行列式展開の一般式

2021.3.25　　鈴木　実
（2024.2.6　改訂）

まとめ

行列式の展開は 1 つの行あるいは 1 つの列で展開するのが一般的であるが，以下のように，小行列式を用いて行方向あるいは列方向に展開することも可能である．さらに複数の小行列式を用いて展開することも可能である．

2 つの小行列式で展開する場合

n 次行列式 A は，行番号 $\alpha, \beta, \cdots, \mu$ からなる m 行と，列番号 $p, q, \cdots, r$ の m 列からなる m 次小行列式を用いて次のように展開できる．

$$A = \sum_{\substack{(p\,q\,\cdots\,r)\\ p<q<\cdots<r}}^{n!/m!(n-m)!} A_{p,q,\cdots,r} \begin{vmatrix} a_{\alpha,p} & a_{\alpha,q} & \cdots & a_{\alpha,r} \\ a_{\beta,p} & a_{\beta,q} & \cdots & a_{\beta,r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{\mu,p} & a_{\mu,q} & \cdots & a_{\mu,r} \end{vmatrix} (-1)^{(\alpha-1)+(\beta-2)+\cdots+(\mu-m)}(-1)^{(p-1)+(q-2)+\cdots+(r-m)} \tag{I}$$

$(p\,q\,\cdots\,r)$ は $1, 2, \cdots, n$ から選んだ m 個の整数の組み合わせ，$A_{p,q,\cdots,r}$ は小行列式 $|a_{\alpha,p}\cdots|$ の補小行列式である．総和はすべての $(p\,q\,\cdots\,r)$ の組み合わせについてとる．$p, q, \cdots, r$ が 1 から順に並んでいるときは符号 $(-1)^{(p-1)+(q-2)+\cdots+(r-m)}$ は 1 となる．もし，$\alpha, \beta, \cdots, \mu$ および $p, q, \cdots, r$ が n からのほうが近ければ，符号をそれぞれ別々に

$$(-1)^{[n-\mu]+\cdots+[n-(\beta-m+2)]+[n-(\alpha-m+1)]} \qquad と \qquad (-1)^{[n-r]+\cdots+[n-(q-m+2)]+[n-(p-m+1)]} \tag{II}$$

にしてもよい．2 つの小行列式を用いて列方向に展開したい場合は上の式で行と列を交換すればよい．

3 つ以上の小行列式で展開する場合

n 次行列式 A は，n 列を l 個の組に分割してできる l 個の小行列式で展開することができる．小行列式の次数を α，β，$\cdots$，λ とする．$\alpha+\beta+\cdots+\lambda = n$ である．この小行列式を $D_1^{(\alpha)}$, $D_2^{(\beta)}$, $\cdots$，$D_l^{(\lambda)}$ とする．各小行列式の行は，元の行列式の行の順に与えられているとする．すなわち，$D_1^{(\alpha)}$ は $1, 2, \cdots, \alpha$ 行，$D_2^{(\beta)}$ は $\alpha+1, \alpha+2, \cdots, \alpha+\beta$ 行とする．以下同様である．行番号が必ずしもこの順序にならない場合は，予め置換によって整理しておけばよい．そのとき，行列式 A は次のように展開できる．

$$D^{(n)} = \sum_{f<g<\cdots<h;u<v<\cdots<w;\cdots;x<y<\cdots<z}^{n!/\alpha!\beta!\cdots\lambda!} \mathrm{sgn}\,(\alpha\,\beta\,\cdots\,\lambda) D_1^{(\alpha)} D_2^{(\beta)} \cdots D_l^{(\lambda)} \tag{III}$$

ただし，

$$\mathrm{sgn}\,(\alpha\,\beta\,\cdots\,\lambda) = \mathrm{sgn}\,(f\,g\,\cdots\,h\;u\,v\,\cdots\,w\;\cdots\;x\,y\,\cdots\,w)$$

$$
\begin{aligned}
D_1^{(\alpha)} &= \sum_{j=1}^{\alpha!} \mathrm{sgn}\,(f_j\, g_j\, \cdots\, h_j) a_{1f_j} a_{2g_j} \cdots a_{\alpha h_j} \\
D_2^{(\beta)} &= \sum_{j=1}^{\beta!} \mathrm{sgn}\,(u_j\, v_j\, \cdots\, w_j) a_{\alpha+1,f} a_{\alpha+2,v_j} \cdots a_{\alpha+\beta,w_j} \\
&\cdots \\
D_l^{(\lambda)} &= \sum_{j=1}^{\lambda!} \mathrm{sgn}\,(x_j\, y_j\, \cdots\, z_j) a_{n-\lambda+1,x_j} a_{n-\lambda+2,y_j} \cdots a_{n,z_j}
\end{aligned}
$$

である．$(f\, g \cdots h)$ $(f < g < \cdots < h)$ は $\{1, 2, \cdots, n\}$ から取り出された α 個の列番号の組で $(f_j\, g_j\, \cdots\, h_j)$ はその置換である．$(u\, v \cdots w)$ $(u < v < \cdots < w)$，および $(x\, y \cdots z)$ $(x < y < \cdots < z)$ も同様である．$\mathrm{sgn}\,(f_j\, g_j\, \cdots\, h_j)$ は $(f\, g \cdots h)$ から $(f_j\, g_j\, \cdots\, h_j)$ への置換の符号を表す．他の符号も同様である．総和は n 個から α 個，β 個，$\cdots$，λ 個を取るすべての組み合わせの $n!/\alpha!\beta! \cdots \lambda!$ 通りについて取る．

1　はじめに

行列式の展開というとき，ほとんどの線形代数の教科書や，ウィキペディアなどネットの説明には，その行列式の 1 つの行の成分とその余因子の積による展開か，あるいは 1 つの列の成分とその余因子の積による展開しか書かれていない．一般には 2 次以上の小行列式の積による展開ができることがわかっている．小行列式による行列式展開はその 1 つの例として与えられる．2 つの小行列式による行列式展開はラプラス (Laplace) の定理として知られる (R. F. Scott の “A Treatise on the Theory of Determinants” [1] の第 3 章)．ここでは，以上の行列式の展開式に加えて，Laplace の定理を敷衍した 3 個以上の小行列式による行列式の展開式までの導出を述べる．

2　交代数と交代数代数

Scott の本 [1] では alternate number と書いてあるが，これには適当な訳語が見つからなかったので，一般的ではないかもしれないが，交代数としておこう[1]．また，この交代数の演算を交代数代数 (alternate algebra) と呼ぶことにしよう．

