_k\right)\frac{\partial x_l}{\partial x'_j} = \sum_{k,l} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} a_{ik} a_{jl}$$

である．したがって，

$$\epsilon'_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u'_i}{\partial x'_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x'_i}\right) = \sum_{k,l} a_{ik} a_{jl} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right) = \sum_{k,l} a_{ik} a_{jl} \epsilon_{kl}$$

となる．

となる．この式の両辺に $a_{mp}a_{nq}$ を掛けて p,q で総和をとると，変換行列 (a_{ij}) は直交行列であるから，$\sum_p a_{mp}a_{kp} = \delta_{m,k}$，$\sum_p a_{np}a_{lp} = \delta_{n,l}$ になることに注意すると，

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha,\beta,p,q} a_{i\alpha}a_{j\beta}a_{mp}a_{nq}c_{\alpha\beta pq} &= \sum_{k,l,p,q} c'_{ijkl}a_{kp}a_{lq}a_{mp}a_{nq} \\ &= \sum_{k,l} c'_{ijkl}\delta_{k,m}\delta_{l,n} \\ &= c'_{ijmn} \end{aligned} \tag{69}$$

となる．すなわち，

$$c'_{ijmn} = \sum_{\alpha,\beta,p,q} a_{i\alpha}a_{j\beta}a_{mp}a_{nq}c_{\alpha\beta pq}$$

となる．ここで，添字を $m \to k$，$n \to l$，$p \to \gamma$，$q \to \delta$ と書き換えて整えると，

$$c'_{ijkl} = \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} a_{i\alpha}a_{j\beta}a_{k\gamma}a_{l\delta}c_{\alpha\beta\gamma\delta} \tag{70}$$

という関係式が得られる．この関係式はテンソルの基本的な性質を表している．これにより，新しい座標系の弾性率テンソル成分はもとの座標系の弾性率テンソル成分の線形結合によって表されることがわかる．ある対称性をもつ結晶の場合，その対称性の座標変換を表す変換行列を座標軸の間の方向余弦を用いて表し，それと式 (70) を用いて弾性率テンソル成分の間の連立方程式を作ることができる．対称操作であるから，新しい座標系の c'_{ijkl} は c_{ijkl} である．したがって，テンソル成分 c_{ijkl} に関する連立方程式が得られる．これを解くことにより，弾性率テンソルのその結晶の対称性における独立な成分が決定される．具体的な結晶の対称性の場合テンソル成分の関係を導く計算は付録に示した．

4.2 弾性率テンソルおよび弾性コンプライアンステンソルの行列表示

第 3 節に述べたように，2 重の添字を単一の添字にすることにより，弾性率および弾性コンプライアンスの対称 4 階のテンソルを行列で表示することができる．この表示の仕方は，行列表記，あるいはボイト (Voigt) 表記または工学表記などとよばれる．これにより，歪テンソルと応力テンソルは 6 次元ベクトルのように表記され，弾性率と弾性コンプライアンスの 6 次正方行列表示を共に用いることにより定数の表記ならびに計算が簡単になる．

ただし，4 階のテンソル表記のときには，弾性率テンソルと弾性コンプライアンステンソルは式 (48) と同じ関係で，1 対 1 かつ同一に対応していたのに対し，行列表示では，弾性コンプライアンスの行列成分は式 (59) に表されるように，もとのテンソル成分とは同一ではなくなり，1 と異なる因子をもつことになる．そのため，結晶の対称性を考慮して得られる行列の独立成分も，行列表記の場合には弾性率と弾性コンプライアンスの場合に相違が生じ，係数が異なる成分が生じるので注意を要する．

（続く）

参考文献

[1] N. W. Ashcroft and N.. David Mermin, Solid State Physics, Harcourt College Publishers (1976).

[2] J. F. Nye, “Physical Properties of Crystals”, Oxford at the Clarendon Press, 1957.

[3] 小川智哉, 「電気・機械結合現象」, 岡田利弘責任編集「実験物理学講座 10 電気物性」（共立出版）(1977).

[4] 田中哲郎,「近代固体電子工学」, 近代電子工学第講座 3 （電気書院）(1970).

付録

A　結晶の対称性と弾性率テンソルの独立成分

x_1, x_2, x_3 軸は x, y, z 軸と考える．また，特に断らないかぎり，a 軸，b 軸，c 軸はそれぞれ x 軸，y 軸，z 軸に平行とする．

A.1　三斜晶系（1，$\bar{1}$）

1 と $\bar{1}$ の場合の変換行列は，それぞれ，

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{71}$$

である．したがって，式 (70) は両方の場合とも，

$$c'_{ijkl} = a_{ii}a_{jj}a_{kk}a_{ll}c_{ijkl} = c_{ijkl} \tag{72}$$

となり，単なる自明の恒等式が得られるのみで新しい関係は得られない．したがって，三斜晶系における弾性率テンソルの独立な成分は 21 個のまま変わらない．

A.2　単斜晶系（2，$2/m$，m）

A.2.1　m，$m \perp x_3$ の場合

鏡映面が $x_3 = 0$ のとき，変換行列は，

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{73}$$

となる．a_{33} のみ -1 で，他の a_{11} と a_{22} は 1 であるから，式 (**??**) から，d_{ijk} の ijk のうち，3 の個数が奇数のときに $d_{ijk} = -d_{ijk}$ となり，$d_{ijk} = 0$ となる．0 となる d_{ijk} は，

3 が 1 個のとき，

$$d_{113},\ d_{131},\ d_{132},\ d_{213},\ d_{231},\ d_{311},\ d_{312},\ d_{321},\ d_{322},\ d_{123},$$
$$d_{333},$$

これを行列で示すと次のようになる．

$$\begin{pmatrix} d_{111} & d_{122} & d_{133} & 0 & 0 & d_{112} \\ d_{211} & d_{222} & d_{233} & 0 & 0 & d_{212} \\ 0 & 0 & 0 & d_{323} & d_{313} & 0 \end{pmatrix} \tag{74}$$

これらの 9 個の成分の間には関係がなく独立である．

$$c_{ijkl} = a_{ii}a_{jj}a_{kk}a_{ll}c_{ijkl} \tag{75}$$

となるから，i, j, k, l のうち 3 が奇数個の場合に $c_{ijkl} = -c_{ijkl}$ となるので，$c_{ijkl} = 0$ となる．したがって，0 でない c_{ijkl} 成分は次の 12 項である．

$$c_{1111}, c_{2222}, c_{3333}, c_{1122}, c_{1133}, c_{2233}, c_{2323}, c_{3131}, c_{1212}, c_{1112}, c_{2212}, c_{3312}, c_{2331},$$

A.2.2　2 ($\|x_3$) の場合

2 回対称軸が x_3 軸のとき，座標変換行列は，

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{76}$$

となる．上の場合と同じように，これから，a_{ij} は対角線上にあり，c_{ijkl} の添字は変わらず，符号のみが変わることがわかる．符号は，i, j, k, l のうち，1 と 2 の数の和が奇数の場合に負号になる．このことは，3 の数が奇数の場合と同じである．すなわち，4.3.1 節の $m \perp x_3$ の場合と同じであるから，結果は式 (74) と同じである．

A.2.3　m, $m \perp x_2$ の場合

鏡映面が $x_2 = 0$ のとき，変換行列は，

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{77}$$

となる．上の場合と同様に，式 (70) から，

$$c_{ijkl} = a_{ii}a_{jj}a_{kk}a_{ll}c_{ijkl} \tag{78}$$

となるから，i, j, k, l のうち 2 が奇数個の場合は，$c_{ijkl} = -c_{ijkl}$ となるので，$c_{ijkl} = 0$ となる．したがって，0 でない c_{ijkl} 成分は次の 12 項である．

$$c_{1111}, c_{2222}, c_{3333}, c_{1122}, c_{1133}, c_{2233}, c_{2323}, c_{3131}, c_{1212}, c_{1113}, c_{2213}, c_{3313}, c_{3331},$$

これらの項の間には関係がなく独立である．行列で示すと次のようになる．

$$\begin{pmatrix} c_{1111} & c_{1122} & c_{1133} & 0 & c_{1113} & 0 \\ & c_{2222} & c_{2233} & 0 & c_{2213} & 0 \\ & & c_{3333} & 0 & c_{3313} & 0 \\ & & & c_{2323} & 0 & c_{2312} \\ & & & & c_{3131} & 0 \\ & & & & & c_{1212} \end{pmatrix} \tag{79}$$

A.2.4　2 ($\|x_2$) の場合

2 回対称軸が x_2 軸のとき，変換行列は，

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{80}$$

となる．上の場合と同じように，これから，a_{ij} は対角線上にあり，c_{ijkl} の添字は変わらず，符号のみが変わることがわかる．符号は，i,j,k,l のうち，1 と 3 の数の和が奇数の場合に負号になる．このことは，2 の数が奇数の場合と同じである．すなわち，A.2.3 節の $m \perp x_2$ の場合と同じであるから，結果は式 (79) と同じである．

A.2.5　$2/m$ $(2\|x_3, m \perp x_3)$ の場合

この場合は x_3 軸に関する 2 回対称に加えて $x_3 = 0$ 面に関する鏡映対称である．前者は A.2.2 節と同じで，後者は A.2.1 節と同じであるから，式 (74) に新しく追加する関係はない．

A.3　六方晶系（6，$\bar{6}$，$6/m$，622，$6mm$，$\bar{6}m2$，$6/mmm$）

6 回対称軸を x_3 軸に，a 軸を x_1 軸にとる．

A.3.1　6 の場合

そのとき，6 回対称操作を表す座標変換の行列 (a_{ij}) は，$\pi/3$ 回転した座標軸と元の座標軸の間の方向余弦を成分として，

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & \cos(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}) & \cos\frac{\pi}{2} \\ \cos(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}) & \cos\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{2} \\ \cos\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} & \cos 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{81}$$

となる．これから，c_{ijkl} の i,j,k,l のうち，3 の個数は変わらないので，3 の個数の場合に分けて計算する．

(1) i,j,k,l のうち，3 が 0 個の場合，式 (70) により，

$$\begin{aligned} c_{1111} =& a_{11}a_{11}a_{11}a_{11}c_{1111} + a_{11}a_{11}a_{11}a_{12}c_{1112} + a_{11}a_{11}a_{12}a_{11}c_{1121} + a_{11}a_{11}a_{12}a_{12}c_{1122} \\ &+ a_{11}a_{12}a_{11}a_{11}c_{1211} + a_{11}a_{12}a_{11}a_{12}c_{1212} + a_{11}a_{12}a_{12}a_{11}c_{1221} + a_{11}a_{12}a_{12}a_{12}c_{1222} \\ &+ a_{12}a_{11}a_{11}a_{11}c_{2111} + a_{12}a_{11}a_{11}a_{12}c_{2112} + a_{12}a_{11}a_{21}a_{11}c_{2121} + a_{12}a_{11}a_{12}a_{12}c_{2122} \\ &+ a_{12}a_{12}a_{11}a_{11}c_{2211} + a_{12}a_{12}a_{11}a_{12}c_{2212} + a_{12}a_{12}a_{12}a_{11}c_{2221} + a_{12}a_{12}a_{12}a_{12}c_{2222} \quad (82) \\ =& \tfrac{1}{16}c_{1111} + \tfrac{\sqrt{3}}{16}c_{1112} + \tfrac{\sqrt{3}}{16}c_{1121} + \tfrac{3}{16}c_{1122} + \tfrac{\sqrt{3}}{16}c_{1211} + \tfrac{3}{16}c_{1212} + \tfrac{\sqrt{3}}{16}c_{1221} + \tfrac{3\sqrt{3}}{16}c_{1222} \\ &+ \tfrac{\sqrt{3}}{16}c_{2111} + \tfrac{3}{16}c_{2112} + \tfrac{3}{16}c_{2121} + \tfrac{3\sqrt{3}}{16}c_{2122} + \tfrac{3}{16}c_{2211} + \tfrac{3\sqrt{3}}{16}c_{2212} + \tfrac{3\sqrt{3}}{16}c_{2221} + \tfrac{9}{16}c_{2222} \quad (83) \\ =& \tfrac{1}{16}c_{1111} + \tfrac{4\sqrt{3}}{16}c_{1112} + \tfrac{6}{16}c_{1122} + \tfrac{12}{16}c_{1212} + \tfrac{12\sqrt{3}}{16}c_{1222} + \tfrac{9}{16}c_{2222} \quad (84) \end{aligned}$$

