

# 異常ホール効果電圧角度依存性への垂直法最小二乗フィッティング

2014.12.7 鈴木 実

## 磁場 (試料) 回転によるホール測定

ホール効果の測定では、試料の対称性が損なわれるほど、ホール電圧端子間に offset 電圧が生じてホール電圧に付加されるために、その付加電圧の分離が非常に重要である。ホール測定用に成形した試料を用いても、この付加電圧はホール電圧に比較して通常3桁ほど大きくなる。2桁大きい程度ならかなり正確にホール電圧を測定することができる。通常、ここまで offset 電圧を小さくしてから、磁場を反転させてその差分をホール電圧として測定する。

ホール測定を困難にするもう1つの要因として、電圧のドリフトが挙げられる。これは昔なら測定器のドリフトが大きく、これを少なくするために、スイッチを入れてから30分程度ウォームアップしてから測定しなければならなかった。試料の抵抗が温度依存性を持つ場合は、温度のドリフトで電圧がドリフトするから、温度を一定にするために温度制御に特別に正確さが必要とされる。磁場をスイープしながら反転して、後で差分を取る場合、時間が掛かるので、温度のドリフトは極力小さくしなければならない。

物質によっては大きな磁気抵抗が生じることがあり、この磁気抵抗の増分による付加電圧がホール電圧よりも大きくなると offset 電圧の抑圧が難しくなりホール電圧の測定の精度が悪くなる。このような時に磁場を回転する方法を用いれば、ホール電圧の測定をより精度高く行うことができる。試料面の法線が磁場方向から回転している角度を  $\theta$  とすると、ホール電圧は  $\cos\theta$  に比例するのに対して、磁気抵抗は  $\cos 2\theta$  に比例するので最小二乗フィッティングなどでデータ処理することによりホール電圧成分を取り出すことができる。

一般に、磁気抵抗は  $\cos 2\theta$  に比例するのであるが、巨大磁気抵抗材料などの強磁性体で磁気抵抗が大きい物質では、磁気異方性が存在するので、磁化の方向が磁場の方向よりも磁化容易面側にずれるということが起こる。このような場合には、磁気抵抗の角度依存性が単純な  $\cos 2\theta$  から著しくずれてくるので、このような場合には磁気抵抗の部分を磁気抵抗の角度依存性から差し引くには数値計算に頼る必要がある。したがって、このような場合は、数値計算を必要とするホール電圧および磁気抵抗電圧を表す関数への垂直法による最小二乗フィッティングによるデータ処理が必要になる。このような場合の最小二乗フィッティング処理は市販のソフトウェアなどでは処理が困難な場合がある。以下では、上に述べたような数値計算を必要とするような関数を含む一般的な関数への最小二乗回帰の例として、巨大磁気抵抗材料の磁場回転 (試料回転) によるホール測定に必要となる最小二乗関数回帰について具体的に述べる。

なお、磁気抵抗が単純な  $\cos 2\theta$  からずれることに関しては本 HP の 2014/12/6 のエントリーを、垂直法による最小二乗法の一般式については同じく本 HP の 2008/11/14 のエントリーを参照していただきたい。

## ホール端子間電圧の角度依存性を表す一般的な関数

試料または磁場を回転するホール測定を考える。磁場  $\mathbf{H}$  の回転の軸は、試料面内にあつて  $z$  軸に直交する直線を考える<sup>1</sup>。また、試料面の法線は  $z$  軸から  $a_6$  deg だけ傾いているとする。つまり、回転の軸は  $y$  軸方向にあり、磁場は  $xz$  面内で回転する。(試料が回転する場合も同じように扱える。) 磁場  $\mathbf{H}$  の  $z$  軸からの回転角を  $x$  deg とし、試料面法線と  $\mathbf{H}$  の角度を  $\theta$  rad とする。そうすると、

