複数行列和の行列式の展開

2020.8.19　　鈴木　実

1　はじめに

R. F. Scott の "A Treatise on the Theory of Determinants" [1] の第 3 章に行列式展開の一般式が示されていたので，その部分を 1 つのエントリーとしてまとめた [2]．同じ章に，ある行列が複数の行列の和になっているときに，その行列式を補小行列式で展開することが述べられていたので，ここではそれを少し詳しい説明を付して述べることにする．

2　行列の和の行列式

a_{ij} を成分とする n 次正方行列を A，あるいは $\{a_{ij}\}$ と表し，その行列式を $D^{(n)}$，あるいは $|a_{ij}|$ と表す．右肩の括弧は行列式の次数を表す．成分 a_{ij} が p 項の和からなっているとしよう．すなわち，

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ijk} \tag{1}$$

とする．ここで，a_{ijk} を成分とする n 次正方行列を A_k と表すと，

$$A = \sum_{k=1}^{p} A_k \tag{2}$$

である．A_k の行列式を $D_k^{(n)}$ と表す．ここで述べることは，$D^{(n)}$ を $D_k^{(n)}$ の補小行列式を用いて展開する式を与えるということである．最初に，その式を示しておこう．α，β，γ，$\cdots$，π，を

$$\alpha + \beta + \gamma + \cdots + \pi = n \tag{3}$$

を満たす 0 以上 n 以下の整数とすると，求める式は，

$$D^{(n)} = \sum_{\alpha+\beta+\gamma+\cdots+\pi=n} \sum_{\sigma} \sum_{n!/\alpha!\beta!\cdots\pi!} \mathrm{sgn}\,(lm\cdots q) D_1^{(\alpha)} D_2^{(\beta)} D_3^{(\gamma)} \cdots D_p^{(\pi)} \tag{4}$$

となるのである．ここで，$D_1^{(\alpha)}$ 等は D_1 の α 次補小行列式である．ただし，$D_1^{(\alpha)}$ の行は $D_1^{(n)}$ から抽出された α 個の行からなり，$D_2^{(\beta)}$ の行は $D_2^{(n)}$ から抽出された β 個の行からなり，以下同様に，$D_p^{(\pi)}$ の行は $D_p^{(n)}$ から抽出された π 個の行からなる．α，β，$\cdots$，π は 0 と n を含み式 (3) を満たす整数である．この式の導出とその詳しい意味は以下に述べる．

3　行列の和の行列式の定義

行列式を交代数を用いて表すと [2],

$$D^{(n)} = \prod_{i=1}^{n} (a_{i1}e_1 + a_{i2}e_2 + \cdots + a_{in}e_n) = \prod_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} (a_{i1k}e_1 + a_{i2k}e_2 + \cdots + a_{ink}e_n) \tag{5}$$

となる．ここで，

$$u_{ik} = a_{i1k}e_1 + a_{i2k}e_2 + \cdots + a_{ink}e_n \tag{6}$$

とおくと，

$$D^{(n)} = \prod_{i=1}^{n}(u_{i1} + u_{i2} + \cdots + u_{ip}) \tag{7}$$

である．また，$D_k^{(n)}$ $(k = 1, 2, \cdots, p)$ を

$$D_k^{(n)} = \prod_{i=1}^{n}(a_{i1k}e_1 + a_{i2k}e_2 + \cdots + a_{ink}e_n) = \prod_{i=1}^{n} u_{ik} \tag{8}$$

と定義する．式 (7) と式 (8) から式 (4) を導出する．

4 導出

式 (7) を展開すると，p^n 項の和になる．各項は n 個の u_{ik} の積になる．その積とは，$(u_{i1} + u_{i2} + \cdots + u_{ip})$ が第 i 行を表すことに注意すると，行を重複しないで，u_{i1} を α 個，u_{i2} を β 個，以下同様に u_{ip} の π 個まで合計 n 個を選んだ u_{ik} の積であり，式 (7) の展開式は，このような積を式 (3) を満たすような全ての α，β，$\cdots$，π の組み合わせについて総和したものになる．

次に，行の選び方について考える．そのために，まず置換の関数 σ を定義しておこう．この σ は，1 から n までの整数から α 個，β 個，$\cdots$，π 個を選ぶ組み合わせの 1 つを表し，$(\sigma(1), \sigma(2), \cdots, \sigma(n))$ は $(1, 2, \cdots, n)$ の置換である．ここでは，α などのグループの中で $\sigma(i)$ は1 から n の方向に，つまり昇順に並んでいるとする．