という方程式が得られる．c_{1112}，c_{1122}，c_{1212}，c_{1222}，c_{2222} についても同様にして，

$$c_{1112} = \tfrac{\sqrt{3}}{16}c_{1111} - \tfrac{8}{16}c_{1112} - \tfrac{2\sqrt{3}}{16}c_{1122} - \tfrac{4\sqrt{3}}{16}c_{1212} + \tfrac{0}{16}c_{1222} + \tfrac{3\sqrt{3}}{16}c_{2222} \tag{85}$$

$$c_{1122} = \tfrac{3}{16}c_{1111} + \tfrac{4\sqrt{3}}{16}c_{1112} + \tfrac{10}{16}c_{1122} - \tfrac{12}{16}c_{1212} - \tfrac{4\sqrt{3}}{16}c_{1222} + \tfrac{3}{16}c_{2222} \tag{86}$$

$$c_{1212} = \tfrac{3}{16}c_{1111} + \tfrac{4\sqrt{3}}{16}c_{1112} - \tfrac{6}{16}c_{1122} + \tfrac{4}{16}c_{1212} - \tfrac{4\sqrt{3}}{16}c_{1222} + \tfrac{3}{16}c_{2222} \tag{87}$$

$$c_{1222} = -\tfrac{3\sqrt{3}}{16}c_{1111} + \tfrac{0}{16}c_{1112} + \tfrac{2\sqrt{3}}{16}c_{1122} + \tfrac{4\sqrt{3}}{16}c_{1212} - \tfrac{24}{16}c_{1222} + \tfrac{\sqrt{3}}{16}c_{2222} \tag{88}$$

$$c_{2222} = \tfrac{9}{16}c_{1111} - \tfrac{12\sqrt{3}}{16}c_{1112} + \tfrac{6}{16}c_{1122} + \tfrac{12}{16}c_{1212} - \tfrac{4\sqrt{3}}{16}c_{1222} + \tfrac{1}{16}c_{2222} \tag{89}$$

を得る．式 (84)〜(89) を 16 倍して整理すると，

$$\begin{pmatrix} -15 & 4\sqrt{3} & 6 & 12 & 12\sqrt{3} & 9 \\ -\sqrt{3} & -24 & -2\sqrt{3} & -4\sqrt{3} & 0 & 3\sqrt{3} \\ 3 & 4\sqrt{3} & -6 & -12 & -4\sqrt{3} & 3 \\ 3 & 4\sqrt{3} & -6 & -12 & -4\sqrt{3} & 3 \\ -3\sqrt{3} & 0 & 2\sqrt{3} & 4\sqrt{3} & -24 & \sqrt{3} \\ 9 & -12\sqrt{3} & 6 & 12 & -4\sqrt{3} & -15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{1111} \\ c_{1112} \\ c_{1122} \\ c_{1212} \\ c_{1222} \\ c_{2222} \end{pmatrix} = 0 \tag{90}$$

となる．第 4 列の共通因子 2 を c_{1212} に移動し，第 5 列と c_{1222} に -1 をかけても同じであるから，

$$\begin{pmatrix} -15 & 4\sqrt{3} & 6 & 6 & -12\sqrt{3} & 9 \\ -\sqrt{3} & -24 & -2\sqrt{3} & -2\sqrt{3} & 0 & 3\sqrt{3} \\ 3 & 4\sqrt{3} & -6 & -6 & 4\sqrt{3} & 3 \\ 3 & 4\sqrt{3} & -6 & -6 & 4\sqrt{3} & 3 \\ -3\sqrt{3} & 0 & 2\sqrt{3} & 2\sqrt{3} & 24 & \sqrt{3} \\ 9 & -12\sqrt{3} & 6 & 6 & 4\sqrt{3} & -15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{1111} \\ c_{1112} \\ c_{1122} \\ 2c_{1212} \\ -c_{1222} \\ c_{2222} \end{pmatrix} = 0 \tag{91}$$

である．この式の左辺の行列を見ると，c_{1111} と c_{2222} 交換し，c_{1112} と $-c_{1212}$ 交換してもこの連立方程式は変わらない．つまり，第 1 式は第 6 式になり，第 2 式は第 5 式になる．第 3 式と第 4 式は変わらない．したがって，

$$\begin{pmatrix} -15 & 4\sqrt{3} & 6 & 6 & -12\sqrt{3} & 9 \\ -\sqrt{3} & -24 & -2\sqrt{3} & -2\sqrt{3} & 0 & 3\sqrt{3} \\ 3 & 4\sqrt{3} & -6 & -6 & 4\sqrt{3} & 3 \\ 3 & 4\sqrt{3} & -6 & -6 & 4\sqrt{3} & 3 \\ -3\sqrt{3} & 0 & 2\sqrt{3} & 2\sqrt{3} & 24 & \sqrt{3} \\ 9 & -12\sqrt{3} & 6 & 6 & 4\sqrt{3} & -15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{2222} \\ -c_{1222} \\ c_{1122} \\ 2c_{1212} \\ c_{1112} \\ c_{1111} \end{pmatrix} = 0 \tag{92}$$

となる．式 (91) から式 (92) を引くと，

$$\begin{pmatrix} -15 & 4\sqrt{3} & 6 & 6 & -12\sqrt{3} & 9 \\ -\sqrt{3} & -24 & -2\sqrt{3} & -2\sqrt{3} & 0 & 3\sqrt{3} \\ 3 & 4\sqrt{3} & -6 & -6 & 4\sqrt{3} & 3 \\ 3 & 4\sqrt{3} & -6 & -6 & 4\sqrt{3} & 3 \\ -3\sqrt{3} & 0 & 2\sqrt{3} & 2\sqrt{3} & 24 & \sqrt{3} \\ 9 & -12\sqrt{3} & 6 & 6 & 4\sqrt{3} & -15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{1111} - c_{2222} \\ c_{1112} + c_{1222} \\ 0 \\ 0 \\ -c_{1222} - c_{1112} \\ c_{2222} - c_{1111} \end{pmatrix} = 0 \tag{93}$$

となる．これから，第 3 項と第 4 項は消える．また第 1 項と第 6 項，第 2 項と第 5 項は同類項であるからこれをまとめると，つまり行列の第 1 列から第 6 列を引き，第 2 列から第 5 列を引くと，

$$\begin{pmatrix} -24 & 16\sqrt{3} \\ -4\sqrt{3} & -24 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -4\sqrt{3} & 24 \\ -24 & -16\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{1111} - c_{2222} \\ c_{1112} + c_{1222} \end{pmatrix} = 0 \tag{94}$$

重複した式を除くと結局，

$$\begin{pmatrix} -24 & 16\sqrt{3} \\ -4\sqrt{3} & -24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{1111} - c_{2222} \\ c_{1112} + c_{1222} \end{pmatrix} = 0 \tag{95}$$

となる．左辺の係数である行列式は明らかに 0 ではないから，

$$c_{1111} - c_{2222} = 0 \tag{96}$$

$$c_{1112} + c_{1222} = 0 \tag{97}$$

が成り立つ．式 (96) の c_{2222} と式 (97) の c_{1222} を式 (92) に代入し，第 1 列と第 6 列を加え，第 2 列と第 5 列を加えて同類項をまとめ，等価な式を取り除くと，

$$\begin{pmatrix} -6 & -8\sqrt{3} & 6 & 6 \\ 2\sqrt{3} & -24 & -2\sqrt{3} & -2\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{1111} \\ c_{1112} \\ c_{1122} \\ 2c_{1212} \end{pmatrix} = 0 \tag{98}$$

となる．同じ係数の項をまとめると，

$$\begin{pmatrix} -6 & -8\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & -24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{1111} - c_{1122} - 2c_{1212} \\ c_{1112} \end{pmatrix} = 0 \tag{99}$$

となる．これから，

$$c_{1111} - c_{1122} = 2c_{1212} \tag{100}$$

$$c_{1112} = 0 \tag{101}$$

が得られる．

(2) i, j, k, l のうち，3 が 1 個の場合を考えよう．式 (70) により，

$$\begin{aligned} c_{1113} =& a_{11}a_{11}a_{11}a_{13}c_{1113} + a_{11}a_{1}a_{12}a_{13}c_{1123} + a_{11}a_{12}a_{11}a_{13}c_{1213} + a_{11}a_{12}a_{12}a_{13}c_{1223} \\ & + a_{12}a_{11}a_{11}a_{13}c_{2113} + a_{12}a_{11}a_{12}a_{13}c_{2123} + a_{12}a_{12}a_{11}a_{13}c_{2213} + a_{12}a_{12}a_{12}a_{13}c_{2223} \qquad (102) \\ =& \tfrac{1}{8}c_{1113} + \tfrac{\sqrt{3}}{8}c_{1123} + \tfrac{\sqrt{3}}{8}c_{1213} + \tfrac{3}{8}c_{1223} + \tfrac{\sqrt{3}}{8}c_{2113} + \tfrac{3}{8}c_{2123} + \tfrac{3}{8}c_{2213} + \tfrac{3\sqrt{3}}{8}c_{2223} \qquad (103) \\ =& \tfrac{1}{8}c_{1113} + \tfrac{\sqrt{3}}{8}c_{1123} + \tfrac{2\sqrt{3}}{8}c_{1213} + \tfrac{6}{8}c_{1223} + \tfrac{3}{8}c_{2213} + \tfrac{3\sqrt{3}}{8}c_{2223} \qquad (104) \end{aligned}$$

という方程式が得られる．c_{1123}，c_{1213}，c_{1223}，c_{2213}，c_{2223} についても同様にして，

$$c_{1123} = -\tfrac{\sqrt{3}}{8}c_{1113} + \tfrac{1}{8}c_{1123} - \tfrac{6}{8}c_{1213} + \tfrac{2\sqrt{3}}{8}c_{1223} - \tfrac{3\sqrt{3}}{8}c_{2213} + \tfrac{3}{8}c_{2223} \tag{105}$$

$$c_{1213} = -\tfrac{\sqrt{3}}{8}c_{1113} - \tfrac{3}{8}c_{1123} - \tfrac{2}{8}c_{1213} - \tfrac{2\sqrt{3}}{8}c_{1223} + \tfrac{\sqrt{3}}{8}c_{2213} + \tfrac{3}{8}c_{2223} \tag{106}$$

$$c_{1223} = \tfrac{3}{8}c_{1113} - \tfrac{\sqrt{3}}{8}c_{1123} + \tfrac{2\sqrt{3}}{8}c_{1213} - \tfrac{2}{8}c_{1223} - \tfrac{3}{8}c_{2213} + \tfrac{\sqrt{3}}{8}c_{2223} \tag{107}$$

$$c_{2213} = \tfrac{3}{8}c_{1113} + \tfrac{3\sqrt{3}}{8}c_{1123} - \tfrac{2\sqrt{3}}{8}c_{1213} - \tfrac{6}{8}c_{1223} + \tfrac{1}{8}c_{2213} + \tfrac{\sqrt{3}}{8}c_{2223} \tag{108}$$

$$c_{2223} = -\tfrac{3\sqrt{3}}{8}c_{1113} + \tfrac{3}{8}c_{1123} + \tfrac{6}{8}c_{1213} - \tfrac{2\sqrt{3}}{8}c_{1223} - \tfrac{\sqrt{3}}{8}c_{2213} + \tfrac{1}{8}c_{2223} \tag{109}$$

という関係式が得られる．行列を用いてまとめると，

$$\begin{pmatrix} -7 & \sqrt{3} & 2\sqrt{3} & 6 & 3 & 3\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -7 & -6 & 2\sqrt{3} & -3\sqrt{3} & 3 \\ -\sqrt{3} & -3 & -10 & -2\sqrt{3} & \sqrt{3} & 3 \\ 3 & -\sqrt{3} & 2\sqrt{3} & -10 & -3 & \sqrt{3} \\ 3 & 3\sqrt{3} & -2\sqrt{3} & -6 & -7 & \sqrt{3} \\ -3\sqrt{3} & 3 & 6 & -2\sqrt{3} & -\sqrt{3} & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{1113} \\ c_{1123} \\ c_{1213} \\ c_{1223} \\ c_{2213} \\ c_{2223} \end{pmatrix} = 0 \tag{110}$$

となる．この式を見れば，c_{1113} と c_{2213} を，および c_{1123} と c_{2223} を交換し，c_{1213} を $-c_{1213}$ に，c_{1223} を $-c_{1223}$ にしても，この連立方程式は変わらないことがわかる．実際，この交換によって，第 1 式は第 5 式に，第 2 式