$$\theta = c(x - a_6) \quad (1)$$

<sup>1</sup>大変紛らわしいが、この後で  $x$  を角度変数として扱うので、軸の名は  $x, y, z$  というローマン体で表すことにする。

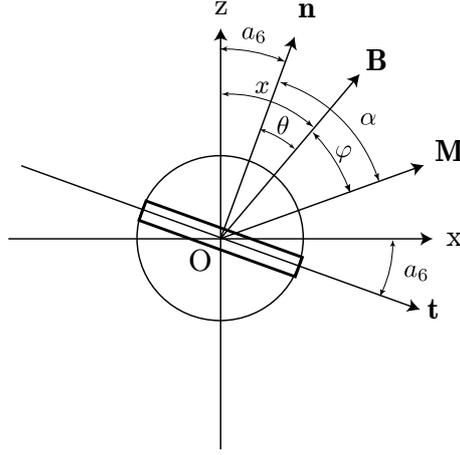


図 1: 試料の法線  $\mathbf{n}$ , 磁場  $\mathbf{B}$ , 磁化  $\mathbf{M}$  とその間の角度.  $\theta$  は  $\mathbf{n}$  と磁場  $\mathbf{B}$  の間の角度.  $\alpha$  は  $\mathbf{n}$  と磁場  $\mathbf{M}$  の間の角度.  $\varphi$  は  $\mathbf{B}$  と磁場  $\mathbf{M}$  の間の角度である. 以上の角度の単位は radian である.

ただし,  $c$  は radian と degree の変換係数で,  $c = \pi/180$  である. 試料面法線と磁化  $\mathbf{M}$  の間の角度を  $\alpha$ , 磁場  $\mathbf{H}$  磁化  $\mathbf{M}$  の間の角度を  $\varphi$  とすると,

$$\alpha = \theta + \varphi \quad (2)$$

である. 本 HP の 2014/12/6 のエントリーより,  $\theta$  と  $\varphi$  の関係は,

$$\sin \varphi = a_5 \sin 2\alpha = a_5 \sin[2(\theta + \varphi)] \quad (3)$$

で与えられる. これを用いると, 磁気抵抗  $\Delta\rho(\mathbf{H})$  は

$$\Delta\rho = \Delta\rho_0 \cos 2\alpha = \Delta\rho_0 \cos[2(\theta + \varphi)] \quad (4)$$

という角度依存性を持つ [1]. さらに, ホール電圧として,  $a_1 \cos \theta$  がある. それ以外にも, 3 倍高調波成分  $a_2 \cos 3\theta$ , ドリフト成分  $a_3 x$  と定数成分  $a_4$  が考えられる. したがって, ホール端子間電圧  $y$  が持つと考えられる関数形としては

$$F(x, y, a_0, \dots, a_6) = a_0 \cos \theta + a_1 \cos[2(\theta + \varphi)] + a_2 \cos 3\theta + a_3 x + a_4 - y = 0 \quad (5)$$

となる. ただし,  $\cos 4\theta$  以上の高次の項は実際非常に小さいので無視した. 式 (3) と (24) を変数  $x, y$  とパラメータ  $a_0, \dots, a_6$  を用いて表すと, 次のようになる.

$$F(x, y, a_0, \dots, a_6) = a_0 \cos[c(x - a_6)] + a_1 \cos[2\{c(x - a_6) + \varphi\}] + a_2 \cos[3c(x - a_6)] + a_3 x + a_4 - y. \quad (6)$$

ただし,  $\omega$  は

$$\sin \varphi = a_5 \sin[2\{c(x - a_6) + \varphi\}] \quad (7)$$

である. 式 (6) とデータ  $(x_i, y_i)$  ( $i = 1, \dots, N$ ) の二乗平均距離が最小になるようにパラメータ  $a_0, \dots, a_6$  を決定する. 得られた  $a_0$  が最小二乗法により得られるホール電圧になる.

