差分商（Diveded Differences）について

2016.4.10　　鈴木　実

1　はじめに

エルミート補間法では差分商 (diveded defferences) を用いた表現が使われることが多い．通常の表現に比べると簡便であってわかりやすく，補間多項式を計算するにも体系的で計算しやすい．しかし，差分商はあまり馴染みがない．ここでは，差分商の定義と関係する定理およびその証明をメモしておこう．

2　差分商の定義

差分商はある関数の 2 つの引数の値の差を引数の差で割った数を指す．差分商の差分商も考えられるのでその場合は高次の差分商という．

x の関数 $f(x)$ を考える．0 次の差分商は

$$f[x_i] = f(x_i) \tag{1}$$

と定義される．0 次の差分商は単なる関数値である．

1 次の差分商は

$$f[x_i, x_j] = \frac{f(x_i) - f(x_j)}{x_i - x_j} \tag{2}$$

と定義される．$x_j \to x_i$ の極限で差分商は微分係数 $\mathrm{d}f/\mathrm{d}x(x_i)$ に一致する．しかし，高次の差分商は後に述べるように一致せず，微分係数との関係式には一定の因数を伴う．

2 次の差分商は

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_0, x_1] - f[x_1, x_2]}{x_0 - x_2} \tag{3}$$

と定義される．

一般に，k 次の差分商は，

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_k] = \frac{f[x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}] - f[x_1, x_2, \cdots, x_k]}{x_0 - x_k} \tag{4}$$

と定義される．

3　差分商の諸関係

差分商には次のような性質および関係がある．

1. $f[x_0, x_1, \cdots, x_k]$ は $f[x_0], f[x_1], \cdots, f[x_k]$ の線形結合である．
2. $f[x_0, x_1, \cdots, x_k]$ の値は $x_0, x_1, \cdots, x_k$ の順序に依存しない．
3. $f[x, x_0, x_1, \cdots, x_k]$ が n 次の多項式なら $f[x, x_0, x_1, \cdots, x_k, x_{k+1}]$ は $n-1$ 次の多項式である．

4. $f(x)$ が n 次の多項式なら,

$$f[x,x_0,x_1,\cdots,x_n]=0 \tag{5}$$

が成り立つ.

定理 1 $f(x)$ が $x=x_0,\cdots,x_n$ で $f[x_0],\cdots,f[x_n]$ の値をとる n 次の多項式なら $f(x)$ は次のように表される.

$$\begin{aligned}f(x)=&f[x_0]+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)+\cdots\\&+f[x_0,x_1,\cdots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x_{n-1})\end{aligned} \tag{6}$$

定理 2 高次の差分商は 0 次の差分商の線形結合として次式で表される.

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_n]=\sum_{i=0}^{n}\frac{f[x_i]}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)} \tag{7}$$

4 前節定理の証明

前節の 1. は定理 2 で示される.

同 2. は定理 2 より明らかである.

同 3. と 4. は 0 次の差分商から書き下ろせば明らかである.

4.1 定理 1 の証明

もっと良い証明法があると思うが，ここでは取り敢えず書くのが大変面倒な方法をあげておく.

$f(x)$ が n 次の多項式であるので，式 (6) が $x=x_0,\cdots,x_n$ において，$f(x_i)=f[x_i]$ となることを示すことができればよい．このことはすなわち，$x=x_n$ で式 (6) が成り立つことを示せば十分である．面倒であるが，式 (6) に $x=x_n$ を代入してそうなることを確認しよう．式 (6) の右辺の最後尾の項に $x=x_n$ を代入すると，

$$\begin{aligned}&f[x_0,\cdots,x_n](x_n-x_0)(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-1})\\=&\frac{f[x_0,\cdots,x_{n-1}]-f[x_1,\cdots,x_n]}{x_0-x_n}(x_n-x_0)(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-1})\\=&\{f[x_0,\cdots,x_{n-1}]-f[x_1,\cdots,x_n]\}(-1)(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-1})\end{aligned} \tag{8}$$

この式の第 2 項は次のように変形できる.