は第 6 式に，第 3 式と第 4 式はそれぞれの式に -1 を掛けた式になる．したがって，式 (110) は次式のように書ける．

$$\begin{pmatrix} -7 & \sqrt{3} & 2\sqrt{3} & 6 & 3 & 3\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -7 & -6 & 2\sqrt{3} & -3\sqrt{3} & 3 \\ -\sqrt{3} & -3 & -10 & -2\sqrt{3} & \sqrt{3} & 3 \\ 3 & -\sqrt{3} & 2\sqrt{3} & -10 & -3 & \sqrt{3} \\ 3 & 3\sqrt{3} & -2\sqrt{3} & -6 & -7 & \sqrt{3} \\ -3\sqrt{3} & 3 & 6 & -2\sqrt{3} & -\sqrt{3} & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{2213} \\ c_{2223} \\ -c_{1213} \\ -c_{1223} \\ c_{1113} \\ c_{1123} \end{pmatrix} = 0 \tag{111}$$

ここで，式 (110) と式 (111) を加えると，

$$\begin{pmatrix} -7 & \sqrt{3} & 2\sqrt{3} & 6 & 3 & 3\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -7 & -6 & 2\sqrt{3} & -3\sqrt{3} & 3 \\ -\sqrt{3} & -3 & -10 & -2\sqrt{3} & \sqrt{3} & 3 \\ 3 & -\sqrt{3} & 2\sqrt{3} & -10 & -3 & \sqrt{3} \\ 3 & 3\sqrt{3} & -2\sqrt{3} & -6 & -7 & \sqrt{3} \\ -3\sqrt{3} & 3 & 6 & -2\sqrt{3} & -\sqrt{3} & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{1113} + c_{2213} \\ c_{1123} + c_{2223} \\ 0 \\ 0 \\ c_{2213} + c_{1113} \\ c_{2223} + c_{1123} \end{pmatrix} = 0 \tag{112}$$

となる．ここで，同類項をまとめる．すなわち，行列の第 1 列と第 5 列を加え，第 2 列と第 6 列を加え，重複する第 5 行と第 6 行を除くと，

$$\begin{pmatrix} -4 & 4\sqrt{3} & 2\sqrt{3} & 6 \\ -4\sqrt{3} & -4 & -6 & 2\sqrt{3} \\ 0 & 0 & -10 & -2\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 2\sqrt{3} & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{1113} + c_{2213} \\ c_{1123} + c_{2223} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \tag{113}$$

となる．0 となる部分を除くと，

$$\begin{pmatrix} -4 & 4\sqrt{3} \\ -4\sqrt{3} & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{1113} + c_{2213} \\ c_{1123} + c_{2223} \end{pmatrix} = 0 \tag{114}$$

となり，係数の行列式は非 0 であるから次式が得られる．

$$c_{1113} + c_{2213} = 0 \tag{115}$$

$$c_{1123} + c_{2223} = 0 \tag{116}$$

式 (115) の c_{2213} と式 (116) の c_{2223} を式 (110) に代入し，同類項をまとめると，

$$\begin{pmatrix} -10 & -2\sqrt{3} & 2\sqrt{3} & 6 \\ 2\sqrt{3} & -10 & -6 & 2\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} & -6 & -10 & -2\sqrt{3} \\ 6 & -2\sqrt{3} & 2\sqrt{3} & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{1113} \\ c_{1123} \\ c_{1213} \\ c_{1223} \end{pmatrix} = 0 \tag{117}$$

となる．第 1 行から第 4 行を引き，第 2 行と第 3 行を加えると，

$$\begin{pmatrix} -16 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & -16 & -16 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{1113} \\ c_{1123} \\ c_{1213} \\ c_{1223} \end{pmatrix} = 0 \tag{118}$$

となり，これから，

$$c_{1113} = c_{1223} \tag{119}$$

$$c_{1123} = -c_{1213} \tag{120}$$

が得られる．これを式 (117) に代入すると，

$$\begin{pmatrix} -10 & -2\sqrt{3} & 2\sqrt{3} & 6 \\ 2\sqrt{3} & -10 & -6 & 2\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} & -6 & -10 & -2\sqrt{3} \\ 6 & -2\sqrt{3} & 2\sqrt{3} & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{1113} \\ c_{1123} \\ -c_{1123} \\ c_{1113} \end{pmatrix} = 0 \tag{121}$$

となり，第 1 列と第 4 列を加え，第 2 列から第 3 列を引いて同類項をまとめると，

$$\begin{pmatrix} -4 & -4\sqrt{3} \\ 4\sqrt{3} & -4 \\ -4\sqrt{3} & 4 \\ -4 & -4\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{1113} \\ c_{1123} \end{pmatrix} = 0 \tag{122}$$

となる．重複した方程式を除くと，次式となる．

$$\begin{pmatrix} -4 & -4\sqrt{3} \\ 4\sqrt{3} & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{1113} \\ c_{1123} \end{pmatrix} = 0 \tag{123}$$

左辺係数の行列式は非 0 であるから，$c_{1113} = c_{1123} = 0$ となる．まとめると，

$$c_{1113} = 0 \tag{124}$$

$$c_{1123} = 0 \tag{125}$$

$$c_{1213} = 0 \tag{126}$$

$$c_{1223} = 0 \tag{127}$$

$$c_{2213} = 0 \tag{128}$$

$$c_{2223} = 0 \tag{129}$$

となる．

(3) i, j, k, l の中に 3 が 2 個入り，かつ 3 が i, j または kl に一緒に入っている場合

上で行った計算と同様にして，

$$c_{1133} = \tfrac{1}{4}c_{1133} + \tfrac{2\sqrt{3}}{4}c_{1233} + \tfrac{3}{4}c_{2233} \tag{130}$$

$$c_{1233} = -\tfrac{\sqrt{3}}{4}c_{1133} - \tfrac{2}{4}c_{1233} + \tfrac{\sqrt{3}}{4}c_{2233} \tag{131}$$

$$c_{3322} = \tfrac{3}{4}c_{1133} - \tfrac{2\sqrt{3}}{4}c_{1233} + \tfrac{1}{4}c_{2233} \tag{132}$$

という連立方程式を得る．行列式を用いてまとめると，

$$\begin{pmatrix} -3 & 2\sqrt{3} & 3 \\ -\sqrt{3} & -6 & \sqrt{3} \\ 3 & -2\sqrt{3} & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{1133} \\ c_{1233} \\ c_{2233} \end{pmatrix} = 0 \tag{133}$$

となる．第 1 列と第 3 列の係数が等しいので，これをまとめると，

$$\begin{pmatrix} -3 & 2\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -6 \\ 3 & -2\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{1133} - c_{2233} \\ c_{1233} \end{pmatrix} = 0 \tag{134}$$

となる．第 3 行は重複しているので除くことができる．

$$\begin{pmatrix} -3 & 2\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{1133} - c_{2233} \\ c_{1233} \end{pmatrix} = 0 \tag{135}$$

左辺の係数の行列式は非 0 であるから，

$$c_{1133} = c_{2233} \tag{136}$$
$$c_{1233} = 0 \tag{137}$$

となる．

(4) i, j, k, l の中に 3 が 2 個入り，かつ 3 が i, j に 1 個，kl に 1 個入っている場合

この場合は，c_{3131}，c_{3132}，c_{3232} が該当する．これまでと同様の計算により，

$$c_{3131} = \tfrac{1}{4}c_{3131} + \tfrac{2\sqrt{3}}{4}c_{3132} + \tfrac{3}{4}c_{3232} \tag{138}$$
$$c_{3132} = -\tfrac{\sqrt{3}}{4}c_{3131} - \tfrac{2}{4}c_{3132} + \tfrac{\sqrt{3}}{4}c_{3232} \tag{139}$$
$$c_{3232} = \tfrac{3}{4}c_{3131} - \tfrac{2\sqrt{3}}{4}c_{3132} + \tfrac{1}{4}c_{3232} \tag{140}$$

という連立方程式を得る．これを行列を用いてまとめると，

$$\begin{pmatrix} -3 & 2\sqrt{3} & 3 \\ -\sqrt{3} & -6 & \sqrt{3} \\ 3 & -2\sqrt{3} & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{3131} \\ c_{3132} \\ c_{3232} \end{pmatrix} = 0 \tag{141}$$

となる．これは式 (133) と同様にして解くことができて，

$$c_{3131} = c_{3232} \tag{142}$$
$$c_{3132} = 0 \tag{143}$$

となる．

(5) i, j, k, l の中に 3 が 3 個入っている場合

これまでと同様の計算により，

$$c_{1333} = \tfrac{1}{2}c_{1333} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}c_{2333} \tag{144}$$
$$c_{2333} = -\tfrac{\sqrt{3}}{2}c_{1333} - \tfrac{1}{2}c_{2333} \tag{145}$$

という連立方程式を得る．これから，

$$\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{1333} \\ c_{2333} \end{pmatrix} = 0 \tag{146}$$

となり，

$$c_{1333} = c_{2333} = 0 \tag{147}$$

となる．

(5) i, j, k, l がすべて 3 の場合

この場合は変換によって c_{3333} は変わらない．したがって，独立な成分である．

以上をまとめると，

$$\begin{cases} c_{1111} = c_{2222} \\ c_{1212} = \frac{1}{2}(c_{1111} - c_{1122}) \\ c_{1133} = c_{2233} \\ c_{1313} = c_{2323} \\ c_{1112} = c_{1222} = c_{1113} = c_{1123} = c_{1213} = c_{1223} = 0 \\ c_{2213} = c_{2223} = c_{3312} = c_{3313} = c_{3323} = c_{3132} = 0 \end{cases} \tag{148}$$

これを行列表示にすると，

$$
\begin{pmatrix}
c_{1111} & c_{1122} & c_{1133} & 0 & 0 & 0 \\
 & c_{1111} & c_{1133} & 0 & 0 & 0 \\
 & & c_{3333} & 0 & 0 & 0 \\
 & & & c_{2323} & 0 & 0 \\
 & & & & c_{2323} & 0 \\
 & & & & & \frac{1}{2}(c_{1111} - c_{1122})
\end{pmatrix} \tag{149}
$$

となる．独立な成分は c_{1111}，c_{1122}，c_{1133}，c_{3333}，c_{2323} の 5 個である．

A.3.2　$\overline{6}$ の場合

$\overline{6}$ の対称操作は 6 回対称軸のまわりに $\pi/3$ 回転してから反転する操作である．前半は A.3.1 の 6 の場合と同じで，変換行列は式 (81) であり，後半は −1 を成分とする対角行列である．したがって，$\overline{6}$ の変換行列の成分 a_{ij} は大きさが 6 の変換行列の成分と同じで符号が反対である．弾性率テンソルの場合，添字が 4 個であるから，この符号の反転は相殺されて，すべての計算は 6 の場合と同じになる．したがって，点群 $\overline{6}$ の場合の弾性率テンソルは点群 6 の場合と同じである．

A.3.3　$6/m$ の場合

$6/m$ の対象操作は，6 回対称操作に加えて，$x_3 = 0$ 面に関する鏡映である．後者の変換行列は式 (**??**) と同じで，$a_{33} = -1$ のみ単位行列と符号が反対であるから，i, j, k, l のうち 3 を奇数回含むものは $c_{ijkl} = -c_{ijkl}$ となって 0 となる．一方，A.3.1 節 からわかるように，3 を奇数回含む成分はすべて 0 に等しい．したがって，$6/m$ の対称性によって，6 の場合の弾性率テンソルに加わる変化はない．

A.3.4　622 の場合

622 の対称操作は，点群 6 の 6 回対称操作に加えて，x_1 軸と x_2 軸に関する 2 回対称操作がある．x_1 軸および x_2 軸に関する対称操作の行列は，それぞれ，

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad
\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}
$$

であるから，i, j, k, l のうち 2 と 3 をあわせて奇数個含む場合に $c_{ijkl} = 0$ になる．すなわち，i, j, k, l のうち 1 をあわせて奇数個含む場合に $c_{ijkl} = 0$ になる．式 (148) からわかるように，1 を奇数個含む c_{ijkl} はすべて 0 である．したがって，x_1 軸に関する 2 回対称操作で式 (149) に追加される変化はない．また同様にして，2 を奇数個含む c_{ijkl} はすべて 0 であることもわかる．したがって，x_2 軸に関する 2 回対称操作で式 (149) に追加される変化もない．