交代数を $e_1, e_2, \cdots, e_n$ と表す．交代数の加法と乗法の演算では分配則および結合則が成り立つ．Scott にならって，普通の数をスカラーと呼ぶことにすると，交代数はスカラーを係数に持つことができて，スカラーを係数とする交代数の積はスカラーのみの積が交代数の積の係数になる．つまり，スカラーと交代数の代数は独立している．

交代数には次のような反交換関係が成り立つ

$$e_i e_j = -e_j e_i \tag{1}$$

$e_j = e_i$ のときには，$e_i^2 = -e_i^2$ であるから，

$$e_i^2 = 0 \tag{2}$$

である．以上の関係式を利用すると，次のような関係も成り立つ．

$$(a_1 e_1 + a_2 e_2 + \cdots + a_n e_n)^2 = \sum_{i=0}^{n} a_i^2 e_i^2 + \sum_{i<j} a_i a_j (e_i e_j + e_j e_i) = 0 \tag{3}$$

[1] これはグラスマン数とも言われる．

つまり，交代数の 1 次式の 2 乗は 0 となる．また，簡単にわかるように，交代数の 1 次式の間にも反交換関係が成り立つ．

行列式の定義のときには，最後に，

$$e_1 e_2 \cdots e_n = 1 \tag{4}$$

とおく．

3 行列式の定義

次のような n 次正方行列 A を考える．

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{5}$$

線形代数の教科書 [2] にある行列式の定義を用いると A の行列式 $D^{(n)} = \det(A)$ は

$$D^{(n)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(p\,q\,\cdots\,t)} \mathrm{sgn}\,(p\,q\,\cdots\,t)\; a_{1p} a_{2q} \cdots a_{nt} \tag{6}$$

と表される．D の右肩の (n) は行列式が n 次であることを示す．$(p\,q\,\cdots\,t)$ は $(1\,2\,\cdots\,n)$ の置換である．総和は $(1\,2\,\cdots\,n)$ の全ての置換についての和である．$\mathrm{sgn}\,(p\,q\,\cdots\,t)$ は置換 $(p\,q\,\cdots\,t)$ の符号，すなわち偶置換 (互換の数が偶数) の場合は 1，奇置換の場合は -1 である．

一方，交代数を用いた次の式を考えてみよう．

$$\begin{aligned} &(a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + \cdots + a_{1n}e_n)(a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + \cdots + a_{2n}e_n) \cdots (a_{n1}e_1 + a_{n2}e_2 + \cdots + a_{nn}e_n) \\ =& \prod_{i=1}^{n}{}' (a_{i1}e_1 + a_{i2}e_2 + \cdots + a_{in}e_n) \end{aligned} \tag{7}$$

ここで使われている交代数に関わる総乗記号 $\prod'$ は，通常の可換の乗法とは異なり，i の昇順に左から並べるものとする．この式を展開すると，式 (2) により，e_i の積には同じ添字の交代数は現れないから，次のように表すことができる．

$$\prod_{i=1}^{n}{}' (a_{i1}e_1 + a_{i2}e_2 + \cdots + a_{in}e_n) = \sum_{(p\,q\,\cdots\,t)} a_{1p} a_{2q} \cdots a_{nw}\; e_p e_q \cdots e_t \tag{8}$$

ここで，式 (1) を適用すると，$(p\,q\,\cdots\,t)$ は $(1\,2\,\cdots\,n)$ の置換であるから，$e_p e_q \cdots e_t = \mathrm{sgn}\,(p\,q\,\cdots\,t) e_1 e_2 \cdots e_n$ である．式 (4) により，

$$\begin{aligned} \sum_{(p\,q\,\cdots\,t)} a_{1p} a_{2q} \cdots a_{nt}\; e_p e_q \cdots e_t &= \sum_{(p\,q\,\cdots\,t)} \mathrm{sgn}\,(p\,q\,\cdots\,t) a_{1p} a_{2q} \cdots a_{nt}\; e_1 e_2 \cdots e_n \\ &= \sum_{(p\,q\,\cdots\,t)} \mathrm{sgn}\,(p\,q\,\cdots\,t) a_{1p} a_{2q} \cdots a_{nt} \end{aligned} \tag{9}$$

である．この式は式 (6) の右辺と等しいから，結局，

$$
\begin{aligned}
D^{(n)} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&= (a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + \cdots + a_{1n}e_n)(a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + \cdots + a_{2n}e_n)\cdots(a_{n1}e_1 + a_{n2}e_2 + \cdots + a_{nn}e_n) \\
&= \prod_{i=1}^{n}{}' (a_{i1}e_1 + a_{i2}e_2 + \cdots + a_{in}e_n) \qquad (10)
\end{aligned}
$$

となる．つまり，行列式は交代数を用いて式 (10) で表すことができる．

4　行列式展開の一般式（2 つの小行列式）

式 (10) で定義される行列式 $D^{(n)}$ は交代数の 1 次関数の n 個の積である．これを次のように大きく 2 つの総乗の積として表す．

$$
D^{(n)} = \prod_{i=1}^{m}{}' (a_{i1}e_1 + a_{i2}e_2 + \cdots + a_{in}e_n) \times \prod_{i=m+1}^{n-m}{}' (a_{i1}e_1 + a_{i2}e_2 + \cdots + a_{in}e_n) \qquad (11)
$$

このうち，前の総乗部分は交代数の 1 次式の m 個の積で，これを展開すると，重複のない m 個の交代数の積のみが残る．したがって，次のように変形することができる．

$$
\begin{aligned}
&\prod_{i=1}^{m}{}' (a_{i1}e_1 + a_{i2}e_2 + \cdots + a_{in}e_n) \\
&= \sum_{\substack{(p\,q\,\cdots\,r) \\ p<q<\cdots<r}}^{n!/m!(n-m)!} \sum_{j=1}^{m!} a_{1p_j}a_{2q_j}\cdots a_{mr_j}\ e_{p_j}e_{q_j}\cdots e_{r_j} \\
&= \sum_{\substack{(p\,q\,\cdots\,r) \\ p<q<\cdots<r}}^{n!/m!(n-m)!} \sum_{j=1}^{m!} \mathrm{sgn}\,(p_j\,q_j\,\cdots\,r_j)\ a_{1p_j}a_{2q_j}\cdots a_{mr_j}\ e_p e_q \cdots e_r \qquad (12)
\end{aligned}
$$

