差分商を用いたエルミート補間多項式の表現（ニュートン形式）

2016.5.17　　鈴木　実

1　はじめに

エルミート補間多項式は差分商で表される場合が多い．ニュートン形式と呼ばれる．しかし，このように表されることは必ずしも自明ではない．そこで，この表現を確認してみよう．最初は，ルジャンドルの補間多項式が同様な差分商によって表されることを示して，これを用いて上のことを示す．証明に必要な差分商に関する公式も合わせて示す．

2　差分商の諸関係

2.1　ニュートン形式ルジャンドル補間多項式（ルジャンドル補間多項式の差分商を用いた表現）

定理 1 (再掲)

$f(x)$ が $x = x_0, \cdots, x_n$ で $f_0 = f[x_0], f_1 = f[x_1], \cdots, f_n = f[x_n]$ の値をとる n 次の多項式なら $f(x)$ は次のように表される．これはルジャンドルの補間多項式の差分商による表現である．

$$\begin{aligned} f(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \cdots \\ + f[x_0, x_1, \cdots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \cdots (x_{n-1}) \end{aligned} \tag{1}$$

[例]

$$f(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x_- x_2) \tag{2}$$

2.2　差分商の縮約

$x_0, x_1, \cdots, x_n$ が等間隔の場合には以下の様な差分商の縮約が可能である．通常，差分商の [　] 内の引数は関数値であるが，これを拡大して関数値の代わりに差分商を用いて入れ子構造にすると次のような簡略した表現が可能である．たとえば，

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{1}{x_0 - x_3}\{f[x_0, x_1, x_2] - f[x_1, x_2, x_3]\} \tag{3}$$

であるが，これを差分商の入れ子で表現すると，

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = f[f[x_0, x_1, x_2], f[x_1, x_2, x_3]] \tag{4}$$

である．展開した時の分母は前の引数である差分商の最初の引数値 (x_0) から後の引数である差分商の最後の引数値 (x_3) を引いたものである．上の例では，$x_0 - x_3$ である．一般に，次のことが成り立つ．

定理 **3**

$x_0, x_1, \cdots, x_n$ が h の等間隔にあるとき，すなわち $x_i = x_0 + ih$ のとき，次の関係式が成り立つ．

$$\begin{aligned}
&f[x_0, x_1, \cdots, x_n] \\
=&f[f[x_0, x_1], f[x_1, x_2], \cdots, f[x_{n-1}, x_n]] \quad (5)\\
=&f[f[x_0, x_1, x_2], f[x_1, x_2, x_3], \cdots, f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]] \quad (6)\\
&\vdots \\
=&f[f[x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}], f[x_1, x_2, \cdots, x_n],] \quad (7)
\end{aligned}$$

関数名を省略しても構わない時には次のような簡略表記も可能である．

$$\begin{aligned}
&[x_0, x_1, \cdots, x_n] \\
=&[[x_0, x_1], [x_1, x_2], \cdots, [x_{n-1}, x_n]] \quad (8)\\
=&[[x_0, x_1, x_2], [x_1, x_2, x_3], \cdots, [x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]] \quad (9)\\
&\vdots \\
=&[[x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}], [x_1, x_2, \cdots, x_n],] \quad (10)
\end{aligned}$$

この公式を用いれば，差分商は以下の様なツリー構造で計算することができる．

$$\begin{array}{cccccccc}
f[x_0, x_1, x_2, x_3] & & & & \frac{1}{3!h^3}\Delta^3 f(x_0) & & & \\
f[x_0, x_1, x_2] & & & \frac{1}{2!h^2}\Delta^2 f(x_0) & & \frac{1}{2!h^2}\Delta^2 f(x_1) & & \\
f[x_0, x_1] & & \frac{1}{h}\Delta f(x_0) & & \frac{1}{h}\Delta f(x_1) & & \frac{1}{h}\Delta f(x_2) & \\
f[x_0] & f(x_0) & & f(x_1) & & f(x_2) & & f(x_3)
\end{array}$$