A.3.5　$6mm$ の場合

$6mm$ は，6 回対称操作に加えて，6 回対称軸を含む面に関する鏡映である．鏡映面は $x_1 = 0$ 面と $x_2 = 0$ 面の 2 種類がある．それぞれの変換行列は，

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である．これから，$x_1 = 0$ 面に関する鏡映操作では，i, j, k, l に 1 を奇数個含む場合は $c_{ijkl} = 0$ となり，もう一つの鏡映操作では，i, j, k, l に 2 を奇数個含む場合は $c_{ijkl} = 0$ となる．これは A.3.4 の 622 の場合の，1 を奇数個含む場合に $c_{ijkl} = 0$ となり，2 を奇数個含む場合に $c_{ijkl} = 0$ となる場合と同じである．したがって，この 2 つの面を鏡映面とすることにより，式 (149) に追加される関係はなく，$6mm$ の場合の弾性率テンソルの独立成分は，点群 6 の場合と同じである．

A.3.6　$\overline{6}m2$ の場合

$\overline{6}m2$ は対称操作 $\overline{6}$ に加えて，回転軸を含む面，いまの場合は $x_2 = 0$ 面に関する鏡映操作と，x_1 軸に関する 2 回軸回転操作を含む．それぞれの変換行列は，

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

である．これらの変換は A.3.4 および A.3.5 の場合と同じである．したがって，$\overline{6}m2$ の場合の弾性率テンソル成分に関する変化はなく，独立成分は点群 6 の場合と同じである．

A.3.7　$6/mmm$ の場合

$6/mmm$ は $\frac{6}{m}\frac{2}{m}\frac{2}{m}$ のことである．$\frac{6}{m}$ は変化を追加しないことがすでに示された．$\frac{2}{m}\frac{2}{m}$ は，x_1 軸に関する 2 回対称と $x_1 = 0$ に関する鏡映，および x_2 軸に関する 2 回対称と $x_2 = 0$ に関する鏡映である．前者の座標変換行列は，

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であり，後者の座標変換行列は，

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である．これらの変換行列が弾性率テンソル成分に変化を追加しないことは，すでに A.3.4 から A.3.6 において示された．したがって，$6/mmm$ の場合の弾性率テンソルの独立成分は点群 6 の場合と同じである．

結局，六方晶系には 7 つの点群が属するが，弾性率テンソルの独立な成分およびその関係はすべて共通である．

A.4　三方晶系（菱面体晶系）（3，$\overline{3}$，32，$3m$，$\overline{3}m$）

3 回対称軸を x_3 軸に，a 軸を x_1 軸と x_3 軸を含む面内に，または x_2 軸と x_3 軸を含む面内にとる．具体的な計算は六方晶系の場合とほぼ同様である．

A.4.1　3 の場合

3 回対称操作を表す座標変換の行列 (a_{ij}) は，六方晶系の場合の $\pi/3$ を $2\pi/3$ として，

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi}{3} & \cos(\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{3}) & \cos\frac{\pi}{2} \\ \cos(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}) & \cos\frac{2\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{2} \\ \cos\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} & \cos 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{150}$$

となる．変換によって，c_{ijkl} の i, j, k, l のうち，3 の個数は変わらないので，3 の個数の場合に分けて計算する．

(1) i, j, k, l に 3 が 0 個の場合

式 (70) により，

$$\begin{aligned} c_{1111} =& a_{11}a_{11}a_{11}a_{11}c_{1111} + a_{11}a_{11}a_{11}a_{12}c_{1112} + a_{11}a_{11}a_{12}a_{11}c_{1121} + a_{11}a_{11}a_{12}a_{12}c_{1122} \\ & + a_{11}a_{12}a_{11}a_{11}c_{1211} + a_{11}a_{12}a_{11}a_{12}c_{1212} + a_{11}a_{12}a_{12}a_{11}c_{1221} + a_{11}a_{12}a_{12}a_{12}c_{1222} \\ & + a_{12}a_{11}a_{11}a_{11}c_{2111} + a_{12}a_{11}a_{11}a_{12}c_{2112} + a_{12}a_{11}a_{21}a_{11}c_{2121} + a_{12}a_{11}a_{12}a_{12}c_{2122} \\ & + a_{12}a_{12}a_{11}a_{11}c_{2211} + a_{12}a_{12}a_{11}a_{12}c_{2212} + a_{12}a_{12}a_{12}a_{11}c_{2221} + a_{12}a_{12}a_{12}a_{12}c_{2222} \qquad (151) \\ =& \tfrac{1}{16}c_{1111} - \tfrac{\sqrt{3}}{16}c_{1112} - \tfrac{\sqrt{3}}{16}c_{1121} + \tfrac{3}{16}c_{1122} - \tfrac{\sqrt{3}}{16}c_{1211} + \tfrac{3}{16}c_{1212} + \tfrac{3}{16}c_{1221} - \tfrac{3\sqrt{3}}{16}c_{1222} \\ & - \tfrac{\sqrt{3}}{16}c_{2111} + \tfrac{3}{16}c_{2112} + \tfrac{3}{16}c_{2121} + \tfrac{3\sqrt{3}}{16}c_{2122} + \tfrac{3}{16}c_{2211} - \tfrac{3\sqrt{3}}{16}c_{2212} - \tfrac{3\sqrt{3}}{16}c_{2221} + \tfrac{9}{16}c_{2222} \qquad (152) \\ =& \tfrac{1}{16}c_{1111} - \tfrac{4\sqrt{3}}{16}c_{1112} + \tfrac{6}{16}c_{1122} + \tfrac{12}{16}c_{1212} - \tfrac{4\sqrt{3}}{16}c_{1222} + \tfrac{9}{16}c_{2222} \qquad (153) \end{aligned}$$

という方程式が得られる．c_{1112}，c_{1122}，c_{1212}，c_{1222}，c_{2222} についても同様にして，

$$c_{1112} = \tfrac{\sqrt{3}}{16}c_{1111} - \tfrac{8}{16}c_{1112} + \tfrac{2\sqrt{3}}{16}c_{1122} + \tfrac{4\sqrt{3}}{16}c_{1212} - \tfrac{0}{16}c_{1222} - \tfrac{3\sqrt{3}}{16}c_{2222} \tag{154}$$

$$c_{1122} = \tfrac{3}{16}c_{1111} - \tfrac{4\sqrt{3}}{16}c_{1112} + \tfrac{10}{16}c_{1122} - \tfrac{12}{16}c_{1212} + \tfrac{4\sqrt{3}}{16}c_{1222} + \tfrac{3}{16}c_{2222} \tag{155}$$

$$c_{1212} = \tfrac{3}{16}c_{1111} - \tfrac{4\sqrt{3}}{16}c_{1112} - \tfrac{6}{16}c_{1122} + \tfrac{4}{16}c_{1212} + \tfrac{4\sqrt{3}}{16}c_{1222} + \tfrac{3}{16}c_{2222} \tag{156}$$

$$c_{1222} = \tfrac{3\sqrt{3}}{16}c_{1111} + \tfrac{0}{16}c_{1112} - \tfrac{2\sqrt{3}}{16}c_{1122} - \tfrac{4\sqrt{3}}{16}c_{1212} - \tfrac{8}{16}c_{1222} - \tfrac{\sqrt{3}}{16}c_{2222} \tag{157}$$

$$c_{2222} = \tfrac{9}{16}c_{1111} + \tfrac{4\sqrt{3}}{16}c_{1112} + \tfrac{6}{16}c_{1122} + \tfrac{12}{16}c_{1212} + \tfrac{4\sqrt{3}}{16}c_{1222} + \tfrac{1}{16}c_{2222} \tag{158}$$

を得る．式 (153)〜(158) を 16 倍して整理すると，

$$\begin{pmatrix} -15 & -4\sqrt{3} & 6 & 12 & -4\sqrt{3} & 9 \\ \sqrt{3} & -24 & 2\sqrt{3} & 4\sqrt{3} & 0 & -3\sqrt{3} \\ 3 & -4\sqrt{3} & -6 & -12 & 4\sqrt{3} & 3 \\ 3 & -4\sqrt{3} & -6 & -12 & 4\sqrt{3} & 3 \\ 3\sqrt{3} & 0 & -2\sqrt{3} & -4\sqrt{3} & -24 & -\sqrt{3} \\ 9 & 4\sqrt{3} & 6 & 12 & 4\sqrt{3} & -15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{1111} \\ c_{1112} \\ c_{1122} \\ c_{1212} \\ c_{1222} \\ c_{2222} \end{pmatrix} = 0 \tag{159}$$

となる．左辺行列の第 2 列に -1 をかけて c_{1112} に -1 を掛け，第 5 行に -1 を掛けると，

$$\begin{pmatrix} -15 & 4\sqrt{3} & 6 & 12 & -4\sqrt{3} & 9 \\ \sqrt{3} & 24 & 2\sqrt{3} & 4\sqrt{3} & 0 & -3\sqrt{3} \\ 3 & 4\sqrt{3} & -6 & -12 & 4\sqrt{3} & 3 \\ 3 & 4\sqrt{3} & -6 & -12 & 4\sqrt{3} & 3 \\ -3\sqrt{3} & 0 & 2\sqrt{3} & 4\sqrt{3} & 24 & \sqrt{3} \\ 9 & -4\sqrt{3} & 6 & 12 & 4\sqrt{3} & -15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{1111} \\ -c_{1112} \\ c_{1122} \\ c_{1212} \\ c_{1222} \\ c_{2222} \end{pmatrix} = 0 \tag{160}$$

となる．この式の c_{1111} と c_{2222} を交換し（第 1 列と第 6 列を交換し），$-c_{1112}$ と c_{1222} を交換（第 1 列と第 6 列を交換）してもこの連立方程式は変わらない．すなわち，次式となる．

$$\begin{pmatrix} -15 & 4\sqrt{3} & 6 & 12 & -4\sqrt{3} & 9 \\ \sqrt{3} & 24 & 2\sqrt{3} & 4\sqrt{3} & 0 & -3\sqrt{3} \\ 3 & 4\sqrt{3} & -6 & -12 & 4\sqrt{3} & 3 \\ 3 & 4\sqrt{3} & -6 & -12 & 4\sqrt{3} & 3 \\ -3\sqrt{3} & 0 & 2\sqrt{3} & 4\sqrt{3} & 24 & \sqrt{3} \\ 9 & -4\sqrt{3} & 6 & 12 & 4\sqrt{3} & -15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{2222} \\ c_{1222} \\ c_{1122} \\ c_{1212} \\ -c_{1112} \\ c_{1111} \end{pmatrix} = 0 \tag{161}$$

式 (160) から式 (161) を引き，0 の行と列を除くと，

$$\begin{pmatrix} -15 & 4\sqrt{3} & -4\sqrt{3} & 9 \\ \sqrt{3} & 24 & 0 & -3\sqrt{3} \\ -3\sqrt{3} & 0 & 24 & \sqrt{3} \\ 9 & -4\sqrt{3} & 4\sqrt{3} & -15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{1111} - c_{2222} \\ -c_{1112} - c_{1222} \\ c_{1222} + c_{1122} \\ c_{2222} - c_{1111} \end{pmatrix} = 0 \tag{162}$$

第 1 項と第 4 項，および第 2 項と第 3 項の同類項をまとめると，

$$\begin{pmatrix} -24 & -8\sqrt{3} \\ 4\sqrt{3} & -24 \\ -4\sqrt{3} & 24 \\ 24 & 8\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{1111} - c_{2222} \\ c_{1112} + c_{1222} \end{pmatrix} = 0 \tag{163}$$

となる．第 3 行と第 4 行は重複であるから，これを除くと，

$$\begin{pmatrix} -24 & -8\sqrt{3} \\ 4\sqrt{3} & -24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{1111} - c_{2222} \\ c_{1112} + c_{1222} \end{pmatrix} = 0 \tag{164}$$

となり，左辺の係数の行列式は非 0 であるから，

$$c_{1111} = c_{2222} \tag{165}$$

$$c_{1112} = -c_{1222} \tag{166}$$

となる．この式の c_{2222} と c_{1112} を式 (160) に代入し，同類項となる第 1 列と第 6 列，第 2 列と第 5 列を加える，さらに第 4 列の因子 2 を c_{1212} に移動すると，

$$\begin{pmatrix} -6 & 0 & 6 & 6 \\ -2\sqrt{3} & 24 & 2\sqrt{3} & 2\sqrt{3} \\ 6 & 8\sqrt{3} & -6 & -6 \\ 6 & 8\sqrt{3} & -6 & -6 \\ -2\sqrt{3} & 24 & 2\sqrt{3} & 2\sqrt{3} \\ -6 & 0 & 6 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{1111} \\ c_{1222} \\ c_{1122} \\ 2c_{1212} \end{pmatrix} = 0 \tag{167}$$