この置換 σ を用いて，α 個の u_{i1} を選ぶ行を

$\sigma(1)$ 行，$\sigma(2)$ 行，$\cdots$，$\sigma(\alpha)$ 行

とする．次に，α 個の u_{i2} を選ぶ行を

$\sigma(\alpha+1)$ 行，$\sigma(\alpha+2)$ 行，$\cdots$，$\sigma(\alpha+\beta)$ 行

とする．同じように続けて，最後に，π 個の u_{i2} を選ぶ行を

$\sigma(n-\pi+1)$ 行，$\sigma(n-\pi+2)$ 行，$\cdots$，$\sigma(n)$ 行

とする．このようにして得られる式 (7) の展開式を具体的に書き下ろすと，

$$\begin{aligned} D^{(n)} = &\sum_{\alpha+\beta+\gamma+\cdots+\pi=n} \sum_{\sigma} (u_{\sigma(1)\,1}u_{\sigma(2)\,1}\cdots u_{\sigma(\alpha)\,1})(u_{\sigma(\alpha+1)\,2}u_{\sigma(\alpha+2)\,2}\cdots u_{\sigma(\alpha+\beta)\,2}) \\ &\cdots(u_{\sigma(n-\pi+1)\,p}u_{\sigma(n-\pi+2)\,p}\cdots u_{\sigma(n)\,p}) \end{aligned} \tag{9}$$

となる．ここで，$\sum_{\alpha+\beta+\gamma+\cdots+\pi=n}$ は式 (3) を満たす α から π の 0 以上 n 以下の整数のすべての組み合わせに関する総和であり，$\sum_{\sigma}$ は $(1, 2, \cdots, n)$ から α 個，$\cdots$，π 個を取り出すすべての組み合わせに関する総和である．

式 (9) のそれぞれの積は，α などグループごとに分けられる．それぞれのグループは $D_1^{(n)}$ などの別々の行列式の成分から来ている．

各積のそれぞれの因子グループは,

$$
\begin{aligned}
(u_{\sigma(1)\,1}u_{\sigma(2)\,1}\cdots u_{\sigma(\alpha)\,1}) &= \prod_{i=1}^{\alpha} u_{\sigma(i)\,1} = \sum_{{}_n\mathrm{C}_\alpha}\prod_{i=1}^{\alpha}(a_{\sigma(i)\,f1}e_f + a_{\sigma(i)\,g1}e_g + \cdots + a_{\sigma(i)\,h1}e_h) \\
&= \sum_{{}_n\mathrm{C}_\alpha}\ \sum_{(f\,g\cdots h)} a_{\sigma(1)\,f1}a_{\sigma(2)\,g1}\cdots a_{\sigma(\alpha)\,h1}\ e_f e_g\cdots e_h \qquad (10)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(u_{\sigma(\alpha+1)\,2}u_{\sigma(\alpha+2)\,2}\cdots u_{\sigma(\alpha+\beta)\,2}) &= \prod_{i=\alpha+1}^{\alpha+\beta} u_{\sigma(i)\,2} = \sum_{{}_n\mathrm{C}_\beta}\prod_{i=\alpha+1}^{\alpha+\beta}(a_{\sigma(i)\,r2}e_r + a_{\sigma(i)\,s2}e_s + \cdots + a_{\sigma(i)\,t2}e_t) \\
&= \sum_{{}_n\mathrm{C}_\beta}\ \sum_{(r,\,s\cdots t)} a_{\sigma(\alpha+1)\,r\,2}a_{\sigma(\alpha+2)\,s\,2}\cdots a_{\sigma(\alpha+\beta)\,t\,2}\ e_r e_s\cdots e_t \qquad (11)
\end{aligned}
$$

$$\vdots$$

$$
\begin{aligned}
(u_{\sigma(n-\pi+1)\,p}u_{\sigma(n-\pi+2)\,p}\cdots u_{\sigma(n)\,p}) &= \prod_{i=n-\pi+1}^{n} u_{\sigma(i)\,p} = \sum_{{}_n\mathrm{C}_\pi}\prod_{i=n-\pi+1}^{n}(a_{\sigma(i)\,up}e_u + a_{\sigma(i)\,vp}e_v + \cdots + a_{\sigma(i)\,wp}e_w) \\
&= \sum_{{}_n\mathrm{C}_\pi}\ \sum_{(u\,v\cdots w)} a_{\sigma(n-\pi+1)\,u\,p}a_{\sigma(n-\pi+2)\,v\,p}\cdots a_{\sigma(n)\,w\,p}\ e_u e_v\cdots e_w \qquad (12)
\end{aligned}
$$