ただし，

$$\begin{aligned}
x_i &= x_0 + ih \\
\Delta f(x_i) &= f(x_{i+1}) - f(x_i) \\
\Delta^2 f(x_i) &= \Delta f(x_{i+1}) - \Delta f(x_i) \\
&\vdots \\
\Delta^{k+1} f(x_i) &= \Delta^k f(x_{i+1}) - \Delta^k f(x_i) \\
f[x_0, x_1, \cdots, x_k] &= \frac{1}{k!h^k}\Delta^k f(x_i) \quad (11)
\end{aligned}$$

である．

2.3 エルミート補間多項式の差分商を用いた表現

定理 4

$x = x_i (i = 0, \cdots, n)$ で f_i および r 階微分係数 $f_i^{(r)} (r = 0, \cdots, r_i)$ の値をとる N 次の多項式 $f(x)$ は次のように表される．

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f[x_0] \\
&\quad + f[x_0, x_0](x - x_0) \\
&\quad + \cdots \\
&\quad + f[\overbrace{x_0, \cdots, x_0}^{r_0+1}](x - x_0)^{r_0} \\
&\quad + f[\overbrace{x_0, \cdots, x_0}^{r_0+1}, x_1](x - x_0)^{r_0+1} \\
&\quad + \cdots \\
&\quad + f[\overbrace{x_0, \cdots, x_0}^{r_0+1}, \cdots, \overbrace{x_n, \cdots, x_n}^{r_n+1}](x - x_0)^{r_0+1} \cdots (x - x_{n-1})^{r_{n-1}+1}(x - x_n)^{r_n} \\
&\quad = \sum_{j=0}^{n-1} f[\overbrace{x_0 \cdots x_0}^{r_0+1} \cdots \overbrace{x_j \cdots x_j}^{r_j+1}](x - x_0)^{r_0+1} \cdots (x - x_j)^{r_j+1} \\
&\quad + f[\overbrace{x_0 \cdots x_0}^{r_0+1} \cdots \overbrace{x_n \cdots x_n}^{r_n+1}](x - x_0)^{r_0+1} \cdots (x - x_{n-1})^{r_{n-1}+1}(x - x_n)^{r_n}
\end{aligned}
\tag{12}
$$

ただし，

$$
N = n + \sum_{j=0}^{n} r_j, \tag{13}
$$

および，

$$
f[\overbrace{x_i, \cdots, x_i}^{r+1}] = \frac{1}{r!} f_i^{(r)} \tag{14}
$$

である．

式 (14) は与えられた微分係数と差分商の間の関係式である．

式 (12) はすなわちエルミート補間多項式の差分商による表現（ニュートン形式）である．

[例 1] $f_0, f_0^{(1)}, f_1, f_1^{(1)}, f_2, f_2^{(1)}$ が与えられているとき，

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f[x_0] + f[x_0, x_0](x - x_0) + f[x_0, x_0, x_1](x - x_0)^2 + f[x_0, x_0, x_1, x_1](x - x_0)^2(x - x_1) \\
&\quad + f[x_0, x_0, x_1, x_1, x_2](x - x_0)^2(x - x_1)^2 + f[x_0, x_0, x_1, x_1, x_2, x_2](x - x_0)^2(x - x_1)^2(x - x_2)
\end{aligned}
\tag{15}
$$

[例 2] $f_0, f_0^{(1)}, f_0^{(2)}, f_1, f_1^{(1)}, f_1^{(2)}, f_2, f_2^{(1)}$ が与えられているとき，

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f[x_0] + f[x_0, x_0](x - x_0) + f[x_0, x_0, x_0](x - x_0)^2 + f[x_0, x_0, x_0, x_1](x - x_0)^3 \\
&\quad + f[x_0, x_0, x_0, x_1, x_1](x - x_0)^3(x - x_1) + f[x_0, x_0, x_0, x_1, x_1, x_1](x - x_0)^3(x - x_1)^2 \\
&\quad + f[x_0, x_0, x_0, x_1, x_1, x_1, x_2](x - x_0)^3(x - x_1)^3 \\
&\quad + f[x_0, x_0, x_0, x_1, x_1, x_1, x_2, x_2](x - x_0)^3(x - x_1)^3(x - x_2)
\end{aligned}
\tag{16}
$$

3　前節定理の証明

3.1　定理 1 の証明

以前のエントリーの証明法 [1] とは異なる．見通しは良いと思う．定理 1 の証明には式 (1) で $f(x_i) = f_i$ を示せばよい．$x = x_i$ を式 (1) の右辺に代入すると，第 $i+1$ 項以降は 0 となり消える．最高次の項は第 i 項でその係数は次の差分商である．