この式左辺の行列で第 1 列，第 3 列，第 4 列は等しいので，この 3 項を $c_{1111} - c_{1122} - 2c_{1212}$ としてまとめ，重複した行を除くと，

$$\begin{pmatrix} -6 & 0 \\ -2\sqrt{3} & 24 \\ 6 & 8\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{1111} - c_{1222} - 2c_{1212} \\ c_{1122} \end{pmatrix} = 0 \tag{168}$$

左辺のどの 2 行 2 列の係数行列式は非 0 であるから，

$$c_{1111} - c_{1122} - 2c_{1212} = 0 \tag{169}$$

$$c_{1222} = 0 \tag{170}$$

となる．

(2) i, j, k, l に 3 が 1 個の場合

　式 (102)〜(109) と同様にして，

$$c_{1113} = -\tfrac{1}{8}c_{1113} + \tfrac{\sqrt{3}}{8}c_{1123} + \tfrac{2\sqrt{3}}{8}c_{1213} - \tfrac{6}{8}c_{1223} - \tfrac{3}{8}c_{2213} + \tfrac{3\sqrt{3}}{8}c_{2223} \tag{171}$$

$$c_{1123} = -\tfrac{\sqrt{3}}{8}c_{1113} - \tfrac{1}{8}c_{1123} + \tfrac{6}{8}c_{1213} + \tfrac{2\sqrt{3}}{8}c_{1223} - \tfrac{3\sqrt{3}}{8}c_{2213} - \tfrac{3}{8}c_{2223} \tag{172}$$

$$c_{1213} = -\tfrac{\sqrt{3}}{8}c_{1113} + \tfrac{3}{8}c_{1123} + \tfrac{2}{8}c_{1213} - \tfrac{2\sqrt{3}}{8}c_{1223} + \tfrac{\sqrt{3}}{8}c_{2213} - \tfrac{3}{8}c_{2223} \tag{173}$$

$$c_{1223} = -\tfrac{3}{8}c_{1113} - \tfrac{\sqrt{3}}{8}c_{1123} + \tfrac{2\sqrt{3}}{8}c_{1213} + \tfrac{2}{8}c_{1223} + \tfrac{3}{8}c_{2213} + \tfrac{\sqrt{3}}{8}c_{2223} \tag{174}$$

$$c_{2213} = -\tfrac{3}{8}c_{1113} + \tfrac{3\sqrt{3}}{8}c_{1123} - \tfrac{2\sqrt{3}}{8}c_{1213} + \tfrac{6}{8}c_{1223} - \tfrac{1}{8}c_{2213} + \tfrac{\sqrt{3}}{8}c_{2223} \tag{175}$$

$$c_{2223} = -\tfrac{3\sqrt{3}}{8}c_{1113} - \tfrac{3}{8}c_{1123} - \tfrac{6}{8}c_{1213} - \tfrac{2\sqrt{3}}{8}c_{1223} - \tfrac{\sqrt{3}}{8}c_{2213} - \tfrac{1}{8}c_{2223} \tag{176}$$

となり，行列を用いてまとめると，

$$\begin{pmatrix} -9 & \sqrt{3} & 2\sqrt{3} & -6 & -3 & 3\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -9 & 6 & 2\sqrt{3} & -3\sqrt{3} & -3 \\ -\sqrt{3} & 3 & -6 & -2\sqrt{3} & \sqrt{3} & -3 \\ -3 & -\sqrt{3} & 2\sqrt{3} & -6 & 3 & \sqrt{3} \\ -3 & 3\sqrt{3} & -2\sqrt{3} & 6 & -9 & \sqrt{3} \\ -3\sqrt{3} & -3 & -6 & -2\sqrt{3} & -\sqrt{3} & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{1113} \\ c_{1123} \\ c_{1213} \\ c_{1223} \\ c_{2213} \\ c_{2223} \end{pmatrix} = 0 \tag{177}$$

となる．左辺の係数行列を見ると，c_{1113} と c_{2213} を交換し，c_{1123} と c_{2223} を交換し，さらに c_{1213} と c_{1223} に -1 を掛けると，第 1 式は第 5 式に，第 2 式は第 6 式に，第 3 式と第 4 式はそれぞれの式に -1 を掛けたものになることがわかる．すなわち，式 (177) は次式に等しい．

$$\begin{pmatrix} -9 & \sqrt{3} & 2\sqrt{3} & -6 & -3 & 3\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -9 & 6 & 2\sqrt{3} & -3\sqrt{3} & -3 \\ -\sqrt{3} & 3 & -6 & -2\sqrt{3} & \sqrt{3} & -3 \\ -3 & -\sqrt{3} & 2\sqrt{3} & -6 & 3 & \sqrt{3} \\ -3 & 3\sqrt{3} & -2\sqrt{3} & 6 & -9 & \sqrt{3} \\ -3\sqrt{3} & -3 & -6 & -2\sqrt{3} & -\sqrt{3} & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{2213} \\ c_{2223} \\ -c_{1213} \\ -c_{1223} \\ c_{1113} \\ c_{1123} \end{pmatrix} = 0 \tag{178}$$

式 (177) に式 (178) を加えると，第 3 項と第 4 項が消えて，

$$\begin{pmatrix} -9 & \sqrt{3} & -3 & 3\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -9 & -3\sqrt{3} & -3 \\ -\sqrt{3} & 3 & \sqrt{3} & -3 \\ -3 & -\sqrt{3} & 3 & \sqrt{3} \\ -3 & 3\sqrt{3} & -9 & \sqrt{3} \\ -3\sqrt{3} & -3 & -\sqrt{3} & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{1113} + c_{2213} \\ c_{1123} + c_{2223} \\ c_{2213} + c_{1113} \\ c_{2223} + c_{1123} \end{pmatrix} = 0 \tag{179}$$

となる．第 1 列に第 3 列を加え，第 2 列に第 4 列を加えて同類項をまとめると，第 3 行と第 4 行は 0 となって消える．第 5 行と第 6 行は重複するので除くと次式になる．

$$\begin{pmatrix} -12 & 4\sqrt{3} \\ -4\sqrt{3} & -12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{1113}+c_{2213} \\ c_{1123}+c_{2223} \end{pmatrix} = 0 \tag{180}$$

これから，

$$c_{1113}+c_{2213} = 0 \tag{181}$$

$$c_{1123}+c_{2223} = 0 \tag{182}$$

となる．式 (181) と式 (182) の c_{2213} と c_{2223} を式 (177) に代入し，同類項をまとめると，

$$\begin{pmatrix} -6 & -2\sqrt{3} & 2\sqrt{3} & -6 \\ 2\sqrt{3} & -6 & 6 & 2\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} & 6 & -6 & -2\sqrt{3} \\ -6 & -2\sqrt{3} & 2\sqrt{3} & -6 \\ 6 & 2\sqrt{3} & -2\sqrt{3} & 6 \\ -2\sqrt{3} & 6 & -6 & -2\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{1113} \\ c_{1123} \\ c_{1213} \\ c_{1223} \end{pmatrix} = 0 \tag{183}$$

となる．第 5 行と第 6 行は重複しているので除く．第 1 列と第 4 列，第 2 列と第 3 列は等しいので同じ係数の下にまとめると，

$$\begin{pmatrix} -6 & -2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & -6 \\ -2\sqrt{3} & 6 \\ -6 & -2\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{1113}+c_{1223} \\ c_{1123}-c_{1213} \end{pmatrix} = 0 \tag{184}$$

となる．下 2 行は重複である．残った 2 行 2 列の係数の行列式は非 0 であるので，

$$c_{1113}+c_{1223} = 0 \tag{185}$$

$$c_{1123}-c_{1213} = 0 \tag{186}$$

となる．

(3) 3 が i, j に 2 個，または kl に 2 個入っている場合

上で行った計算と同様にして，

$$c_{1133} = \tfrac{1}{4}c_{1133} - \tfrac{2\sqrt{3}}{4}c_{1233} + \tfrac{3}{4}c_{2233} \tag{187}$$

$$c_{1233} = \tfrac{\sqrt{3}}{4}c_{1133} - \tfrac{2}{4}c_{1233} - \tfrac{\sqrt{3}}{4}c_{2233} \tag{188}$$

$$c_{2233} = \tfrac{3}{4}c_{1133} + \tfrac{2\sqrt{3}}{4}c_{1233} + \tfrac{1}{4}c_{2233} \tag{189}$$

という連立方程式を得る．行列式を用いてまとめると，

$$\begin{pmatrix} -3 & -2\sqrt{3} & 3 \\ \sqrt{3} & -6 & -\sqrt{3} \\ 3 & 2\sqrt{3} & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{1133} \\ c_{1233} \\ c_{2233} \end{pmatrix} = 0 \tag{190}$$

となる．この式は，c_{1133} と c_{2233} を交換し，c_{1233} に -1 を掛けても変わらない．つまり，第 1 式と第 3 式が入れ替わり，第 2 式に -1 を掛けたものになる．すなわち，次式となる．

$$\begin{pmatrix} -3 & -2\sqrt{3} & 3 \\ \sqrt{3} & -6 & -\sqrt{3} \\ 3 & 2\sqrt{3} & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{2233} \\ -c_{1233} \\ c_{1133} \end{pmatrix} = 0 \tag{191}$$

式 (190) から式 (191) を引いて

$$\begin{pmatrix} -3 & -2\sqrt{3} & 3 \\ \sqrt{3} & -6 & -\sqrt{3} \\ 3 & 2\sqrt{3} & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{1133} - c_{2233} \\ 2c_{1233} \\ c_{2233} - c_{1133} \end{pmatrix} = 0 \tag{192}$$

となる．同類項の第 1 列から第 3 列を引いて

$$\begin{pmatrix} -6 & -2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & -6 \\ 6 & 2\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{1133} - c_{2233} \\ 2c_{1233} \end{pmatrix} = 0 \tag{193}$$

となる．重複する第 3 行を除いた係数の行列式は非 0 であるから，

$$c_{1133} - c_{2233} = 0 \tag{194}$$

$$c_{1233} = 0 \tag{195}$$

となる．

(4) 3 が i, j に 1 個，kl に 1 個入っている場合

上の計算と同様にして，

$$c_{1313} = \frac{1}{4}c_{1313} - \frac{2\sqrt{3}}{4}c_{1323} + \frac{3}{4}c_{2323} \tag{196}$$

$$c_{1323} = \frac{\sqrt{3}}{4}c_{1313} - \frac{2}{4}c_{1323} - \frac{\sqrt{3}}{4}c_{2323} \tag{197}$$

$$c_{2323} = \frac{3}{4}c_{1313} + \frac{2\sqrt{3}}{4}c_{1323} + \frac{1}{4}c_{2323} \tag{198}$$

という連立方程式を得る．行列式を用いてまとめると，

$$\begin{pmatrix} -3 & -2\sqrt{3} & 3 \\ \sqrt{3} & -6 & -\sqrt{3} \\ 3 & 2\sqrt{3} & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{1313} \\ c_{1323} \\ c_{2323} \end{pmatrix} = 0 \tag{199}$$

となる．この行列式は式 (190) と同じである．したがって，

$$c_{1313} - c_{2323} = 0 \tag{200}$$

$$c_{1323} = 0 \tag{201}$$

となる．

(5) $i, , j, k, l$ に 3 が 3 個ある場合

上と同様にして，次の連立方程式が得られる．

$$c_{3331} = -\frac{1}{2}c_{3331} + \frac{\sqrt{3}}{2}c_{3332} \tag{202}$$

$$c_{3332} = -\frac{\sqrt{3}}{2}c_{3331} - \frac{1}{2}c_{3332} \tag{203}$$

すなわち，

$$\begin{pmatrix} 3 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{3331} \\ c_{3332} \end{pmatrix} = 0 \tag{204}$$

となる．左辺の係数行列式は非 0 であるから，

$$c_{3331} = 0 \tag{205}$$

$$c_{3332} = 0 \tag{206}$$

である．

(6) i, j, k, l のすべてが 3 である場合

式 (70) からは，$c_{3333} = c_{3333}$ という自明の恒等式が出てくるのみであるから，0 でもなく，特別な関係も示されないので，c_{3333} はテンソルの独立な成分である．