と表すことができる．ここで，$\sum_{{}_n\mathrm{C}_\alpha}$ は $(1\,2\cdots n)$ から α 個の整数を取り出す全ての組み合わせに関する総和である．その選ばれた整数の組み合わせを $(f\,g\cdots h)$ とし，その後の $\sum_{(f\,g\cdots h)}$ は $(f\,g\cdots h)$ の全ての置換に関する総和である．式 (11)，式 (12) についても同様である．

式 (10) の最右辺の 2 番めの総和以降の部分は, $(f\,g\cdots h)$ に関する全ての置換に関する総和であるから，次のように変形することができる．

$$\sum_{(f\,g\cdots h)} a_{\sigma(1)f1}a_{\sigma(2)g1}\cdots a_{\sigma(\alpha)h1}\ e_f e_g\cdots e_h = \prod_{i=1}^{\alpha}(a_{\sigma(i)\,f\,1}e_f + a_{\sigma(i)\,g\,1}e_g + \cdots + a_{\sigma(i)\,h\,1}e_h) \qquad (13)$$

これは，交代数の行列式の定義から，$D_1^{(n)}$ の第 $\sigma(1)$ 行から第 $\sigma(\alpha)$ 行までと，第 f 列，第 g 列，$\cdots$，第 h 列を取り出した小行列式であることがわかる．これを $D_1^{(\alpha)}(f,g,\cdots,h)$ と表すことにしよう．そうすると，式 (10) は,

$$\prod_{i=1}^{\alpha} u_{\sigma(i)1} = \sum_{{}_n\mathrm{C}_\alpha} D_1^{(\alpha)}(f,g,\cdots,h)e_f e_g\cdots e_h \qquad (14)$$

となる．この式は，$D_1^{(n)}$ の第 1 列から第 n 行の中から α 個の列を取り出す全ての列の組み合わせについて得られる小行列式の総和を取ることを意味する．すなわち ${}_n\mathrm{C}_\alpha$ 個の小行列式が存在する．

式 (11)，(12) についても同様に,

$$\prod_{i=\alpha+1}^{\alpha+\beta} u_{\sigma(i)2} = \sum_{{}_n\mathrm{C}_\beta} D_2^{(\beta)}(r,s,\cdots,t)\ e_r e_s\cdots e_t \qquad (15)$$

$$\vdots$$

$$\prod_{i=n-\pi+1}^{n} u_{\sigma(i)p} = \sum_{{}_n\mathrm{C}_\pi} D_p^{(\pi)}(u,v,\cdots,w)\ e_u e_v\cdots e_w \qquad (16)$$

となる．

式 (9) は式 (14)–(16) の積になるが，交代数があるために，交代数が重複する項は 0 になる．そのため，$\sum_{{}_n\mathrm{C}_\alpha}\ \sum_{{}_n\mathrm{C}_\beta}\cdots\sum_{{}_n\mathrm{C}_\pi}$ に関する総和は n 個から α 個，β 個，$\cdots$，π 個を取り出す組み合わせに関する総和になる．このことは，式 (14)–(16) の $D_1^{(\alpha)}$，$D_2^{(\beta)}$，$\cdots$，$D_p^{(\pi)}$ が互いに補小行列式になることを意味する．こ