## 垂直法最小二乗計算

垂直法最小二乗計算 [2] ではパラメータ  $a_0, \dots, a_6$  に初期値が必要である. そこで, 式 (6) で,  $a_5 = a_6 = 0$  とし,  $\varphi = 0$  の場合を単純な最小二乗法によりパラメータ  $a_0, \dots, a_4$  を求め, これを  $a_5 = a_6 = 0$  と合わせて初期値とする. この初期値を  $a_0^0, \dots, a_6^0$  としよう.

次のステップは  $a_0^0, \dots, a_6^0$  を用いて, より真の値に近い  $a_0, \dots, a_6$  を求めることである. その時, 2つの組の差分  $a_0 - a_0^0, \dots, a_6 - a_6^0$  は次の連立方程式で与えられる. すなわち,

$$\begin{pmatrix} A_{00} & \cdots & A_{06} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{60} & \cdots & A_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 - a_0^0 \\ \vdots \\ a_6 - a_6^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_0 \\ \vdots \\ B_6 \end{pmatrix} \quad (8)$$

という連立方程式である. ただし,

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{\alpha_k^2 + \beta_k^2} F_i(k) F_j(k) \quad (9)$$

$$B_i = - \sum_{k=1}^N \frac{1}{\alpha_k^2 + \beta_k^2} F_i(k) F(k) \quad (10)$$

$$F_i(k) = \frac{\partial F}{\partial a_i}(x_k, y_k, a_0^0, \dots, a_6^0) \quad (11)$$

$$F(k) = F(x_k, y_k, a_0^0, \dots, a_6^0) \quad (12)$$

$$\alpha_k = \frac{\partial F}{\partial x}(x_k, y_k, a_0^0, \dots, a_6^0) \quad (13)$$

$$\beta_k = \frac{\partial F}{\partial y}(x_k, y_k, a_0^0, \dots, a_6^0) \quad (14)$$

である.

この方程式 (8) を解いた結果から次の近似値が求められ, これを繰り返すことで真の値に十分近い近似値が得られる. 実際には, ほとんどの場合, 5 回程度繰り返せば収束する.

式 (11) から (14) の計算は式 (6) および (7) から直ぐに得られて,

$$F_0(k) = \cos[c(x_k - a_6^0)] \quad (15)$$

$$F_1(k) = \cos 2[c(x_k - a_6^0) + \varphi] \quad (16)$$

$$F_2(k) = \cos 3[c(x_k - a_6^0)] \quad (17)$$

$$F_3(k) = x_k \quad (18)$$

$$F_4(k) = 1 \quad (19)$$

$$F_5(k) = -2a_1^0 \sin 2\alpha \frac{\sin 2\alpha}{\cos \varphi - 2a_5^0 \cos 2\alpha} \quad (20)$$

$$F_6(k) = ca_0^0 \sin[c(x_k - a_6^0)] + 2ca_1^0 \sin 2\alpha \frac{\cos \varphi}{\cos \varphi - 2a_5^0 \cos 2\alpha} + 3ca_3^0 \sin[3c(x_k - a_6^0)] \quad (21)$$

$$\alpha_k = -ca_0^0 \sin[c(x_k - a_6^0)] - 2ca_1^0 \sin 2\alpha \frac{\cos \varphi}{\cos \varphi - 2a_5^0 \cos 2\alpha} - 3ca_3^0 \sin[3c(x_k - a_6^0)] + a_3^0 \quad (22)$$

$$\beta_k = -1 \quad (23)$$

となる. 計算は行列の対角化で求められる. この式を用いて実際に垂直法最小二乗フィッティングを実施した例を図 1 および図 2 に示す. また, 本結果を得たプログラム例を本 HP の別のエントリー [3] にプログラム例 1 として示す.

異常ホール効果のホール抵抗率は  $\rho_H = a_0 + a_2$  として与えられる.