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_i] \tag{17}$$

定理 2（前回のエントリー [1]）より差分商の x_j の順番を替えても値は変わらない．そこで，上の差分商を次のように変形する．

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_i] = f[x_{i-1}, x_{i-2}, \cdots, x_1, x_0, x_i] \tag{18}$$

差分商の定義から，上の式の右辺を以下のように変形しよう．簡単のために差分商の表記を f を省略して簡単に $f[x_0, x_0, x_1, x_2] = [x_0, x_0, x_1, x_2]$ と書くことにする．差分商を展開して第 2 項をさらに展開するという操作を繰り返すと，

$$\begin{aligned}
&[x_{i-1}, x_{x-2}, \cdots, x_1, x_0, x_i] \\
=&\frac{1}{x_{i-1} - x_i}\left\{[x_{i-1}, \cdots, x_0] - \frac{1}{x_{i-2} - x_i}\left\{[x_{i-2}, \cdots, x_0] - \frac{1}{x_{i-3} - x_i}\{[x_{i-3}, \cdots, x_0]\right.\right. \\
-&\frac{1}{x_{i-4} - x_i}\{\cdots \\
-&\left.\left.\frac{1}{x_3 - x_i}\left\{[x_3, x_2, x_1, x_0] - \frac{1}{x_2 - x_i}\left\{[x_2, x_1, x_0] - \frac{1}{x_1 - x_i}\left\{[x_1, x_0] - \frac{1}{x_0 - x_i}([x_0] - [x_i])\right\}\cdots\right\}\right.\right.\right.
\end{aligned} \tag{19}$$

となる．右辺の差分商の引数を逆に並べ直し，かつ左辺に式 (18) を適用して元に戻すと

$$\begin{aligned}
&[x_0, x_1, \cdots, x_{i-2}, x_{i-1}, x_i] \\
=&\frac{1}{x_{i-1} - x_i}\left\{[x_0, \cdots, x_{i-1}] - \frac{1}{x_{i-2} - x_i}\left\{[x_0, \cdots, x_{i-2}] - \frac{1}{x_{i-3} - x_i}\{[x_0, \cdots, x_{i-3}]\right.\right. \\
-&\frac{1}{x_{i-4} - x_i}\{\cdots \\
-&\left.\left.\frac{1}{x_3 - x_i}\left\{[x_0, x_1, x_2, x_3] - \frac{1}{x_2 - x_i}\left\{[x_0, x_1, x_2] - \frac{1}{x_1 - x_i}\left\{[x_0, x_1] - \frac{1}{x_0 - x_i}([x_0] - [x_i])\right\}\cdots\right\}\right.\right.\right.
\end{aligned} \tag{20}$$

となる．

この式の両辺に $(x_i - x_0)(x_i - x_1)(x_i - x_2)\cdots(x_i - x_{i-2})(x_i - x_{i-1})$ を掛けて，右辺は 1 個ずつ通分しながら中括弧の中に因数を展開すると，

$$\begin{aligned}
&[x_0, x_1, \cdots, x_{i-2}, x_{i-1}, x_i](x_i - x_0)(x_i - x_1)(x_i - x_2)\cdots(x_i - x_{i-2})(x_i - x_{i-1}) \\
=&-[x_0, \cdots, x_{i-1}](x_i - x_0)(x_i - x_1)(x_i - x_2)\cdots(x_i - x_{i-2}) \\
&-[x_0, \cdots, x_{i-2}](x_i - x_0)(x_i - x_1)(x_i - x_2)\cdots(x_i - x_{i-3}) \\
&-[x_0, \cdots, x_{i-3}](x_i - x_0)(x_i - x_1)(x_i - x_2)\cdots(x_i - x_{i-4}) \\
&-\cdots \\
&-[x_0, x_1, x_2, x_3](x_i - x_0)(x_i - x_1)(x_i - x_2) \\
&-[x_0, x_1, x_2](x_i - x_0)(x_i - x_1) \\
&-[x_0, x_1](x_i - x_0) \\
&-([x_0] - [x_i])
\end{aligned} \tag{21}$$