$$\begin{aligned}&f[x_1,\cdots,x_n](x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-1})\\=&\frac{f[x_1,\cdots,x_{n-1}]-f[x_2,\cdots,x_n]}{x_1-x_n}(x_n-x_1)(x_n-x_2)\cdots(x_n-x_{n-1})\\=&\{f[x_1,\cdots,x_{n-1}]-f[x_2,\cdots,x_n]\}(-1)(x_n-x_2)\cdots(x_n-x_{n-1})\end{aligned} \tag{9}$$

さらに，この第 2 項は次のように変形できる.

$$\begin{aligned}&f[x_2,\cdots,x_n](x_n-x_2)\cdots(x_n-x_{n-1})\\=&\frac{f[x_2,\cdots,x_{n-1}]-f[x_3,\cdots,x_n]}{x_2-x_n}(x_n-x_2)(x_n-x_3)\cdots(x_n-x_{n-1})\\=&\{f[x_2,\cdots,x_{n-2}]-f[x_3,\cdots,x_{n-1}]\}(-1)(x_n-x_3)\cdots(x_n-x_{n-1})\end{aligned} \tag{10}$$

となる．さらに，この様に第 2 項の変形を続けると x_n の次数は 1 つずつ減り，結局，

$$f[x_{n-1},x_n](x_n-x_{n-1})=\frac{f[x_{n-1}]-f[x_n]}{x_{n-1}-x_n}(x_n-x_{n-1})=f[x_n]-f[x_{n-1}] \tag{11}$$

となる．これを第 1 系列の計算とする．

次に，式 (6) の第 n 項（最後から 2 番目の項）を考えよう．この項に第 1 系列の計算で余っている項を順次加えていく．第 1 系列の最初の計算式 (8) の第 1 項を加えると，

$$\begin{aligned}
&f[x_0,\cdots,x_{n-1}](x_n-x_0)\cdots(x_n-x_{n-2})-f[x_0,\cdots,x_{n-1}](x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-1})\\
=&f[x_0,\cdots,x_{n-1}](x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-2})(x_{n-1}-x_0)\\
=&\frac{f[x_0,\cdots,x_{n-2}]-f[x_1,\cdots,x_{n-1}]}{x_0-x_{n-1}}(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-2})(x_{n-1}-x_0)\\
=&\{f[x_0,\cdots,x_{n-2}]-f[x_1,\cdots,x_{n-1}]\}(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-2})(-1)
\end{aligned} \tag{12}$$

と変形できる．この式の第 2 項と第 1 系列の式 (9) の第 1 項を合わせると，

$$\begin{aligned}
&f[x_1,\cdots,x_{n-1}](x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-2})-f[x_1,\cdots,x_{n-1}](x_n-x_2)\cdots(x_n-x_{n-1})\\
=&f[x_1,\cdots,x_{n-1}](x_n-x_2)\cdots(x_n-x_{n-2})(x_{n-1}-x_1)\\
=&\frac{f[x_1,\cdots,x_{n-2}]-f[x_2,\cdots,x_{n-1}]}{x_1-x_{n-1}}(x_n-x_2)\cdots(x_n-x_{n-2})(x_{n-1}-x_1)\\
=&\{f[x_1,\cdots,x_{n-2}]-f[x_2,\cdots,x_{n-1}]\}(x_n-x_2)\cdots(x_n-x_{n-2})(-1)
\end{aligned} \tag{13}$$

と変形できる．この式と第 1 系列の計算で余った同じ次数の項と加えて同じ計算を繰り返すことにより，x_n の次数が 1 つずつ減り，第 1 系列の残りの項はなくなり，第 2 系列の計算結果は最終的に，

$$f[x_{n-2},x_{n-1}](x_{n-1}-x_{n-2})=\frac{f[x_{n-2}]-f[x_{n-1}]}{x_{n-2}-x_{n-1}}(x_{n-1}-x_{n-2})=f[x_{n-1}]-f[x_{n-2}] \tag{14}$$