以上ですべての場合が尽くされた．式 (165)，(166)，(169)，(170)，(181)，(182)，(185)，(186)，(194)，(195)，(200)，(201) をまとめると，次式となる．

$$\begin{cases} c_{1111} = c_{2222} \\ c_{1212} = \frac{1}{2}(c_{1111} - c_{1122}) \\ c_{1113} = -c_{2213} = -c_{1223} \\ c_{1123} = -c_{2223} = c_{1213} \\ c_{1133} = c_{2233} \\ c_{1313} = c_{2323} \\ c_{1112} = c_{1222} = c_{1233} = c_{1323} = c_{3331} = c_{3332} = 0 \end{cases} \tag{207}$$

これを行列表示にすると，

$$\begin{pmatrix} c_{1111} & c_{1122} & c_{1133} & c_{1123} & -c_{2213} & 0 \\ & c_{1111} & c_{1133} & -c_{1123} & c_{2213} & 0 \\ & & c_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ & & & c_{2323} & 0 & c_{2213} \\ & & & & c_{2323} & c_{1123} \\ & & & & & \frac{1}{2}(c_{1111} - c_{1122}) \end{pmatrix} \tag{208}$$

となる．独立な成分は c_{1111}，c_{1122}，c_{1133}，c_{1123}，c_{2213}，c_{3333}，c_{2323} の 7 個である．

A.4.2 $\overline{3}$ の場合

$\overline{3}$ の対称操作では，x_3 軸の回りに $2\pi/3$ 回転した後で反転する．x_3 軸の回りに $2\pi/3$ 回転に関する変換行列は直前の点群 3 で用いたので，$\overline{3}$ の変換行列はそれに反転の行列を掛けたものになる．すなわち，$\overline{3}$ の変換行列は，点群 3 の行列のすべての成分の符号を反転させたものである．これから，式 (70) は，

$$\begin{aligned} c_{ijkl} &= \sum_{i',j',k',l'} (-a_{ii'})(-a_{jj'})(-a_{kk'})(-a_{ll'})\, c_{i'j'k'l'} = (-1)^4 \sum_{i',j',k',l'} a_{ii'} a_{jj'} a_{kk'} a_{ll'}\, c_{i'j'k'l'} \\ &= \sum_{i',j',k',l'} a_{ii'} a_{jj'} a_{kk'} a_{ll'}\, c_{i'j'k'l'} \end{aligned} \tag{209}$$

となり，点群 3 と $\overline{3}$ の変換行列は同じである．したがって，テンソル成分も式 (208) と同じである．

A.4.3 32 の場合

点群 32 の対称操作には，A.4.1 で示した点群 3 の操作に加えて，3 回対称軸に垂直な軸の回りの 2 回対称操作がある．この 2 回対称軸が x_1 軸と x_2 軸の二つの場合が考えられる．前者は，(1) a 軸が x_2 軸と x_3 軸を含

む面にあり，x_1 軸が 2 回回転軸の場合，後者は，(2) a 軸が x_1 軸と x_3 軸を含む面にあり，x_2 軸が 2 回回転軸の場合である．

(1) x_1 軸が 2 回対称軸の場合

これを表す変換行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

である．これから，c_{ijkl} は $ijkl$ のうち，2 と 3 の数の和が奇数のときに $-c_{ijkl}$ に等しくなり，0 となる．すなわち，1 の数が奇数のときに $-c_{ijkl}$ は 0 となる．

1 が 1 個のときは,

$$c_{1222},\ c_{1223},\ c_{1233},\ c_{1322},\ c_{1323},\ c_{1333}$$

1 が 3 個のときは,

$$c_{1112},\ c_{1113}$$

が 0 になる．以上から，式 (207) には

$$c_{1113} = c_{2213} = c_{1223} = 0 \tag{210}$$

が追加され，行列表示で表すと,

$$\begin{pmatrix} c_{1111} & c_{1122} & c_{1133} & c_{1123} & 0 & 0 \\ & c_{1111} & c_{1133} & -c_{1123} & 0 & 0 \\ & & c_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ & & & c_{2323} & 0 & 0 \\ & & & & c_{2323} & c_{1113} \\ & & & & & \frac{1}{2}(c_{1111} - c_{1122}) \end{pmatrix} \tag{211}$$

となる．

(2) x_2 軸が 2 回対称軸の場合

これを表す変換行列は

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

である．したがって，$ijkl$ で 1 と 3 の数が奇数のときに $c_{ijkl} = 0$ となる．すなわち，2 の数が奇数のときに $c_{ijkl} = 0$ となる．このような c_{ijkl} は，2 が 1 個のとき,

$$c_{1112},\ c_{3312},\ c_{1312},\ c_{1132},\ c_{3332},\ c_{1332}$$

1 が 3 個のときは,

$$c_{2221},\ c_{2223}$$

が 0 になる．以上から，式 (207) には

$$c_{1123} = c_{2223} = c_{1312} = 0 \tag{212}$$

が追加され，行列表示で表すと，

$$\begin{pmatrix} c_{1111} & c_{1122} & c_{1133} & 0 & c_{1113} & 0 \\ & c_{1111} & c_{1133} & 0 & -c_{1113} & 0 \\ & & c_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ & & & c_{2323} & 0 & -c_{1113} \\ & & & & c_{2323} & 0 \\ & & & & & \frac{1}{2}(c_{1111}-c_{1122}) \end{pmatrix} \tag{213}$$

となる．

A.4.4 $3m$ の場合

$\overline{3}m$ は x_3 軸の回りの 3 回対称と x_3 軸を含む面に関する鏡映操作である．前者はすでに A.4.1 で計算した．後者で，鏡映面には $x_1=0$ 面と $x_2=0$ 面が考えられるが，

(1) 鏡映面が $x_1=0$ 軸の場合

座標変換行列は

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である．したがって，$ijkl$ の中に 1 が奇数個ある場合に $c_{ijkl}=0$ となる．これは A.4.3 (1) の場合と同じである．したがって，弾性率テンソルの行列表示は式 (211) で与えられる．

(2) 鏡映面が $x_2=0$ 軸の場合

座標変換行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である．したがって，$ijkl$ の中に 2 が奇数個ある場合に $c_{ijkl}=0$ となる．これは A.4.3 (2) の場合と同じである．したがって，弾性率テンソルの行列表示は式 (213) で与えられる．

A.4.5 $\overline{3}m$ の場合

$\overline{3}m$ は $\overline{3}\frac{2}{m}$ の簡略表記である．$\overline{3}$ は x_3 軸の回りの 3 回回反で，$\frac{2}{m}$ は x_3 軸に垂直な 2 回対称軸とそれに垂直な面の鏡映操作である．前者はすでに A.4.2 で計算した．後者は，(1) x_1 軸が 2 回対称軸かつ $x_1=0$ が鏡映面の場合と，にはと $x_2=0$ 面が考えられるが，(2) x_2 軸が 2 回対称軸かつ $x_2=0$ が鏡映面の場合がある．(1)

x_1 軸が 2 回対称軸かつ $x_1=0$ が鏡映面の場合

それぞれの場合の座標変換行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

である．両方の変換行列とも $ijkl$ の中に 1 が奇数個ある場合に $c_{ijkl} = 0$ となる．これは A.4.3 (1) の場合と同じである．したがって，弾性率テンソルの行列表示は式 (211) で与えられる．

(2) x_2 軸が 2 回対称軸かつ $x_2 = 0$ が鏡映面の場合

座標変換行列は

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

である．両方の変換行列とも $ijkl$ の中に 2 が奇数個ある場合に $c_{ijkl} = 0$ となる．これは A.4.3 (2) の場合と同じである．したがって，弾性率テンソルの行列表示は式 (213) で与えられる．

A.5 斜方晶系（222，$2mm$，mmm）

原点を直方体の中心にとり，a 軸を x_1 軸方向，b 軸を x_2 軸方向，c 軸を x_3 軸方向にとる．

A.5.1 222 の場合

x_3 軸の回りの 2 回回転操作を表す座標変換行列は,

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である．同様に，x_1 軸と x_2 軸の回りの 2 回回転操作を表す座標変換行列は，それぞれ,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

である．これが意味することは，$ijkl$ の中に 1, 2, 3 がそれぞれ奇数個含まれる場合 $c_{ijkl} = 0$ であり，これから，0 でない c_{ijkl} は $ijkl$ に 1, 2, 3 が 2 個ずつ含まれる次の 9 個の成分である．

$$c_{1111}, c_{1122}, c_{1133}, c_{2222}, c_{2233}, c_{3333}, c_{1212}, c_{1313}, c_{2323} \tag{214}$$

各成分の間の関係はないので，すべて独立な成分である．行列表示をすると次式になる．

$$\begin{pmatrix} c_{1111} & c_{1122} & c_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ & c_{2222} & c_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ & & c_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ & & & c_{2323} & 0 & 0 \\ & & & & c_{3131} & 0 \\ & & & & & c_{1212} \end{pmatrix} \tag{215}$$

A.5.2　$2mm$ の場合

斜方晶系の $2mm$ は x_3 軸の回りの 2 回回転操作と $x_1 = 0$ 面と $x_2 = 0$ 面に関する鏡映操作である．座標変換行列は，それぞれ，

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である．これから導かれる $c_{ijkl} = 0$ となる条件は，$ijkl$ に含まれる 1, 2, 3 の数が奇数であることで，これは前節の 222 の場合と同じである．したがって，弾性率テンソルの独立成分は 9 個，行列表示は式 (215) である．

A.5.3　mmm の場合

斜方晶系の mmm は，$x_1 = 0$ 面，$x_2 = 0$ 面，$x_2 = 0$ 面に関する鏡映操作である．そのとき，座標変換行列は，それぞれ，

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である．これは，前節，前前節と同じであり，結果も同じである．

A.6　正方晶系（4，$\overline{4}$，$4/m$，422，$4mm$，$\overline{4}2m$，$4/mmm$）

原点を重宝帯の中心にとり，a 軸を x_1 軸方向と x_2 軸方向に，c 軸を x_3 軸方向にとる．

A.6.1　4 の場合

x_3 軸の回りの 4 回回転操作を表す座標変換行列は，

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である．c_{ijkl} の $ijkl$ に 1 また 2 が 1 個ある場合を考える．たとえば，c_{1jkl} と c_{2jkl} を取り上げると，式 (70) を 2 段階で用いると，

$$c_{1jkl} = c_{2jkl} = -c_{1jkl}, \qquad c_{2jkl} = c_{1jkl} = -c_{2jkl}, \tag{216}$$

となり 0 となる．すなわち，1 が奇数個，または 2 が奇数個ある場合に $c_{ijkl} = 0$ となる．1 が 1 個，2 が 1 個の場合には 0 にならない．一般に，1 と 2 の個数の和が奇数のときに $c_{ijkl} = 0$ になることがわかる．これは，3 の個数が奇数のときに $c_{ijkl} = 0$ になるということと同等である．

c_{ijkl} の添字の対称性から，ij または jk が 12 の場合には式 (70) の 1 回の座標変換によって，たとえば，

$$c_{12kl} = -c_{21kl} = -c_{12kl}, \qquad c_{1j2j} = -c_{2j1j} = -c_{1j2j}, \tag{217}$$

となって，この場合も 0 になることがわかる．

前者の場合に，3 が 1 個と 3 個の場合にわけて考える．

3 が 1 個の場合の c_{1jkl} は,

$$c_{3111},c_{3112},c_{3122},c_{3211},c_{3222},c_{3212}$$

である．

3 が 3 個の場合の c_{1jkl} は,

$$c_{3331},c_{3332}$$

である．

後者の場合には,

$$c_{3312},c_{2312}$$

が該当する．

以上まとめると,

$$c_{3111}=c_{3112}=c_{3122}=c_{3211}=c_{3222}=c_{3212}=c_{3331}=c_{3332}=c_{3312}=c_{2312}=0 \tag{218}$$

となる．

0 にならない c_{ijkl} に関して，式 (70) による座標変換を 1 回施すことによって以下の関係式が得られる．

$$c_{1111}=c_{2222},\quad c_{1133}=c_{2233},\quad c_{1122}=c_{2211},\quad c_{2323}=c_{1313}, \tag{219}$$

$$c_{1112}=-c_{2221},c_{2212}=c_{1121},\quad c_{3333}=-c_{3333},\quad c_{1212}=c_{2121} \tag{220}$$