の総和を $\sum_{n!/\alpha!\beta!\cdots\pi!}$ と書くことにしよう．$(f\,g\cdots h)$，$(r\,s\cdots t)$，$\cdots$，$(u\,v\cdots w)$ は $(1\,2\cdots n)$ から重複なく選ばれた整数の組み合わせである．これをその順番にまとめて $(l\,m\cdots q)$ と書くことにしよう．$(l\,m\cdots q)$ は $(1\,2\cdots n)$ の置換である．したがって，式 (9) を式 (14)–(16) の積で表すと次のようになる．

$$
\begin{aligned}
D^{(n)} &= \sum_{\alpha+\beta+\gamma+\cdots+\pi=n} \sum_{\sigma} \sum_{n!/\alpha!\beta!\cdots\pi!} D_1^{(\alpha)}(f,g,\cdots,h) D_2^{(\beta)}(r,s,\cdots,t) \cdots D_p^{(\pi)}(u,v,\cdots,w) \\
&\quad \times e_f e_g \cdots e_h\; e_r e_s \cdots e_t\; \cdots\; e_f e_v \cdots e_w \\
&= \sum_{\alpha+\beta+\gamma+\cdots+\pi=n} \sum_{\sigma} \sum_{n!/\alpha!\beta!\cdots\pi!} D_1^{(\alpha)}(f,g,\cdots,h) D_2^{(\beta)}(r,s,\cdots,t) \cdots D_p^{(\pi)}(u,v,\cdots,w) \\
&\quad \times \operatorname{sgn}(fg\cdots h\; rs\cdots t\; uv\cdots w)
\end{aligned} \tag{17}
$$

これをもう少し簡略化して書くと

$$
D^{(n)} = \sum_{\alpha+\beta+\gamma+\cdots+\pi=n} \sum_{\sigma} \sum_{n!/\alpha!\beta!\cdots\pi!} \operatorname{sgn}(lm\cdots q) D_1^{(\alpha)} D_2^{(\beta)} \cdots D_p^{(\pi)} \tag{18}
$$

となる．この式が求める式 (4) であった．

式 (18) の総和の意味をもう一度考えてみよう．行列式が p 個の行列の和の行列式になっているとき，$\alpha+\beta+\gamma+\cdots+\pi=n$ となるような p 個の 0 以上 n 以下の整数の組み合わせ $(\alpha\beta\gamma\cdots\pi)$ を考える．このようなすべての組み合わせを取り上げるのが最初の総和である．次に，行列式 $D_1^{(n)}$ の行から α 個の行をとり，その次に $D_2^{(n)}$ の行から β 個の行をとって，これを同様に繰り返し，$D_p^{(n)}$ の行から π 個の行をとり，これを全部合わせると n 次の行列式ができる．このような行の取り方のすべての組み合わせに関する総和が 2 番めの総和である．この行列式を α 次，β 次，$\cdots$ π 次の補小行列式で展開したものが 3 番目の総和になる．これは行と列に関して α 次，β 次，$\cdots$ π 次のすべての補小行列式に関して和をとることを意味する．

5　例

次のような n 次の行列式 $D^{(n)}$ を考えよう．

$$
D^{(n)} = \begin{vmatrix}
a_{11}+z_1 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22}+z_2 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33}+z_3 & \cdots & a_{3n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn}+z_n
\end{vmatrix} \tag{19}
$$

これは 2 つの行列の和とみなすことができて，それぞれの行列式は次のようになる．

$$
D_1^{(n)} = \begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}, \qquad
D_2^{(n)} = \begin{vmatrix}
z_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & z_2 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & z_3 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & z_n
\end{vmatrix} \tag{20}
$$

これから明らかなように，$D_2^{(n)}$ の小行列式は対角成分を対角にもつ行列以外はすべて 0 になるので，$D_2^{(1)}=z_i$，$D_2^{(2)}=z_iz_j$，$D_2^{(3)}=z_iz_jz_k$，などとなることがわかる．その補小行列式を $D_1^{(n-1)}$，$D_1^{(n-2)}$，$D_1^{(n-3)}$，などとすると，$D^{(n)}$ は次のように表すことができる．

$$
D^{(n)} = D_1^{(n)} + \sum_i z_i D_1^{(n-1)} + \sum_{i,j} z_iz_j D_1^{(n-2)} + \sum_{i,j,k} z_iz_jz_k D_1^{(n-3)} + \cdots + z_1z_2z_3\cdots z_n \tag{21}
$$

参考文献

[1] Robert Forsyth Scott, “A Treatise on the Theory of Determinants and Their Applications in Analysis and Geometry”, Cambridge at the University Press, 1880.
`http://www.totoha.net/archiv/scott1880.pdf`

[2] 「行列式展開の一般式」(2020/8/12 のエントリー)
`http://totoha.web.fc2.com/determinant_expand.pdf`