となる．

以下も同様に計算できる．次は，式 (6) の第 $n-1$ 項（最後から 3 番目の項）と第 2 系列の最初の計算式 (12) の第 1 項を加えると，

$$\begin{aligned}
&f[x_0,\cdots,x_{n-2}](x_n-x_0)\cdots(x_n-x_{n-3})-f[x_0,\cdots,x_{n-2}](x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-2})\\
=&f[x_0,\cdots,x_{n-2}](x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-3})(x_{n-2}-x_0)\\
=&\frac{f[x_0,\cdots,x_{n-3}]-f[x_1,\cdots,x_{n-2}]}{x_0-x_{n-2}}(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-3})(x_{n-2}-x_0)\\
=&\{f[x_0,\cdots,x_{n-3}]-f[x_1,\cdots,x_{n-2}]\}(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-3})(-1)
\end{aligned} \tag{15}$$

となる．以下，第 2 系列と同じ計算を繰り返すことにより，次の第 3 系列の最終計算結果を得る．

$$f[x_{n-3},x_{n-2}](x_{n-2}-x_{n-3})=\frac{f[x_{n-3}]-f[x_{n-2}]}{x_{n-3}-x_{n-2}}(x_{n-2}-x_{n-3})=f[x_{n-2}]-f[x_{n-3}] \tag{16}$$

以下も，式 (6) の第 $n-2$ 項以下に同様の計算を施すことにより，同じ系列の計算をすることができて，それぞれの系列の計算結果を合わせると最終的に，

$$\begin{aligned}
f(x_n)&=f[x_0]+(f[x_1]-f[x_0])+\cdots+(f[x_{n-2}]-f[x_{n-3}])+(f[x_{n-1}]-f[x_{n-2}])+(f[x_n]-f[x_{n-1}])\\
&=f[x_n]
\end{aligned} \tag{17}$$

となり，目的の式が得られる．これにより式 (6) の証明が示されたことになる．

4.2　定理 2 の証明

式 (7) を数学的帰納法で証明しよう．$n = 0$ のときは，$f[x_0] = f[x_0]$ と trivial であるので，$n = 1$ について示すと，

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_0] - f[x_1]}{x_0 - x_1} = \frac{f[x_0]}{x_0 - x_1} + \frac{f[x_1]}{x_1 - x_0} \tag{18}$$

となり，式 (7) が成り立つ．次に，$n = k - 1$ で式 (7) が成り立つと仮定する．すなわち，

$$\begin{aligned} f[x_0, \cdots, x_{k-1}] &= \frac{f[x_0]}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\cdots(x_0 - x_{k-1})} + \frac{f[x_1]}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)\cdots(x_0 - x_{k-1})} \\ &\quad + \cdots + \frac{f[x_{k-1}]}{(x_{k-1} - x_0)(x_{k-1} - x_1)\cdots(x_{k-1} - x_{k-2})} \end{aligned} \tag{19}$$

が成り立つと仮定する．これを $x_1, x_2, \cdots, x_k$ の k 点に適用すると，次式が成り立つ．

$$\begin{aligned} f[x_1, \cdots, x_k] &= \frac{f[x_1]}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)\cdots(x_1 - x_k)} + \frac{f[x_2]}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)\cdots(x_2 - x_k)} \\ &\quad + \cdots + \frac{f[x_k]}{(x_k - x_1)(x_k - x_2)\cdots(x_k - x_{k-1})} \end{aligned} \tag{20}$$

ここで，

$$f[x_0, \cdots, x_k] = \frac{f[x_0, \cdots, x_{k-1}] - f[x_1, \cdots, x_k]}{x_0 - x_k} \tag{21}$$

であるから，これに式 (19) と式 (20) を代入すると，

$$\begin{aligned} f[x_0, \cdots, x_k] &= \frac{f[x_0]}{(x_0 - x_1)\cdots(x_1 - x_{k-1})(x_0 - x_k)} + \frac{f[x_1]}{(x_1 - x_0)\cdots(x_1 - x_{k-1})(x_0 - x_k)} \\ &\quad + \cdots + \frac{f[x_{k-1}]}{(x_{k-1} - x_0)\cdots(x_{k-1} - x_{k-2})(x_0 - x_k)} \\ &\quad - \frac{f[x_1]}{(x_1 - x_2)\cdots(x_1 - x_k)(x_0 - x_k)} - \frac{f[x_2]}{(x_2 - x_1)\cdots(x_2 - x_k)(x_0 - x_k)} \\ &\quad - \cdots - \frac{f[x_k]}{(x_k - x_1)\cdots(x_k - x_{k-1})(x_0 - x_k)} \end{aligned} \tag{22}$$