以上を行列表現で示すと次式になる．

$$\begin{pmatrix} c_{1111} & c_{1122} & c_{1133} & 0 & 0 & c_{1112} \\ & c_{1111} & c_{1133} & 0 & 0 & -c_{1112} \\ & & c_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ & & & c_{2323} & 0 & 0 \\ & & & & c_{2323} & 0 \\ & & & & & c_{1212} \end{pmatrix} \tag{221}$$

A.6.2 $\bar{4}$ の場合

この場合は，x_3 軸の回りの回反操作である．x_3 軸の回りの 4 回回転の変換行列は前節にしめした．$\bar{4}$ はこれに反転の変換行列掛けた単位行列である．したがって，変換行列の成分は 3 の変換行列の成分に -1 を掛けたものになる．c_{ijkl} の変換は a_{ij} の 4 次式を掛けたものである．したがって，a_{ij} がすべて符号反転しても c_{ijkl} の符号は不変である．結局，$\bar{4}$ におけるテンソル成分は 4 の場合と同じである．すなわち，行列表現は式 (221) である．

A.6.3 $4/m$ の場合

この場合は，x_3 軸の回りの 4 回対称に加えて，$x_3=0$ 面に関して鏡映対称がある．前者は前節で示した．後者の座標変換行列は単位行列の $(3,3)$ 成分を -1 にしたものであるから，$4/m$ の変換行列は，それぞれ,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

となる．右の変換行列から，$ijkl$ に含まれる 3 の数が奇数の場合に 0，偶数の場合に非 0 である．前節 3 の場合に，非 0 となる成分はすべて 3 の数が偶数である．すなわち，$4/m$ の対称性による弾性率テンソル成分で，点群 4 の場合以上に $4/m$ の対称性が付け加えるものはない．したがって，行列表示は式 (221) である．

A.6.4　$4mm$ の場合

$4mm$ の対称操作は x_3 軸に関する 4 回対称操作に加えて，$x_1 = 0$ 面および $x_1 = x_2$ 面に関する鏡映操作である．これを座標変換行列で示すと，二つの m はそれぞれ，

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる．左の行列の対称操作により，これまでと同様に，$ijkl$ で 1 が奇数の場合に $c_{ijkl} = 0$ となる．このとき，A.6.1 で非 0 の成分の中に 0 となる成分は

$$c_{1112} = c_{2212} = 0$$

である．左の行列の対称操作により，$ijkl$ の中の 1 と 2 が交換される．一方，A.6.1 の式 (221) の成分は，$ijkl$ での 1 と 2 の交換に関して閉じている．以上の対称性の場合に弾性率テンソルを行列表示すると次式である．

$$\begin{pmatrix} c_{1111} & c_{1122} & c_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ & c_{1111} & c_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ & & c_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ & & & c_{2323} & 0 & 0 \\ & & & & c_{2323} & 0 \\ & & & & & c_{1212} \end{pmatrix} \tag{222}$$

A.6.5　422 の場合

点群 422 の対称操作は x_3 軸に関する 4 回対称操作に加えて，x_1 軸，および x_1 軸と x_2 軸の二等分線（$x_3 = 0$ 面と $x_1 = x_2$ 面の交線）に関する 2 回回転対称操作である．後の二者については，

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である．左の変換行列から，$ijkl$ で 1 が奇数個の場合に $c_{ijkl} = 0$ となる．また，右の行列から 1 と 2 の交換が起こるので，2 が奇数個の場合に $c_{ijkl} = 0$ となる．点群 4 において，非 0 の成分で上記の条件を満たすのは，

$$c_{1112}, \qquad c_{2212},$$

である．その結果，弾性率テンソルの成分に関する結果は前節と同じとなり，成分の行列表示は式 (222) で表される．

A.6.6　$\bar{4}2m$ の場合

$\bar{4}$ は式 (70) に関して 4 と等価である．

次に，2 は x_1 軸に関する 2 回対称であるから，これまで述べたように 1 の個数が奇数のときに 0 となる．x_2 軸に関する 2 回対称でもあるから，2 の個数が奇数のときに 0 となる．これから，$c_{2221} = c_{1112} = 0$ となる．$x_1 = x_2$ と $x_3 = 0$ で決まる軸を 2 回対称軸とするときは，3 が偶数のときに 1 と 2 の交換がおこる．このことは，$4mm$，422，$4/mmm$ で導かれる関係に追加されるものはない．したがって，この場合も成分の行列表示は式 (222) で表される．

A.6.7　$4/mmm$ の場合

$4/mmm$ は $\frac{4}{m}\frac{2}{m}\frac{2}{m}$ の簡略表記で，$\frac{4}{m}$ は x_3 軸の回りの 4 回対称と $x_3 = 0$ 面に関する鏡映である．$\frac{2}{m}$ は，一つには，x_1 軸に関する 2 回対称と $x_1 = 0$ に関する鏡映である．もう一つは，$x_1 = x_2$ 面と $x_3 = 0$ 面が定める軸の回りの 2 回対称とこの軸に垂直な面に関する鏡映である．したがって，x_3 軸に関する 4 回対称以外の座標変換行列は，

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であり，これを満足する c_{ijkl} の $ijkl$ としては，1, 2, 3 のすべてが偶数の場合に非 0 になる．したがって，前節と同様に，$c_{1112} = 0$ と $c_{2212} = 0$ が追加され，テンソル成分は，A.6.4 の $4mm$，A.6.5 の 422，A6.6 の $\overline{4}2m$ の場合と等しくなる．行列表示は式 (222) で表される．

A.7　立方晶系（23，$m3$，432，$\overline{4}3m$，$m\overline{3}m$）

単位胞の中心に原点をとり，a 軸を x_1 軸方向に，他の 2 軸を x_2 軸，x_3 軸方向にとる．

A.7.1　23 の場合

これは x_3 軸の回りの 2 回回転対称と $< 111 >$ を軸とする 3 回回転対称である．それぞれの座標変換行列は

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

である．左の行列から，$ijkl$ に 3 が奇数のテンソル成分は 0 となる．また，右の行列から，添字は座標変換ごとに 1, 2, 3 と循環的に変わるから，1 および 2 が奇数のテンソル成分は 0 となる．以上から，非 0 テンソル成分は

$$c_{1111}，c_{1122}，c_{1133}，c_{2222}，c_{2233}，c_{3333}，c_{1212}，c_{1313}，c_{2323}$$

である．また，右の変換行列を用いて式 (70) の関係を用いると，

$$c_{1111} = c_{2222} = c_{3333} \tag{223}$$

$$c_{1122} = c_{2233} = c_{1133} \tag{224}$$

$$c_{1212} = c_{2323} = c_{1313} \tag{225}$$

という関係式が得られる．以上の結果を行列表示すると次式になる．

$$
\begin{pmatrix}
c_{1111} & c_{1122} & c_{1122} & 0 & 0 & 0 \\
 & c_{1111} & c_{1122} & 0 & 0 & 0 \\
 & & c_{1111} & 0 & 0 & 0 \\
 & & & c_{1212} & 0 & 0 \\
 & & & & c_{1212} & 0 \\
 & & & & & c_{1212}
\end{pmatrix}
\tag{226}
$$

独立な成分の数は 3 個である．

A.7.2 $m3$ の場合

$m3$ または $m\overline{3}$ は，$\frac{2}{m}\overline{3}$ の簡略表記である．x_3 軸を 2 回対称軸，$x_3=0$ を鏡映面とする．$\frac{2}{m}$ は反転と等価であるから，$\overline{3}$ は 3 回対称になって，3 と同等になる．これにより，x_1，x_2 も $\frac{2}{m}$ の 2 回対称軸になり，$x_1=0$ と $x_2=0$ も鏡映面になる．この三つの鏡映面の存在から，i,j,k,l で 1, 2, 3 が奇数個の場合は $c_{ijkl}=0$ となる．さらに，$\langle\ 111\ \rangle$ 方向を軸とする 3 回対称性から式 (223)–(225) が成り立つ．結局，弾性率テンソルは A.7.1 の 23 と場合と同じになり，行列表示は式 (226) である．

A.7.3 432 の場合

432 は，x_3 軸の回りの 4 回対称に加えて，$\langle\ 111\ \rangle$ 方向を軸とする 3 回対称，x_1 軸に関する 2 回対称である．3 回対称から，x_2 軸と x_3 軸に関する 2 回対称も成り立つ．このうち，3 個の 2 回対称軸と 3 回対称軸から，座標変換行列は A.7.1 の 23 の場合と同じになる．4 回対称性からは，1 と 2 が偶数個の場合，c_{ijkl} は添字 1 と 2 の交換で不変である．3 回対称性から，2 と 3，3 と 1 の交換でも同じ関係が成り立つ．A.7.1 の 23 の結果では，非 0 テンソル成分では，添字の 1, 2, 3 について偶数個，対称であるから，すでに上の条件はすべて満たされている．したがって，432 の場合も A.7.1 の 23 の場合と同じになり，行列表示は式 (226) である．

A.7.4 $\overline{4}3m$ の場合

A.6.2 節で示したように，c_{ijkl} に関して，$\overline{4}$ は 4 の場合と同じである．したがって，$\overline{4}3m$ の 3 と $\overline{4}$ の二つの対称性から，A.7.3 節と同じ理由により，A.7.1 節の 23 の結果が導かれる．m は，$x_1=x_2$ 面に関する鏡映である．したがって，$ijkl$ のうち 1 と 2 の交換となる．3 回対称性から，2 と 3 の交換，および 3 と 1 の交換も含まれる．この交換は式 (223)–(225) の関係に含まれるので，A.7.1 節の 23 の結果に変更を加えるものではない．すなわち，得られる弾性テンソルの行列表示は式 (226) である．

A.7.5 $m\overline{3}m$ の場合

$m\overline{3}m$ は $\frac{4}{m}\overline{3}\frac{2}{m}$ の簡略表記である．1 番目の m は x_3 軸に関する 4 回軸回転と $x_3=0$ 面に関する鏡映である．後者から，$ijkl$ における 3 の個数は偶数個が非 0 成分であること，前者からは，A.6.1 の場合と同じく，3 の個数が偶数個の場合に非 0 となる．$\overline{3}$ からは，添字の 1, 2, 3 の対称性が要求される．したがって，1, 2, 3 はすべて偶数でなければならない．以上は，A.7.1 で得られた条件と同じである $\frac{2}{m}$ は $x_1=x_2$ 面と $x_3=0$ 面の作る交線を軸とする 2 回対称性とそれに直交する $x_= -x_2$ 面に関する鏡映である．前者からは 1 と 2 の交換，後者からは A.6.1 節で示したのと同じ $ijkjl$ のうち 3 が奇数個の場合に $c_{ijkl}=0$ となることが導かれる．さらに

3 回対称性から，上のことが 1, 2, 3 について対称的に成り立つ．2 個目の m は $x_1 = x_2$ 面に関する鏡映である．以上のことは A.7.1 節で導かれた結果の中に含まれるので，A.7.1 節の 23 の結果に変更を加えるものではない．すなわち，得られる弾性テンソルの行列表示は式 (226) である．

A.8 等方体

等方体であるので，任意の回転軸，任意の角度の回転，任意の面に関する鏡映，および反転に対して弾性率テンソルは変化しない．そこで，x_3 軸の回りの任意の角度 θ の回転を考える．座標変換座標は

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である．式 (70) から，$\cos\theta = c$，$\sin\theta = s$ と略記して，

$$\begin{aligned} c_{1111} = {} & c^4 c_{1111} + c^3 s c_{1112} + c^3 s c_{1121} + c^2 s^2 c_{1122} + c^3 s c_{1211} + c^2 s^2 c_{1212} + c^2 s^2 c_{1221} + c s^3 c_{1222} \\ & + c^3 s c_{2111} + c^2 s^2 c_{2112} + c^2 s^2 c_{2121} + c s^3 c_{2122} + c^2 s^2 c_{2211} + c s^3 c_{2212} + c s^3 c_{2221} + s^4 c_{2222} \end{aligned}$$