となることがわかる．移項することにより，

$$
\begin{aligned}
[x_i] = &[x_0, x_1, \cdots, x_{i-2}, x_{i-1}, x_i](x_i - x_0)(x_i - x_1)(x_i - x_2)\cdots(x_i - x_{i-2})(x_i - x_{i-1}) \\
&+ [x_0, \cdots, x_{i-1}](x_i - x_0)(x_i - x_1)(x_i - x_2)\cdots(x_i - x_{i-2}) \\
&+ [x_0, \cdots, x_{i-2}](x_i - x_0)(x_i - x_1)(x_i - x_2)\cdots(x_i - x_{i-3}) \\
&+ [x_0, \cdots, x_{i-3}](x_i - x_0)(x_i - x_1)(x_i - x_2)\cdots(x_i - x_{i-4}) \\
&+ \cdots \\
&+ [x_0, x_1, x_2, x_3](x_i - x_0)(x_i - x_1)(x_i - x_2) \\
&+ [x_0, x_1, x_2](x_i - x_0)(x_i - x_1) \\
&+ [x_0, x_1](x_i - x_0) \\
&+ [x_0]
\end{aligned} \tag{22}
$$

となる．明らかに右辺は $f(x_i)$ であるから，$i = 0, \cdots, n$ について

$$f_i = f[x_i] = f(x_i) \tag{23}$$

が成り立つことがわかる．すなわち，定理 1 が証明された．

3.2 定理 3 の証明

まず最初に式 (5) を証明しよう．数学的帰納法を用いる．$n = 3$ のとき，明らかに，

$$
\begin{aligned}
f[x_0, x_1, x_2] &= \frac{1}{x_0 - x_2}\{f[x_0, x_1] - f[x_1, x_2]\} \\
&= f[f[x_0, x_1], f[x_1, x_2]]
\end{aligned} \tag{24}
$$

であるから，式 (5) が成り立つ．

次に，$n = k$ のときに式 (5) が成り立つと仮定する．そうすると，$n = k + 1$ のときに，

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_{k+1}] = \frac{1}{x_0 - x_{k+1}}\{f[x_0, x_1, \cdots, x_k] - f[x_1, x_2, \cdots, x_{k+1}]\} \tag{25}$$

仮定により右辺は

$$\frac{1}{x_0 - x_{k+1}}\{f[f[x_0, x_1], \cdots, f[x_{k-1}, x_k]] - f[f[x_1, x_2], \cdots, f[x_k, x_{k+1}]]\} \tag{26}$$

とすることができるから，これに差分商の定義を用いてさらに変形すると，

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_{k+1}] = f[f[x_0, x_1], f[x_1, x_2], \cdots, f[x_{k-1}, x_k], f[x_k, x_{k+1}]] \tag{27}$$

となる．すなわち，$n = k + 1$ のときにも成り立つ．したがって，式 (5) が証明された．

3.3 定理 4 の証明

$x = x_i$ における関数値 f_i と導関数値 $f_i^{(r)}$ が与えられているときに，これを満たす多項式 $f(x)$ が式 (12) で表されることを示すには，各 x_i において，

$$f(x_i) = f_i \tag{28}$$

$$f^{(r)}(x_i) = f_i^{(r)} \tag{29}$$

であることを示せばよい．式 (12) の $f(x)$ を実際に r 回微分して式 (29) を一般的に示すのはかなり複雑になり，相当な気力を必要とする（気力が足りない）．そこで，次のような正の微小量 h を考えて，微分係数は $h\to 0$ の極限で考えることで式 (29) を示すことにする．そのため，つぎのような多項式を考える．