となる．ここで，式 (22) の第 1 項と最後の項はそれぞれ，式 (7) の第 1 項と最後の項に一致していることがわかる．それ以外の $f[x_i]$ を含む項を取り出すと，2 つあって，以下のように変形できる．

$$\begin{aligned} &\frac{f[x_i]}{(x_i - x_0)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_{k-1})} \frac{1}{(x_0 - x_k)} \\ &\qquad - \frac{f[x_i]}{(x_i - x_1)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_k)} \frac{1}{(x_0 - x_k)} \\ &= \frac{f[x_i]}{(x_i - x_1)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_{k-1})(x_0 - x_k)} \left\{ \frac{1}{(x_i - x_0)} - \frac{1}{(x_i - x_k)} \right\} \\ &= \frac{f[x_i]}{(x_i - x_1)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_{k-1})(x_0 - x_k)} \frac{(x_0 - x_k)}{(x_i - x_0)(x_i - x_k)} \\ &= \frac{f[x_i]}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_{k-1})(x_i - x_k)} \end{aligned} \tag{23}$$

これは式 (7) の $f[x_i]$ の項と一致する．したがって，$n = k$ の場合も式 (7) が成り立つ．これにより数学的帰納法によって式 (7) が成り立つことが示された．

5　差分商と微分係数との関係

$h>0$ として，$x, x+h, x+2h, \cdots, x+nh$ の $n+1$ 個の等間隔の数を考える．x と $x+h$ における関数値 $f(x)$ および $f(x+h)$ から差分商 $f[x, x+h]$ は

$$f[x, x+h] = \frac{f[x]-f[x+h]}{x-(x+h)} = \frac{f[x+h]-f[x]}{h} \tag{24}$$

である．したがって，

$$\lim_{h\to 0} f[x+h, x] = f[x, x] = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = f^{(1)}(x) \tag{25}$$

となる．2 次の差分商と微分係数の関係は

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0} f[x, x+h, x+2h] \\
=&\lim_{h\to 0} -\frac{1}{2h}(f[x, x+h]-f[x+h, x+2h]) \\
=&\lim_{h\to 0} -\frac{1}{2h}(f^{(1)}(x)-f^{(1)}(x+h)) = \frac{1}{2}f^{(2)}(x)
\end{aligned} \tag{26}$$

となる．したがって，

$$f[x, x, x] = \frac{1}{2}f^{(2)}(x) \tag{27}$$

である．

一般に，$x, x+h, x+2h, \cdots, x+nh$ における n 次の差分商と微分係数の関係は

$$f[\overbrace{x, x, \cdots, x}^{n}] = \lim_{h\to 0} f[x, x+h, \cdots, x+nh] = \frac{1}{n!}f^{(n)}(x) \tag{28}$$

である．このことは，数学的帰納法により以下のように示すことができる．すなわち，$n=k$ において，

$$f[\overbrace{x, x, \cdots, x}^{k}] = \lim_{h\to 0} f[x, x+h, \cdots, x+kh] = \frac{1}{k!}f^{(k)}(x) \tag{29}$$

であると仮定すると，

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0} f[x, x+h, \cdots, x+kh, x+(k+1)h] \\
=&\lim_{h\to 0} \frac{f[x, x+h, \cdots, x+kh]-f[x+h, \cdots, x+(k+1)h]}{-h(k+1)} \\
=&\lim_{h\to 0} \frac{1}{k+1}\frac{\frac{1}{k!}f^{(k)}(x)-\frac{1}{k!}f^{(k)}(x+h)}{-h} \\
=&\frac{1}{(k+1)!}f^{(k+1)}(x)
\end{aligned} \tag{30}$$

となり，

$$f[\overbrace{x, x, \cdots, x}^{k+1}] = \frac{1}{(k+1)!}f^{(k+1)}(x) \tag{31}$$

が成り立つ．$n=k+1$ でも成り立つので数学的帰納法により，式 (28) のように一般的に書くことができるのである．

以上