である．等方体であるから立方晶系の式 (223)〜(226) も成り立つ．それを用いて等しい成分をまとめ，0 となる成分を取り除くと，

$$c_{1111} = (c^4 + s^4) c_{1111} + 4c^2 s^2 c_{1212} + 2c^2 s^2 c_{1122}$$

となる．$c^4 + s^4 - 1 = c^4 + s^4 - (c^2 + s^2)^2 = -2c^2 s^2$ であるから，

$$-2c^2 s^2 c_{1111} + 4c^2 s^2 c_{1212} + 2c^2 s^2 c_{1122} = 0$$

となり，結局，

$$c_{1111} c_{1212} = \frac{1}{2}(c_{1111} - c_{1122}) \tag{227}$$

となる．

その他の座標軸に関する回転は，式 (223)〜(225) により，x_3 軸の場合と等価である．したがって，任意の軸のまわりの任意の角度の回転に関して式 (227) が成り立つ．反転は，2 回軸の回転とその軸に垂直な面に関する鏡映である．これは，立方晶系 $m3m$ で満たされているので，等方体でも成り立つ．任意の面に関する鏡映は，その面に垂直な直線が座標軸になるように回転した後に，2 回軸の回転および反転をほどこして得られる．任意の回転は式 (227) に反映されている．結局，等方体の弾性率テンソルの独立成分は式 (223)〜(227) により与えられ，そのの行列表示は次式で得られる．

$$\begin{pmatrix} c_{1111} & c_{1122} & c_{1122} & 0 & 0 & 0 \\ & c_{1111} & c_{1122} & 0 & 0 & 0 \\ & & c_{1111} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{2}(c_{1111} - c_{1122}) & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1}{2}(c_{1111} - c_{1122}) & 0 \\ & & & & & \frac{1}{2}(c_{1111} - c_{1122}) \end{pmatrix} \tag{228}$$

独立な成分は 2 個である．

B　弾性率テンソルおよび弾性コンプライアンステンソルの行列表記（ボイト表記）

第 3 節で述べたように，弾性率テンソルおよび弾性コンプライアンステンソルの成分の添字に対称性がある．そのため，

$$\begin{array}{cccccc} (1,1) & (2,2) & (3,3) & (2,3) & (3,1) & (1,2) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array}$$

という行列表記（ボイト (Voigt) 表記）を使えば 2 階テンソルが 6 次元ベクトルに，4 階テンソルが 6 次正方行列になる．歪テンソルと応力テンソルは，式 (46) と式 (47) の関係式を用いて 6 次元ベクトルに表記できる．弾性率テンソルの場合は，式 (48) の成分間の関係を用いて行列になる．ただし，弾性コンプライアンステンソルの場合は，式 (49) を用いるが，係数が式 (48) と異なるために，行列表現を用いたときに，独立成分の関係式が弾性率テンソルの場合と異なる場合が出てくる．これを具体的に以下に示す．

三方晶系と六方晶系の場合，

$$c_{1212} = \frac{1}{2}(c_{1111} - c_{1122}) \tag{229}$$

という関係が得られた．この関係は弾性コンプライアンステンソルの場合も同じである．すなわち，

$$s_{1212} = \frac{1}{2}(s_{1111} - s_{1122}) \tag{230}$$

である．行列表記を用いると，式 (48) から，

$$c_{1212} = c_{66} \tag{231}$$

$$c_{1111} = c_{11} \tag{232}$$

$$c_{1122} = c_{12} \tag{233}$$

であるから，

$$c_{66} = \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12}) \tag{234}$$

となる．一方，弾性コンプライアンステンソルの場合には，式 (49) から，

$$s_{1212} = \frac{1}{4}s_{66} \tag{235}$$

$$s_{1111} = s_{11} \tag{236}$$

$$s_{1122} = s_{12} \tag{237}$$

であるから，これを式 (229) に代入すると，

$$s_{66} = 2(s_{11} - s_{12}) \tag{238}$$

となることがわかる．このように，行列表記にすると弾性率と弾性コンプライアンスの成分に異なる部分が生じる．

他には，三方晶系（点群 3 と $\overline{3}$）の $(4, 6)$ 成分と $(5, 6)$ 成分の場合，あるいは三方晶系（点群 32，$\overline{3}m$，$3m$）の $(5, 6)$ 成分の場合がある．三方晶系（点群 3 と $\overline{3}$）の場合，式 (208) から，

$$c_{2223} = -c_{1123}, \qquad s_{2223} = -s_{1123} \tag{239}$$

$$c_{1312} = c_{1123}, \qquad s_{1312} = s_{1123} \tag{240}$$

$$c_{1113} = -c_{2213}, \qquad s_{1113} = -s_{2213} \tag{241}$$

$$c_{2312} = c_{2213}, \qquad s_{2312} = s_{2213} \tag{242}$$

である．これに式 (48) と式 (49) の関係式を用いると，

$$c_{24} = -c_{14}, \qquad \frac{1}{2}s_{24} = -\frac{1}{2}s_{14} \tag{243}$$

$$c_{56} = c_{14}, \qquad \frac{1}{4}s_{56} = s_{14} \tag{244}$$

$$c_{15} = -c_{25}, \qquad \frac{1}{2}s_{15} = -\frac{1}{2}s_{25} \tag{245}$$

$$c_{46} = c_{25}, \qquad \frac{1}{4}s_{46} = \frac{1}{2}s_{25} \tag{246}$$

となり，その中で，次の成分が弾性率の成分と異なってくる．

$$s_{56} = 2s_{14} \tag{247}$$

$$s_{46} = 2s_{25} \tag{248}$$

三方晶系（点群 32，$\bar{3}m$，$3m$）の場合も同様である．

以下には 7 つの結晶系における弾性率および弾性コンプライアンス成分を共通な行列表記を示す [3, 4]．この表では，0 となる成分を $\cdot$ で，0 でない独立な成分を $\bullet$ で，符号が反対で値が同じ成分を $\circ$ で表し，大きさが同じ成分は実線で結ぶ．また，弾性率および弾性コンプライアンスで異なる成分に関しては，式 (234) と式 (238) は $\times$ で表し，式 (247) と式 (248) は $\odot$ で表す．

B.1 三斜晶系（1，$\bar{1}$）

$$1, \bar{1}$$

$$\begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ & & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ & & & \bullet & \bullet & \bullet \\ & & & & \bullet & \bullet \\ & & & & & \bullet \end{pmatrix}$$

図 1: 三斜晶系（1，$\bar{1}$）の弾性率 c_{ij} の行列表記

B.2 単斜晶系（2，$2/m$，m）

$$2\,,\,2/m\,,\,m \;\;(\parallel x_2) \qquad\qquad 2\,,\,2/m\,,\,m \;\;(\parallel x_3)$$

$$\begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \cdot & \bullet & \cdot \\ & \bullet & \bullet & \cdot & \bullet & \cdot \\ & & \bullet & \cdot & \bullet & \cdot \\ & & & \bullet & \cdot & \bullet \\ & & & & \bullet & \cdot \\ & & & & & \bullet \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \cdot & \cdot & \bullet \\ & \bullet & \bullet & \cdot & \cdot & \bullet \\ & & \bullet & \cdot & \cdot & \bullet \\ & & & \bullet & \bullet & \cdot \\ & & & & \bullet & \cdot \\ & & & & & \bullet \end{pmatrix}$$

図 2: 単斜晶系（2，$2/m$，m）の弾性率 c_{ij} 行列表記

B.3 斜方晶系（222，$2mm$，mmm）

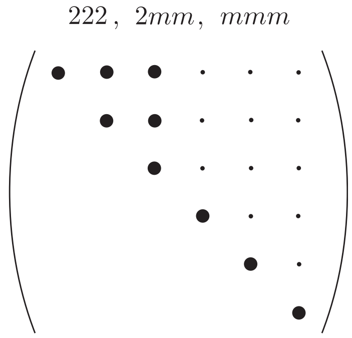

図 3: 斜方晶系（222, $2mm$, mmm）の弾性率 c_{ij} 行列表記

B.4 三方晶系（3，$\overline{3}$，32，$3m$，$\overline{3}m$）

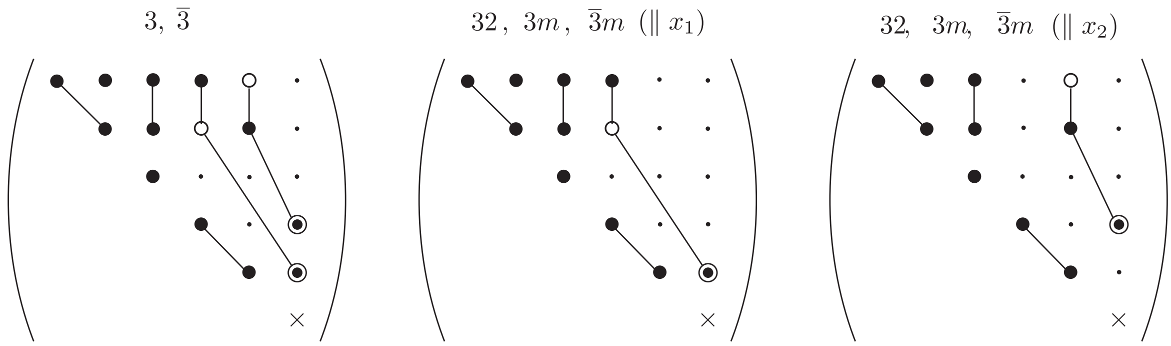

図 4: 三方晶系（3, $\overline{3}$, 32, $3m$, $\overline{3}m$）の弾性率 c_{ij} 行列表記．$\times$ は $c_{66} = \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12})$, $s_{66} = 2(s_{11} - s_{12})$. $\odot$ は $c_{56} = c_{14}$, $c_{46} = c_{25}$, $s_{56} = 2s_{14}$, $s_{46} = 2s_{25}$.

B.5 六方晶系（6，$\overline{6}$，$6/m$，622，$6mm$，$\overline{6}m2$），$6/mmm$

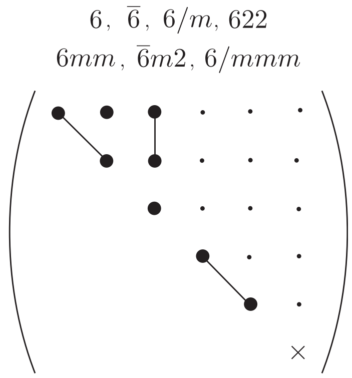

図 5: 六方晶系 (6, $\overline{6}$, $6/m$, 622, $6mm$, $\overline{6}m2$ の弾性率 c_{ij} 行列表記．$\times$ は $c_{66} = \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12})$, $s_{66} = 2(s_{11} - s_{12})$.

B.6　正方晶系（4，$\overline{4}$，$4/m$，422，$4mm$，$\overline{4}2m$，$4/mmm$）

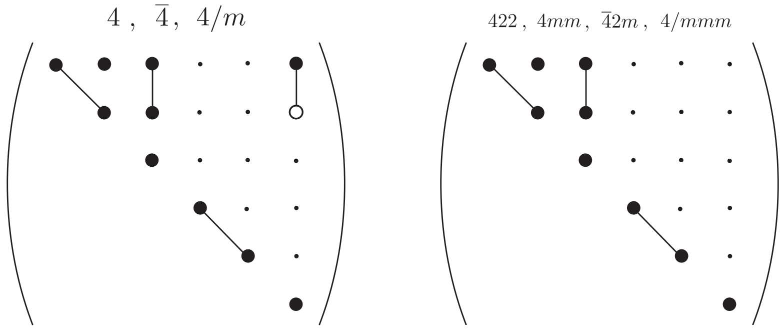

図 6: 正方晶系（4, $\overline{4}$, $4/m$, 422, $4mm$, $\overline{4}2m$, $4/mmm$）の弾性率 c_{ij} 行列表記

B.7　立方晶系（23，$m\overline{3}$，432，$\overline{4}3m$，$m\overline{3}m$）

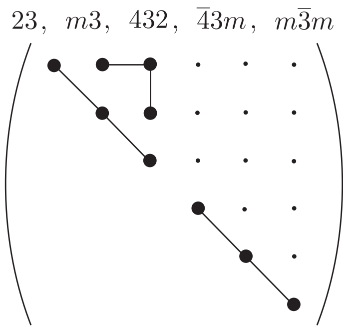

図 7: 立方晶系（23, $m\overline{3}$, 432, $\overline{4}3m$, $m\overline{3}m$）の弾性率 c_{ij} 行列表記

B.8　等方体

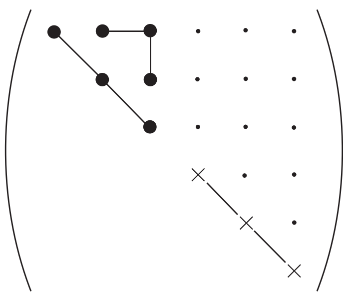

図 8: 等方体の弾性率 c_{ij} 行列表記．$\times$ は $c_{66} = \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12})$，$s_{66} = 2(s_{11} - s_{12})$.

以上