ここで，$p, q, \cdots, r\ (p < q < \cdots < r)$ は $\{1, 2, \cdots, n\}$ から m 個を取り出した列番号の組で，$(p_j\,q_j\,\cdots\,r_j)$ は $(p\,q\,\cdots\,r)$ の $m!$ 個の置換のうち j 番目の置換を表す．2 つの総和は，最初に n 個の列番号から m 個を取り出し，次にその m 個の列番号の全ての順列について和を取ることを意味する．また，$\mathrm{sgn}\,(p_j\,q_j\,\cdots\,r_j)$ は，交代数代数により $e_{p_j}e_{q_j}\cdots e_{r_j}$ から $e_pe_q\cdots e_r$ に変形したときの符号を示す．この変形は $(p\,q\,\cdots\,r)$ から $(p_j\,q_j\,\cdots\,r_j)$ への置換に等しい．したがって，$\mathrm{sgn}\,(p_j\,q_j\,\cdots\,r_j)$ は $(p\,q\,\cdots\,r)$ から $(p_j\,q_j\,\cdots\,r_j)$ への置換の符号である．

さらに，j に関する総和の部分の $\sum_{j=1}^{m} \mathrm{sgn}\,(p_jq_j\cdots r_j)\ a_{1p_j}a_{2q_j}\cdots a_{mr_j}$ に注目すると，これは，行列式 A の第 1 行から第 m 行と，第 $p, q, \cdots, r$ 列からなる小行列式の展開になっていることがわかる．すなわち，これを $D_1^{(m)}(p, q, \cdots, r)$ とすると，

$$
D_1^{(m)}(p, q, \cdots, r) = \begin{vmatrix} a_{1p} & a_{1q} & \dots & a_{1r} \\ a_{2p} & a_{2q} & \dots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{mp} & a_{mq} & \dots & a_{mr} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{m} \mathrm{sgn}\,(p_j\,q_j\,\cdots\,r_j)\ a_{1p_j}a_{2q_j}\cdots a_{mr_j} \qquad (13)
$$

であるから，式 (12) は，

$$\prod_{i=1}^{m}{}'(a_{i1}e_1+a_{i2}e_2+\cdots+a_{in}e_n)=\sum_{\substack{(p\,q\,\cdots\,r)\\ p<q<\cdots<r}}^{n!/m!(n-m)!} D_1^{(m)}(p,q,\cdots,r)\;e_pe_q\cdots e_r \tag{14}$$

となる．

次に，式 (11) の 2 番目の総乗部分について同じように変形すると，

$$\begin{aligned}
&\prod_{i=m+1}^{n}{}'\;(a_{i1}e_1+a_{i2}e_2+\cdots+a_{in}e_n)\\
&=\sum_{\substack{(u\,v\,\cdots\,w)\\ u<v<\cdots<w}}^{n!/m!(n-m)!}\;\sum_{j=1}^{(n-m)!} a_{m+1,u_j}a_{m+2,v_j}\cdots a_{nw_j}\;e_{u_j}e_{v_j}\cdots e_{w_j}\\
&=\sum_{\substack{(u\,v\,\cdots\,w)\\ u<v<\cdots<w}}^{n!/m!(n-m)!}\;\sum_{j=1}^{(n-m)!} \mathrm{sgn}\,(u_jv_j\cdots w_j)\;a_{m+1,u_j}a_{m+2,v_j}\cdots a_{nw_j}\;e_ue_v\cdots e_w
\end{aligned} \tag{15}$$

となる．ここでも，$(u\,v\,\cdots\,w)$ $(u<v<\cdots<w)$ は $\{m+1,m+2,\cdots,n\}$ から取り出した $n-m$ 個の列番号の組で，$(u_j\,v_j\,\cdots\,w_j)$ は $(u\,v\,\cdots\,w)$ の置換を表す．2 つの総和記号の意味は，最初に，取り出された $n-m$ 個の列番号の組のすべての順列について総和し，次に，$n-m$ 個を取り出すすべての組み合わせについて同じことを繰り返すことを示す．また，式 (15) の j に関する総和の部分は，式 (13) と同じように行列式 A の第 m+1 行から第 n 行と，第 $u,v,\cdots,w$ 列からなる小行列式になっていることを示す．すなわち，これを $D_2^{(n-m)}(u,v,\cdots,w)$ とすると，

$$D_2^{(n-m)}(u,v,\cdots,w)=\begin{vmatrix} a_{m+1,u} & a_{m+1,v} & \cdots & a_{m+1,w}\\ a_{m+2,u} & a_{m+2,v} & \cdots & a_{m+2,w}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n,u} & a_{n,v} & \cdots & a_{nw}\end{vmatrix}=\sum_{j=1}^{(n-m)!}\mathrm{sgn}\,(u_jv_j\cdots w_j)\;a_{m+1,u_j}a_{m+2,v_j}\cdots a_{n,w_j} \tag{16}$$

となるので，式 (15) は

$$\prod_{i=m+1}^{n}{}'\,(a_{i1}e_1+a_{i2}e_2+\cdots+a_{in}e_n)=\sum_{\substack{(u\,v\,\cdots\,w)\\ u<v<\cdots<w}}^{n!/m!(n-m)!} D_2^{(n-m)}(u,v,\cdots,w)\;e_ue_v\cdots e_w \tag{17}$$

となる．

式 (14) と式 (17) を式 (11) に代入すると，

$$D^{(n)}=\sum_{\substack{(p\,q\,\cdots\,r)\\ p<q<\cdots<r}}^{n!/m!(n-m)!}\;\sum_{\substack{(u\,v\,\cdots\,w)\\ u<v<\cdots<w}}^{n!/m!(n-m)!} D_1^{(m)}(p,q,\cdots,r)D_2^{(n-m)}(u,v,\cdots,w)\;(e_pe_q\cdots e_r)\;(e_ue_v\cdots e_w) \tag{18}$$