## もう1つの回帰関数を用いた垂直法最小二乗計算の例

式 (24) で,  $a_2 \cos 3\theta$  を  $a_2 \cos \alpha$  とした場合には, 回帰関数は,

$$F(x, y, a_0, \dots, a_6) = a_0 \cos \theta + a_1 \cos[2(\theta + \varphi)] + a_2 \cos \alpha + a_3 x + a_4 - y = 0 \quad (24)$$

となる. その時,

のプログラム例を同じエントリーのプログラム例2として示した. この場合は式 (20)–(22) に少し変更が必要である. 図2に相当するフィッティング例を図3に示す. これから明らかなようにほぼ同じ制度のフィッティングが可能である. したがって得られるホール抵抗率の値もかなり近い.

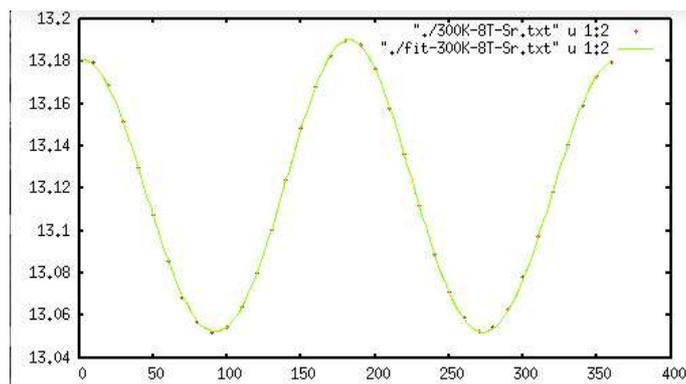


図 2: LSMO 薄膜 300K, 8T におけるホール電圧角度依存性の実験結果と垂直法最小二乗フィッティング結果

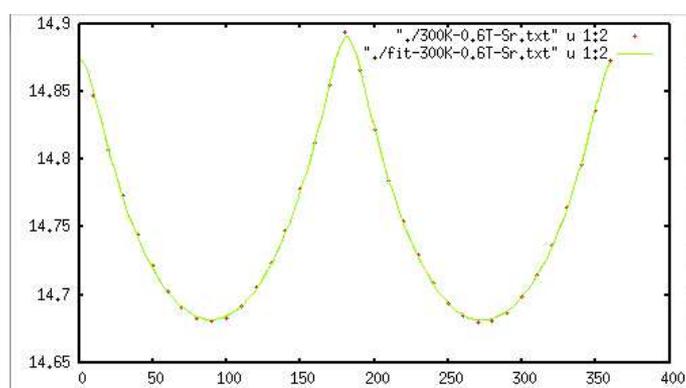


図 3: LSMO 薄膜 300K, 0.6T におけるホール電圧角度依存性の実験結果と垂直法最小二乗フィッティング結果

## 文献

[1] N. Naftalis, N. Haham, J. Hoffman, M. S. J. Marshall, C. H. Ahn, and L. Klein, Phys. Rev. B **86**, 184402 (2012).

[2] 2014 年 12 月 6 日のエントリー

[3] 2014 年 12 月 7 日のエントリー

以上

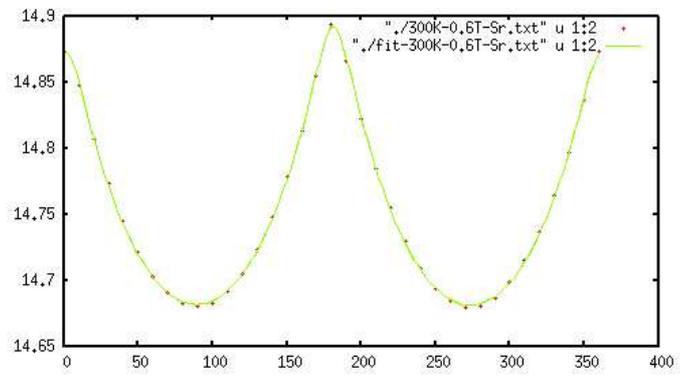


図 4: LSMO 薄膜 300K, 0.6T におけるホール電圧角度依存性の実験結果と垂直法最小二乗フィッティング結果,  $a_2 \sin \alpha$  の場合.