式 (12) の係数となる差分商において，重複する x_i は r_i+1 個存在するが，これを $x_i, x_i+h, x_i+2h, \cdots, x_i+r_ih \quad (n=0,1,\cdots,n)$ とし，これに対応する関数値を $f_{i,r} \quad (r=0,1,\cdots,r_i)$ とする．ここで $f_{i,r}$ は次のように定義する．

$$f_{i,r}=f_i+\sum_{s=1}^{r}\left\{f_i^{(1)}h+\sum_{j=1}^{s-1}\left\{f_i^{(2)}h^2+\sum_{k=1}^{j-1}\left\{f_i^{(3)}h^3+\sum_{l=1}^{k-1}\left\{f_i^{(4)}h^4+\cdots+\sum_{m=1}^{2}\left\{f_i^{(r-1)}h^{r-1}+\sum_{n=1}^{1}f_i^{(r)}h^r\right\}\right\}\right\}\right\} \tag{30}$$

$$\begin{aligned}&=f_1+\sum_{s=1}^{r}f_i^{(1)}h+\sum_{s=1}^{r}\sum_{j=1}^{s-1}f_i^{(2)}h^2+\sum_{s=1}^{r}\sum_{j=1}^{s-1}\sum_{k=1}^{j-1}f_i^{(3)}h^3+\sum_{s=1}^{r}\sum_{j=1}^{s-1}\sum_{k=1}^{j-1}\sum_{l=1}^{k-1}f_i^{(4)}h^4+\cdots\\&\qquad+\sum_{s=1}^{r}\sum_{j=1}^{s-1}\sum_{k=1}^{j-1}\sum_{l=1}^{k-1}\cdots\sum_{m=1}^{2}f_i^{(r-1)}h^{r-1}+\sum_{s=1}^{r}\sum_{j=1}^{s-1}\sum_{k=1}^{j-1}\sum_{l=1}^{k-1}\cdots\sum_{m=1}^{2}\sum_{n=1}^{1}f_i^{(r)}h^r\end{aligned} \tag{31}$$

この式で総和の上限が 1 よりも小さい場合は和に加えない．つまり，0 とする．

式 (31) の $f_i^{(t)}h^t$ の係数は単なる総和である．つまり，$\sum_{s=1}^{r}\sum_{j=1}^{s-1}\sum_{k=1}^{j-1}\cdots\sum_{n=1}^{1}1$ であるから，$r\geq s>j>k>\cdots>n\geq 1$ の関係を満たす整数 $s,j,k,\cdots,n$ の組み合わせの数である．つまり $\binom{r}{t}$ である．したがって，式 (31) は次のように書くこともできる．

$$f_{i,r}=\sum_{t=0}^{r}\binom{r}{t}f_i^{(t)}h^t \tag{32}$$

例として，$r=7$ まで示すと，

$$f_{i,0}=f_i \tag{33}$$
$$f_{i,1}=f_i+f_i^{(1)}h \tag{34}$$
$$f_{i,2}=f_i+2f_i^{(1)}h+f_i^{(2)}h^2 \tag{35}$$
$$f_{i,3}=f_i+3f_i^{(1)}h+3f_i^{(2)}h^2+f_i^{(3)}h^3 \tag{36}$$
$$f_{i,4}=f_i+4f_i^{(1)}h+6f_i^{(2)}h^2+4f_i^{(3)}h^3+f_i^{(4)}h^4 \tag{37}$$
$$f_{i,5}=f_i+5f_i^{(1)}h+10f_i^{(2)}h^2+10f_i^{(3)}h^3+5f_i^{(4)}h^4+f_i^{(5)}h^5 \tag{38}$$
$$f_{i,6}=f_i+6f_i^{(1)}h+15f_i^{(2)}h^2+20f_i^{(3)}h^3+15f_i^{(4)}h^4+6f_i^{(5)}h^5+f_i^{(6)}h^6 \tag{39}$$
$$f_{i,7}=f_i+7f_i^{(1)}h+21f_i^{(2)}h^2+35f_i^{(3)}h^3+35f_i^{(4)}h^4+21f_i^{(5)}h^5+7f_i^{(6)}h^6+f_i^{(7)}h^7 \tag{40}$$

である．

そうすると定理 1 により，$x=x_0, x_0+h,\cdots,x_0+r_0h, x_1, x_1+h,\cdots,x_n,\cdots,x_n+r_nh$，すなわち，$x=x_i+rh, \quad (i=0,\cdots,n; r=0,\cdots,r_i)$ において，$f_{0,0}, f_{0,1},\cdots,f_{0,r_0}, f_{1,0},\cdots,f_{n,r_n}$，すなわち，$f_{i,r} \quad (i=$