となる．この式で，$(p,q,\cdots,r)$ と $(u,v,\cdots,w)$ の間に 1 つでも重複があれば交代数代数により $(e_pe_q\cdots e_r)(e_ue_v\cdots e_w)=0$ となるのでその項は消える．すなわち，式 (18) の $(u,v,\cdots,w)$ に関する総和で消えずに残るのは $(p,q,\cdots,r)$ と重複のない組み合わせだけである．$1,2,\cdots,n$ から選んだ m 個の $p,q,\cdots,r$ と重複しないのは残りの $n-m$ 個だけになるから，それ以外は重複して 0 になる．つまり，$(u,v,\cdots,w)$ は 1 つの組み合わせに限定されるから，式 (18) の 2 番目の総和は必要がなくなる．したがって，式 (18) は

$$D^{(n)}=\sum_{\substack{(p\,q\,\cdots\,r)\\ p<q<\cdots<r}}^{n!/m!(n-m)!} D_1^{(m)}(p,q,\cdots,r)D_2^{(n-m)}(u,v,\cdots,w)\;(e_pe_q\cdots e_r)\;(e_ue_v\cdots e_w) \tag{19}$$

となる．$(e_p e_q \cdots e_r)(e_u e_v \cdots e_w)$ は e_1 から e_n の n 次の積であり，順序の交換により $e_1 e_2 \cdots e_n$ となる．その時の符号は $(p\,q \cdots r\ \ u\,v \cdots w)$ から $(1\,2 \cdots n)$ への置換の符号 $\mathrm{sgn}\,(p\,q \cdots r\ \ u\,v \cdots w)$ と同じである．したがって，

$$(e_p e_q \cdots e_r)\,(e_u e_v \cdots e_w) = \mathrm{sgn}\,(p\,q \cdots r\ \ u\,v \cdots w)\,(e_1 e_2 \cdots e_n) \tag{20}$$

とできるので，これを式 (19) に代入して $e_1 e_2 \cdots e_n = 1$ を用いると，

$$D^{(n)} = \sum_{{}_n\mathrm{C}_m} \mathrm{sgn}\,(p\,q \cdots r\ \ u\,v \cdots w) D_1^{(m)}(p, q, \cdots, r) D_2^{(n-m)}(u, v, \cdots, w) \tag{21}$$

とすることができる．この式はラプラスの定理と呼ばれる．式 (21) から，任意の行列式は，第 1 行から第 m 行を含む全ての m 次の小行列式とその補小行列式の積で展開することができる．行列式では，行と列を交換しても式の値は変わらないから，m 列で展開することも同じように成り立つ．すなわち，任意の行列式は，第 1 列から第 m 列を含む全ての m 次の小行列式とその補小行列式の積で展開することができる．一般に知られている行列式の余因子展開は $m = 1$ の場合に相当する．

ここまでは，小行列式 $D_1^{(m)}$ を作る際に第 1 行から第 m 行までを選んだが，この行の選び方は任意で構わない．なぜなら，行を交換しても符号を除いて行列式の値は変わらないからで，どのような行の組み合わせであっても，行の置換により第 1 行から第 m 行の組み合わせにできるからである．また，列に関しても同様である．任意に選んだ m 行または m 列を用いて小行列式展開をする場合には選んだ m 行または m 列の組み合わせにより符号が変わるので注意を要する．一般の場合の符号に関してはこの後で述べる．

式 (21) の導き方には以下のような方法もある．式 (6) の $(12 \cdots n)$ の置換に関する総和は次のように書き直すことができる．

$$D^{(n)} = \sum_{(pq\cdots r)}^{{}_n\mathrm{C}_m} \sum_{i=1}^{m!} \sum_{j=1}^{(n-m)!} \mathrm{sgn}\,(p_i\,q_i\, \cdots\, r_i\ \ u_j\,v_j\, \cdots\, w_j)\; a_{1p_i} a_{2q_i} \cdots a_{mr_i}\; a_{m+1,u_j} a_{m+2,v_j} \cdots a_{nw_j} \tag{22}$$

ただし，$p, q, \cdots, r\ (p < q < \cdots < r)$ は列番号 $1, 2, \cdots, n$ から取り出した m 個の列番号であり，$u, v, \cdots, w\ (u < v < \cdots < w)$ は残りの列番号である．$(p_i\,q_i\, \cdots\, r_i)$ は $(p\,q \cdots r)$ の置換，$(u_j\,v_j\, \cdots\, w_j)$ は $(u\,v \cdots w)$ の置換である．この式は以下のように解釈される．まず，行列式 $D^{(n)}$ の成分の積 $a_{1p}\, a_{2q} \cdots a_{mr}\, a_{m+1,u}\, a_{m+2,v} \cdots a_{nw}$ を第 1 行から第 m 行までと第 $m+1$ 行から第 n 行までの 2 つに分け，最初に，m 列の組 $(p\,q \cdots r)$ を取り上げ，これについて，第 $m+1$ 行から第 n 行までと残った $n-m$ 列の成分の積を $(u\,v \cdots w)$ の全ての順列について総和をとる．次に，$(p\,q \cdots r)$ の 1 つの置換を取り同じ総和をとる．これをすべての置換について繰り返す．最後に，以上の総和を，m 列を取り出すすべての組み合わせについて総和を取れば，$D^{(n)}$ における $(1\,2 \cdots n)$ の全ての置換を網羅することができる．

ここまで使われてきた $\mathrm{sgn}\,(p_j\,q_j \cdots r_j)$ と $\mathrm{sgn}\,(u_j\,v_j \cdots w_j)$ はそれぞれ $(p\,q \cdots r)$ から $(p_j\,q_j \cdots r_j)$ へと $(u\,v \cdots w)$ から $(u_j\,v_j \cdots w_j)$ への置換の符号であるのに対し，式 (22) の $\mathrm{sgn}\,(p_i\,q_i \cdots r_i\ \ u_j\,v_j \cdots w_j)$ は $(1\,2 \cdots n)$ から $(p_i\,q_i \cdots r_i\ \ u_j\,v_j \cdots w_j)$ への置換の符号である．$(p\,q \cdots r)$ から $(p_j\,q_j \cdots r_j)$ への置換は $(p\,q \cdots r\ \ u\,v \cdots w)$ から $(p_i\,q_i \cdots r_i\ \ u\,v \cdots w)$ への置換と同等である．前者の符号は，$\mathrm{sgn}\,(p\,q \cdots r) = 1$ としてよいから，$\mathrm{sgn}\,(p_j\,q_j \cdots r_j)$ であるのに対し，後者の符号は，$\mathrm{sgn}\,(p\,q \cdots r\ \ u\,v \cdots w)$ と $\mathrm{sgn}\,(p_i\,q_i \cdots r_i\ \ u\,v \cdots w)$ の積になる．その理由は，後者の置換が $(p\,q \cdots r\ \ u\,v \cdots w)$ から $(1\,2 \cdots n)$ への置換と $(1\,2 \cdots n)$ から $(p_i\,q_i \cdots r_i\ \ u\,v \cdots w)$ への置換という 2 つの置換で表されるからである．したがって，次の関係式が得られる．

$$\mathrm{sgn}\,(p_i\,q_i \cdots r_i) = \mathrm{sgn}\,(p_i\,q_i \cdots r_i\ \ u_j\,v_j \cdots w_j)\ \mathrm{sgn}\,(p\,q \cdots r\ \ u_j\,v_j \cdots w_j) \tag{23}$$

さらに，$(u\,v \cdots w)$ から $(u_j\,v_j \cdots w_j)$ への置換についても $(p\,q \cdots r\ \ u\,v \cdots w)$ から
$(p\,q \cdots r\ \ u_j\,v_j \cdots w_j)$ への置換と同じとみなしてよいから，上と同様にして，

$$\mathrm{sgn}\,(u_j\,v_j \cdots w_j) = \mathrm{sgn}\,(p\,q \cdots r\ \ u_j\,v_j \cdots w_j)\ \mathrm{sgn}\,(p\,q \cdots, r\,u\,v \cdots w) \tag{24}$$

という関係式が得られる．以上の 2 つの式を辺辺掛けると，

$$\mathrm{sgn}\,(p_i\,q_i\,\cdots\,r_i)\,\mathrm{sgn}\,(u_j\,v_j\,\cdots\,w_j) = \mathrm{sgn}\,(p_i\,q_i\,\cdots\,r_i\,u_j\,v_j\,\cdots\,w_j)\;\;\mathrm{sgn}\,(p\,q\,\cdots\,r\;\;u\,v\cdots\,w) \tag{25}$$

が得られる．両辺に $\mathrm{sgn}\,(p\,q\,\cdots\,r\;\;u\,v\,\cdots\,w)$ を掛けると

$$\mathrm{sgn}\,(p_i\,q_i\,\cdots\,r_i)\;\;\mathrm{sgn}\,(u_j\,v_j\,\cdots\,w_j)\mathrm{sgn}\,(p\,q\,\cdots\,r\;\;u\,v\,\cdots\,w) = \mathrm{sgn}\,(p_i\,q_i\,\cdots\,r_i\;\;u_j\,v_j\,\cdots\,w_j) \tag{26}$$

となる．式 (26) の右辺を式 (22) に代入すると，

$$\begin{aligned} D^{(n)} = & \sum_{(p\,q\,\cdots\,r)}^{{}_n\mathrm{C}_m} \mathrm{sgn}\,(p\,q\,\cdots\,r\;\;u\,v\,\cdots\,w) \\ & \times \sum_{i=1}^{m!} \mathrm{sgn}\,(p_i\,q_i\,\cdots\,r_i)\,a_{1p_i}\,a_{2q_i}\,\cdots\,a_{mr_i}\;\sum_{j=1}^{(n-m)!} \mathrm{sgn}\,(u_j\,v_j\,\cdots\,w_j)\,a_{m+1,u_j}\,a_{m+2,v_j}\,\cdots a_{n,w_j} \end{aligned} \tag{27}$$

となる．これに式 (13) と (16) を代入すると，式 (21) が得られる．

符号の決定

式 (21) の $D_1^{(m)}(p,q,\cdots,r)D_2^{(n-m)}(u,v,\cdots,w)$ の符号を表す具体的な数式を求めよう．

最初に，$D_1^{(m)}(1,2,\cdots,m)$ と $D_2^{(n-m)}(m{+}1,m{+}2,\cdots,n)$ の積を考えてみよう．この 2 つの小行列式の積の符号は + である．その理由は以下の通りである．式 (6) の $D^{(n)}$ の展開式には対角成分の積 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ の項が含まれる．対角成分の積であるからその符号は + である．一方，$D_1^{(m)}(1,2,\cdots,m)$ と $D_2^{(n-m)}(m{+}1,m{+}2,\cdots,n)$ のそれぞれの対角成分の積 $a_{11}\cdots a_{mm}$ と $a_{m+1,m+1}\cdots a_{nn}$ の符号も，対角成分であるから両方とも + で，その積の符号も + である．2 つの小行列式の積の符号は，両者が一致するものでなければならない．したがって，$D_1^{(m)}(1,2,\cdots,m)D_2^{(n-m)}(m+1,m+2,\cdots,n)$ の符号は + でなければならない．

任意に列を選んだ場合においても同じようにして $D_1^{(m)}D_2^{(n-m)}$ の符号は決まる．$D_1^{(m)}(p,q,\cdots,r)$ $(p<q<\cdots<r)$ と $D_2^{(n-m)}(u,v,\cdots,w)$ $(u<v<\cdots<w)$ を考えよう．$D_1^{(m)}D_2^{(n-m)}$ は，式 (13)，(16) から，

$$D_1^{(m)}D_2^{(n-m)} = \sum_{i=1}^{m!} \mathrm{sgn}\,(p_i\,q_i\,\cdots\,r_i)\,a_{1p_i}\,a_{2q_i}\,\cdots\,a_{mr_i}\;\sum_{j=1}^{(n-m)!} \mathrm{sgn}\,(u_j\,v_j\,\cdots\,w_j)\,a_{m+1,u_j}\,a_{m+2,v_j}\,\cdots\,a_{n,w_j} \tag{28}$$

となるが，これを展開した時に出てくる $D_1^{(m)}$ と $D_2^{(n-m)}$ の対角成分の積

$$\begin{aligned} & \mathrm{sgn}\,(p\,q\,\cdots\,r)\,a_{1p}\,a_{2q}\cdots\;a_{mr}\;\;\mathrm{sgn}\,(u\,v\,\cdots\,w)\,a_{m+1,u}\,a_{m+2,v}\;\cdots\;a_{nw} \\ = & a_{1p}\,a_{2q}\,\cdots\,a_{mr}\;\;a_{m+1,u}\,a_{m+2,v}\,\cdots\,a_{nw} \end{aligned} \tag{29}$$