$0,\cdots,n; r=0,\cdots,r_i)$ を取る多項式は

$$
\begin{aligned}
f(x) = f[x_0] & \\
&+ f[x_0, x_0+h](x-x_0) \\
&+ f[x_0, x_0+h, x_0+2h](x-x_0)(x-x_0-h)(x-x_0-2h) \\
&\quad \vdots \\
&+ f[x_0, x_0+h, \cdots, x_0+r_0h](x-x_0)(x-x_0-h)\cdots(x-x_0-r_0h+h) \\
&\quad \vdots \\
&+ f[x_0, x_0+h, \cdots, x_1, x_1+h, \cdots, x_n, x_n+h, \cdots, x_n+r_nh] \\
&\times (x-x_0)(x-x_0-h)\cdots(x-x_{n-1}-r_{n-1}h)(x-x_n)\cdots(x-x_n-r_n+h) \qquad (41) \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} f[\overbrace{x_0,\cdots,x_0+r_0h}^{r_0+1},\cdots,\overbrace{x_j,\cdots,x_j+r_jh}^{r_j+1}](x-x_0)\cdots(x-x_0-r_0h)\cdots(x-x_j)\cdots(x-x_j-r_jh) \\
&+ f[x_0,\cdots,x0+r_nh](x-x_0)\cdots(x-x0-r_nh+h) \qquad (42)
\end{aligned}
$$

である．すなわち，

$$f(x_i+rh) = f_{i,r} \tag{43}$$

が成り立つ．$h\to 0$ において，$f_{i,0}=f_i$ であるから，上の式 (41) および式 (42) は明らかに式 (12) と式 (28) に一致する．したがって，式 (12) は条件 (28) を満たしている．

次に，$x=x_i$ における r 階の微分係数を考えよう．1 階の微分係数は

$$f^{(1)}(x_i) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\{f(x_i+h)-f(x_i)\} = \lim_{h\to 0}\frac{\Delta f(x_i)}{h} \tag{44}$$

である．式 (34) と式 (43) から

$$
\begin{aligned}
f(x_i+h) &= f_i + f_i^{(1)}h \\
f(x_i) &= f_i
\end{aligned}
$$

であるから，

$$f^{(1)}(x_i) = f_i^{(1)} \tag{45}$$

であることがわかる．同様に

$$f^{(2)}(x_i) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\{\Delta f(x_i+h)-\Delta f(x_i)\} = \lim_{h\to 0}\frac{\Delta^2 f(x_i)}{h^2} = f_i^{(2)} \tag{46}$$

である．一般に，$f_i^{(t)}$ を用いると，

$$
\begin{aligned}
f(x_i) &= [f_{i,0}] = f_i && (47) \\
f^{(1)}(x_i) &= f\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\Delta f(x_i) = \lim_{h\to 0}[f_{i,0}, f_{i,1}] = [f_i, f_i] = f_i^{(1)} && (48) \\
f^{(2)}(x_i) &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2}\Delta^2 f(x_i) = \lim_{h\to 0} 2![f_{i,0}, f_{i,1}, f_{i,2}] = 2![f_i, f_i, f_i] = f_i^{(2)} && (49) \\
f^{(3)}(x_i) &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^3}\Delta^3 f(x_i) = \lim_{h\to 0} 3![f_{i,0}, f_{i,1}, f_{i,2}, f_{i,3}] = 3![f_i, f_i, f_i, f_i] = f_i^{(3)} && (50) \\
f^{(4)}(x_i) &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^4}\Delta^4 f(x_i) = \lim_{h\to 0} 4![f_{i,0}, f_{i,1}, f_{i,2}, f_{i,3}, f_{i,4}] = 4![f_i, f_i, f_i, f_i, f_i] = f_i^{(4)} && (51) \\
&\vdots && (52)
\end{aligned}
$$

という関係が成り立つから，r 階の微分係数については，r 次の差分 $\Delta^r f(x)$ を用いて，

$$f^{(r)}(x_i) = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta^r f(x_i)}{h^r} = f_i^{(r)} \tag{53}$$

となる．つまり，$h \to 0$ の極限において，式 (42) は式 (12) に一致し，かつ条件 (29) が満たされる．すなわち条件 (28) と (29) が満たされることがわかった．したがって，定理 4 が成り立つ．

参考文献

[1] 2016/4/12 のエントリー「差分商 (divided differences) について」．