は符号が + である．一方，$D^{(n)}$ においては，この項の符号は $\mathrm{sgn}\,(p\,q\,\cdots\,r\,u\,v\,\cdots\,w)$ である．両者の符号は一致しなければならない．したがって，$D_1^{(m)}D_2^{(n-m)}$ の符号は $\mathrm{sgn}\,(p\,q\,\cdots\,r\,u\,v\,\cdots\,w)$ でなければならない．つまり，$D_1^{(m)}D_2^{(n-m)}$ の符号は $D_1^{(m)}$ と $D_2^{(n-m)}$ を構成している列の並び $(p\,q\,\cdots\,r\,u\,v\,\cdots\,w)$ の $(1\,2\,\cdots\,\mathrm{n})$ への置換で決まる．

行の選び方を任意に選んだ場合は，列の置換に加えて，行の置換により符号が変わる．したがって，式 (21) における $D_1^{(m)}D_2^{(n-m)}$ の符号は，列を選んだ組み合わせ，および行を選んだ組み合わせの両方の置換の符号の積でなければならない．

以上の置換の仕方を具体的に式で表すと符号の数式が得られる．

いま，$D_1^{(m)}$ が $D^{(n)}$ の $(f\,g\,\cdots\,h)$ $\ f<g<\cdots<h)$ 行と $(p\,q\,\cdots\,r)$ 列からなり，$D_2^{(m)}$ は $D^{(n)}$ の $(i\,j\,\cdots\,k)$ $(i<j<\cdots<k)$ 行と $(u\,v\,\cdots\,w)$ 列からなるとする．f または i は 1 で，h または k は n である．$D_1^{(m)}$ の対角成分の積は $a_{fp}a_{gq}\cdots a_{hr}$ とであり，$D_2^{(m)}$ の対角成分の積は $a_{iu}a_{jv}\cdots a_{kw}$ であり，両方とも符号は $+$ である．その積は，

$$(a_{fp}a_{gq}\cdots a_{hr})(a_{iu}a_{jv}\cdots a_{kw}) \tag{30}$$

で，符号も $+$ である．いま，$i=1$，$h=n$ であるとする．この積が $D^{(n)}$ の

$$(a_{1u}\cdots a_{fp}\cdots a_{gq}\cdots a_{jv}\cdots a_{kw}\cdots a_{nr}) \tag{31}$$

と一致したとしよう．この項の符号は

$$\operatorname{sgn}(u\cdots p\cdots q\cdots v\cdots w\cdots r) \tag{32}$$

である．したがって，これが $D_1^{(m)}D_2^{(n-m)}$ の符号になる．

式 (30) は，$D^{(n)}$ の n 次行列式で考えると，m 次行列式のブロックと $(n-m)$ 次行列式のブロックを対角線上に並べたときのそれぞれのブロックの対角線成分の積を表している．これを $D^{(n)}$ の本来の位置に移動するために施す行と列の互換の回数が式 (32) の符号を表すことになる．ここでは，式 (31) の位置から式 (30) の位置に移動することを考えてみよう．これは逆の操作になるが置換の符号は変わらない．この移動は m 個の列の移動と m 個の行の移動の 2 段階からなる．最初は，列番号 $(1,2,\cdots,n)$ から列番号 $(pq\cdots ruv\cdots w)$ への置換で，$(1,2,\cdots,n)$ の列 p を左端に移動する（互換を繰り返す）ことから始め，q を同様にして p の右に移動し，以下 r まで繰り返して置換は完了する．次は，行番号 $(1,2,\cdots,n)$ から行番号 $(f,g,\cdots,h,i,j,\cdots,k)$ への置換で，$(1,2,\cdots,n)$ の行 f を左端に移動する（互換を繰り返す）ことから始め，g を同様にして f の右に移動し，以下 k まで繰り返して置換は完了する．以上により，式 (31) から式 (30) への移動が完了し，この移動に要した互換の数で式 (32) の値が決まる．

上に示した操作では，列 $p,\ q,\ \cdots r$ の先頭部分への移動から始め，次いで行 $f,g,\cdots,h$ を先頭部分へ移動したが，列 $u,v,\cdots,w$ を w から順次列の最後尾に移動することから始めてもよい．その場合は，行 $i,j,\cdots,k$ を k から最後尾の右側の部分に移動すればよい．以上の操作の場合でも符号は先頭部分へ移動した場合と一致する．

以上，2 つの置換の積が符号を決めることになる．この置換の符号を数式で表すには以下のようにすればよい．$(1,2,\cdots,n)$ から出発して $(fg\cdots hij\cdots k)$ まで行くには，行 $f,g,\cdots,h$ を移動するとき，行 f を第 1 行へ $f-1$ 回互換，行 g を第 2 行へと移動する場合は，飛び越す行の数が既に移動した行の分だけ減ることも考え $g-1-1$ 回互換，以下同様にして，符号は

$$(-1)^{f-1}(-1)^{g-1-1}\cdots(-1)^{h-1-m+1} \tag{33}$$

となる．

$(1,2,\cdots,n)$ から出発して $(pq\cdots ruv\cdots w)$ へ行くには，列 $p,q,\cdots,r$ を移動するとき，既に移動した列が除かれることも考慮し，列 p を第 1 列へ $p-1$ 回互換，列 g を第 2 列へ $g-1-1$ 回互換，以下同様にして，符号は

$$(-1)^{p-1}(-1)^{q-1-1}\cdots(-1)^{r-1-m+1} \tag{34}$$

となる．

行 $i,j,\cdots,k$ を行の最後の部分に移動する場合の符号は，最下行から $k,\cdots,j,i$ の順に移動すると，既に移動した行の数を差し引くことも同様にして，

$$(-1)^{n-k}\cdots(-1)^{n-j-n+m+1}(-1)^{n-i-n+m} \tag{35}$$

である．列 $u, v, \cdots, w$ の移動に関する符号は右側から $w, \cdots, v, u$ の順に移動すると，

$$(-1)^{n-w} \cdots (-1)^{n-v-n+m+1}(-1)^{n-u-n+m} \tag{36}$$

となる．

いくつかの例

一般式に進む前に，具体的な例を用いて説明することにしよう．そのために，小行列式の積を

$$(pq \cdots r)(uv \cdots w) \tag{37}$$

のように表すことにする．その意味は，最初の ( ) は順番を含めて D_1 に選ばれた列を表し，その次の ( ) は D_2 に選ばれた列を表す．すなわち，式 (37) の 1 番目の ( ) の中の数字は最初から第 1 列が D の第 p 列，第 2 列が D の第 q 列，第 m 列が D の第 r 列という意味である．2 番目の ( ) についても D_2 の第 1 列が D の第 u 列，第 2 列が D の第 v 列，ということになる．以下同様である．行については，偶置換であればどのような取り方でも構わない．わかりやすいのは最初の ( ) には第 1 行から第 m 行，次の ( ) には第 $m+1$ 行から第 n 行をとる場合である．

4 次の行列式の場合，2 次の行列式を用いて次のように展開できる．

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = (12)(34) + (23)(14) + (31)(24) + (34)(12) + (14)(23) + (24)(31) \tag{38}$$

ただし，小行列式に選ばれた行は D_1 で第 1 行，第 2 行，D_2 で第 3 行，第 4 行としている．これは各項に共通でなければならない．上の式で右辺各項は例えば (31)(24) は具体的に，

$$(31)(24) = \begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{23} & a_{21} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{32} & a_{34} \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} \tag{39}$$

である．

5 次の行列式を 2 次と 3 次の行列式で展開する場合は次のようになる．

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix} &= (12)(345) + (13)(425) + (14)(235) + (15)(243) + (23)(145) \\ &\quad + (24)(315) + (25)(134) + (34)(125) + (35)(142) + (45)(123) \end{aligned} \tag{40}$$

ただし，行の選び方は偶置換とする．

D_1 が 1 次の小行列式の場合は次のようになる．

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = (1)(234) - (2)(134) + (3)(124) - (4)(123) \tag{41}$$

ただし，D_1 は D の第 1 行，D_2 は D の第 2，3，4 行を順に取り上げている．各項は具体的には

$$(1) = a_{11}, \quad (234) = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad (2) = a_{12}, \quad (134) = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \tag{42}$$

のように表される．この式は第 1 行の余因子を用いた行列式の展開である [2].

5 行列式展開の一般式（3 個以上の小行列式）

3 個以上の小行列式による行列式展開式についても 2 個の小行列式による展開の場合と同様に導くことができる．小行列式の数を l とする．それぞれの小行列式の次数を $\alpha, \beta, \cdots, \lambda$ とすると，

$$\alpha + \beta + \cdots + \lambda = n \tag{43}$$

である．各小行列式はそれ以外の小行列式全体に対して補小行列式になっているのでここでは全て補小行列式と呼ぶ．前節と同じように，交代数で表した行列式 $D^{(n)}$ の式を行番号の順に α 行の積，β 行の積，以下 λ 行の積まで，以下のように，l 個の総乗の積で表す．

$$\begin{aligned} D^{(n)} &= {\prod_{i=1}^{n}}'(a_{i1}e_1 + a_{i2}e_2 + \cdots + a_{in}e_n) \\ &= {\prod_{i=1}^{\alpha}}'(a_{i1}e_1 + a_{i2}e_2 + \cdots + a_{in}e_n){\prod_{i=\alpha+1}^{\alpha+\beta}}'(a_{i1}e_1 + a_{i2}e_2 + \cdots + a_{in}e_n)\cdots{\prod_{i=n-\lambda+1}^{n}}'(a_{i1}e_1 + a_{i2}e_2 + \cdots + a_{in}e_n) \end{aligned} \tag{44}$$

とする．

式 (44) において，第 1 総乗を展開した α 次の交代数の項と第 2 総乗を展開した β 次の交代数の項との積ができるが，交代数が重複している積は交代数の性質により 0 となるから，第 1 総乗の展開項の中から 1 つの項を選択した場合，第 2 総乗の展開の中で残る後は前者と交代数の重複がない項だけになる．第 3 総乗でも展開した後，第 1 総乗の展開項および第 2 総乗の展開項との積で 0 にならない項は交代数の重複がない項になる．第 4 総乗以下残りの総乗についても同様に考えると，結局，残る交代数の積は，$(1, 2, \cdots, n)$ を重複がないように l 組の $\alpha, \beta, \cdots, \lambda$ 個の交代数の添字の集合に分けて，それぞれの総乗では選ばれた組の交代数のみからなる交代数の 1 次式の積とし，全体としてそのような l 個の総乗の積になる．これを，$(1, 2, \cdots, n)$ を $\alpha, \beta, \cdots, \lambda$ 個にわけるすべての組み合わせについて総和をとれば式 (44) に等しくなる．これを式で表すと，式 (44) は，

$$\begin{aligned} D^{(n)} = \sum_{\substack{f<g<\cdots<h \\ u<v<\cdots<w \\ \cdots \\ x<y<\cdots<z}}^{n!/\alpha!\beta!\cdots\lambda!} \Bigg[&{\prod_{i=1}^{\alpha}}'(a_{if}e_f + a_{ig}e_g + \cdots + a_{ih}e_f){\prod_{i=\alpha+1}^{\alpha+\beta}}'(a_{iu}e_u + a_{iv}e_v + \cdots + a_{iw}e_w) \\ &\times \cdots {\prod_{i=n-\lambda+1}^{n}}'(a_{ix}e_x + a_{iy}e_y + \cdots + a_{iz}e_z)\Bigg] \end{aligned} \tag{45}$$

となる．この式で，$f, g, \cdots, h(f < g < \cdots < h)$ は列番号 $1, 2, \cdots, n$ から α 個を取り出した列番号の集まりである．同様に，$u, v, \cdots, w(u < v < \cdots < w)$ は残りの $1, 2, \cdots, n$ から β 個取り出し，$x, y, \cdots, z(x < y < \cdots < z)$ の λ 個については残った列番号の集まりである．このような l 組への分け方は，n 個の列番号を重複なしに α 個，β 個，$\cdots$，λ 個に分ける組み合わせであり，先頭の総和はそのような組み合わせをすべてを加えるという意味である．

次に，この式の大括弧の中の第 1 総乗は次のように変形することができる．

$$\begin{aligned}
&\prod_{i=1}^{\alpha}{}'(a_{if}e_f + a_{ig}e_g + \cdots + a_{ih}e_f) = \sum_{j=1}^{\alpha!} a_{1f_j}a_{2g_j}\cdots a_{\alpha h_j}e_{f_j}e_{g_j}\cdots e_{h_j} \\
=&\sum_{j=1}^{\alpha!}\mathrm{sgn}\,(f_jg_j\cdots h_j)a_{1f_j}a_{2g_j}\cdots a_{\alpha h_j}e_fe_g\cdots e_h \\
=&D_1^{(\alpha)}e_fe_g\cdots e_h \qquad (46)
\end{aligned}$$

ただし，

$$D_1^{(\alpha)} = \sum_{j=1}^{\alpha!}\mathrm{sgn}\,(f_jg_j\cdots h_j)a_{1f_j}a_{2g_j}\cdots a_{\alpha h_j} \tag{47}$$

であり．これは $D^{(n)}$ の第 $1,2,\cdots,\alpha$ 行と第 $f,g,\cdots,h$ 列を取り出した小行列式である．上の式で，$(f_j,g_j,\cdots,h_j)$ は $(f,g,\cdots,h)$ の j 番目の置換であり，$j=1$ のとき $(f,g,\cdots,h)$ とし，$\mathrm{sgn}\,(f,g,\cdots,h)=1$ とする．明らかに式 (47) は行列式の定義を満たしている．

式 (44) の大括弧の中の第 2 総乗以下の総乗についても同様の変形ができて，それぞれ，以下のようになる．

$$\begin{aligned}
&\prod_{i=\alpha+1}^{\alpha+\beta}{}'(a_{iu}e_u + a_{iv}e_v + \cdots + a_{iw}e_w) = \sum_{j=1}^{\beta!} a_{\alpha+1,u_j}a_{\alpha+2,v_j}\cdots a_{\alpha+\beta,w_j}e_{u_j}e_{v_j}\cdots e_{w_j} \\
=&\sum_{j=1}^{\beta!}\mathrm{sgn}\,(u_jv_j\cdots w_j)a_{\alpha+1,f}a_{\alpha+2,v_j}\cdots a_{\alpha+\beta,w_j}e_ue_v\cdots e_w \\
=&D_2^{(\beta)}e_ue_v\cdots e_w \qquad (48)
\end{aligned}$$

$$D_2^{(\beta)} = \sum_{j=1}^{\beta!}\mathrm{sgn}\,(u_jv_j\cdots w_j)a_{\alpha+1,f}a_{\alpha+2,v_j}\cdots a_{\alpha+\beta,w_j} \tag{49}$$

である．$(u_j,v_j,\cdots,w_j)$ は $(u,v,\cdots,w)$ の j 番目の置換であり，$j=1$ のとき $(u,v,\cdots,w)$ とする．$D_2^{(\beta)}$ は，$D^{(n)}$ の第 $\alpha+1,\alpha+2,\cdots,\alpha+\beta$ 行と第 $u,v,\cdots,w$ 列を取り出した小行列式である．

以下，同様であり，最後に，

$$\begin{aligned}
&\prod_{i=n-\lambda+1}^{n}{}'(a_{ix}e_x + a_{iy}e_y + \cdots + a_{iz}e_z) = \sum_{j=1}^{\lambda!} a_{n-\lambda+1,x_j}a_{n-\lambda+2,y_j}\cdots a_{n,z_j}e_{x_j}e_{y_j}\cdots z_{w_j} \\
=&\sum_{j=1}^{\lambda!}\mathrm{sgn}\,(x_jy_j\cdots z_j)a_{\alpha+1,x_j}a_{\alpha+2,y_j}\cdots a_{\alpha+\beta,z_j}e_xe_y\cdots e_z \\
=&D_l^{(\lambda)}e_xe_y\cdots e_z \qquad (50)
\end{aligned}$$

$$D_l^{(\lambda)} = \sum_{j=1}^{\lambda!}\mathrm{sgn}\,(x_jy_j\cdots z_j)a_{n-\lambda+1,x_j}a_{n-\lambda+2,y_j}\cdots a_{n,z_j} \tag{51}$$

である．$(x_j,y_j,\cdots,z_j)$ および $D_l^{(\lambda)}$ などは前と同様である．

式 (46)，(48)，(50) を式 (45) に代入すると，

$$D^{(n)} = \sum_{f<g<\cdots<h;u<v<\cdots<w;\cdots;x<y<\cdots<z}^{n!/\alpha!\beta!\cdots\lambda!} D_1^{(\alpha)}D_2^{(\beta)}\cdots D_l^{(\lambda)}(e_fe_g\cdots e_h)(e_ue_v\cdots e_w)\cdots(e_xe_y\cdots e_z) \tag{52}$$

この式で，交代数の積 $(e_f e_g \cdots e_h)(e_u e_v \cdots e_w) \cdots (e_x e_y \cdots e_z)$ を $e_1 e_2 \cdots e_n = 1$ に変形するのは，交代数の性質を用いて，$(fg \cdots h)(uv \cdots w) \cdots (xy \cdots w)$ を $(12 \cdots n)$ に置換することと同じであるから，結局，$\operatorname{sgn}(fg \cdots h, uv \cdots w, \cdots, xy \cdots w)$ に等しい．すなわち，前式は，

$$\operatorname{sgn}(fg \cdots h, uv \cdots w, \cdots, xy \cdots w) = \operatorname{sgn}(\alpha, \beta, \cdots, \lambda)$$

と書くことにすると，

$$D^{(n)} = \sum_{f<g<\cdots<h; u<v<\cdots<w; \cdots; x<y<\cdots<z}^{n!/\alpha!\beta!\cdots\lambda!} \operatorname{sgn}(\alpha, \beta, \cdots, \lambda) D_1^{(\alpha)} D_2^{(\beta)} \cdots D_l^{(\lambda)} \tag{53}$$

となる．

式 (53) は，$D_1^{(\alpha)}$，$D_2^{(\beta)}, \cdots, D_l^{(\lambda)}$ の各行は第 1 行から第 α 行まで, 第 $\alpha+1$ 行から β までと順に各補小行列式に割り振られている場合である．このような行の配列と異なる行列式の展開をする場合には，予め行の置換により α 行から λ 行になるように再配置しておけばよい．今の場合は，行方向の複数の小行列式による展開であるが，列方向の展開にするには，最後の式で，行成分添字と列成分の添字を交換すればよい．

以上により，行列を 3 つ以上の小行列式で展開する一般式が得られた．しかし，小行列式の数が多くなると展開式は煩瑣になる．例えば，6 次正方行列式を 1 次，2 次，3 次の小行列式で展開する場合は項数が 60 になるので，あまり一般的とは言えない．

参考文献

[1] R. F. Scott, “A Treatise on the Theory of Determinants and Their Applications in Analysis and Geometry”, Cambridge at the University Press, 1880, p. 28
`http://www.totoha.net/archiv/scott1880.pdf`

[2] 斎藤正彦,「線形代数入門」東京大学出版会 (1966).