1つの行列から派生する行列式の積に関する定理

2021.2.21　　鈴木　実

1　はじめに

ここで述べる定理は，2つの行を除き全ての行が互いに等しい2つの行列式の積に関するものである．2つの行列式の互いに異なる2つの行のうち1つの行をもう一方の行列式の相異なる行の1つと交換すれば別の行列式の積になる．互いに異なる行は4つあるので，このような行列式の積は3種類ある．この3種類の行列式の積の間には一定の関係が成り立つ．その関係式を与えるのがここで扱う定理である．この定理の証明に関してはまだ他に記述されたものを見出すことができず，この時点で新しいとみなされるので，ここにまとめておくことにする．

Scott の “The Theory of Determinant” の中の Art. 16 (p. 64) [1] の中の複合行列式に関する定理には十分な証明が与えられていない．ここに述べる定理はその定理を証明するために必要なものである．

2　定理

$h+2$ 行 h 列の行列 A において，第 i 行と第 j 行を除いてできる h 次行列式を A_{ij} と表すとき，

$$A_{im}A_{jn} - A_{in}A_{jm} = A_{ij}A_{mn} \tag{1}$$

が成り立つ．行と列を入れ替えた h 行 $h+2$ 列の行列においても同様の関係式が成り立つ．

3　証明

A を次のように表す．

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1h} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{h1} & \cdots & a_{hh} \\ a_{h+1,1} & \cdots & a_{h+1,h} \\ a_{h+2,1} & \cdots & a_{h+2,h} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

そのとき，たとえば A_{im} と A_{jn} は次のように表される．

$$A_{im} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1h} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,h} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,h} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m-1,1} & \cdots & a_{m-1,h} \\ a_{m+1,1} & \cdots & a_{m+1,h} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{h+2,1} & \cdots & a_{h+2,h} \end{vmatrix}, \quad A_{jn} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1h} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j-1,1} & \cdots & a_{j-1,h} \\ a_{j+1,1} & \cdots & a_{j+1,h} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,h} \\ a_{n+1,1} & \cdots & a_{n+1,h} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{h+2,1} & \cdots & a_{h+2,h} \end{vmatrix}. \tag{3}$$

$i=1, j=2, m=h+1, n=h+2$ の場合について証明すれば十分である．なぜなら，行列式の行の交換では符号が変わるのみであり，上の場合と一般の場合では偶数回の行の交換で変換できるからである．そうすると，証明すべき式は

$$A_{1,h+1}A_{2,h+2} - A_{1,h+2}A_{2,h+1} = A_{12}A_{h+1,h+2} \tag{4}$$

となる．

$A_{1,h+1}$，$A_{2,h+2}$，$A_{1,h+2}$ と $A_{2,h+1}$ は次のように表される．

$$A_{1,h+1} = \begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2h} \\ a_{31} & \cdots & a_{3h} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{h1} & \cdots & a_{hh} \\ a_{h+2,1} & \cdots & a_{h+2,h} \end{vmatrix}, \quad A_{2,h+2} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1h} \\ a_{31} & \cdots & a_{3h} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{h1} & \cdots & a_{hh} \\ a_{h+1,1} & \cdots & a_{h+1,h} \end{vmatrix}, \tag{5}$$

$$A_{1,h+2} = \begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2h} \\ a_{31} & \cdots & a_{3h} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{h1} & \cdots & a_{hh} \\ a_{h+1,1} & \cdots & a_{h+1,h} \end{vmatrix}, \quad A_{2,h+1} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1h} \\ a_{31} & \cdots & a_{3h} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{h1} & \cdots & a_{hh} \\ a_{h+2,1} & \cdots & a_{h+2,h} \end{vmatrix}, \tag{6}$$

これを展開式で表すと，

$$A_{1,h+1} = \sum_{(\gamma,p,\cdots,t,\delta)} \mathrm{sgn}\,(\gamma,p,\cdots,t,\delta) a_{2\gamma}a_{3p}\cdots a_{ht}a_{h+2,\delta} \tag{7}$$

$$A_{1,h+2} = \sum_{(\gamma,p,\cdots,t,\beta)} \mathrm{sgn}\,(\gamma,p,\cdots,t,\beta) a_{2\gamma}a_{3p}\cdots a_{ht}a_{h+1,\beta} \tag{8}$$

$$A_{2,h+1} = \sum_{(\alpha,p,\cdots,t,\delta)} \mathrm{sgn}\,(\alpha,p,\cdots,t,\delta) a_{1\alpha}a_{3p}\cdots a_{ht}a_{h+2,\delta} \tag{9}$$

$$A_{2,h+2} = \sum_{(\alpha,p,\cdots,t,\beta)} \mathrm{sgn}\,(\alpha,p,\cdots,t,\beta) a_{1\alpha}a_{3p}\cdots a_{ht}a_{h+1,\beta} \tag{10}$$

となる．ここで，$(\alpha,p,\cdots,t,\beta)$ や $(\gamma,p,\cdots,t,\delta)$ は $\{1,2,\cdots,h\}$ の置換を表し，$\sum_{(\alpha,p,\cdots,t,\beta)}$ および $\sum_{(\gamma,p,\cdots,t,\delta)}$ はそのすべての置換に関する総和を意味する．以下の式変形では符号 $\mathrm{sgn}\,(\gamma,p,\cdots,t,\delta)$ が変化しない場合は省略する．また変化する場合でも，そこでは簡単に述べるに留めて，最後に符号変化の詳細を述べることにする．

証明すべきこと

$A_{1,h+1}A_{2,h+2}$ と $A_{1,h+2}A_{2,h+1}$ を成分で表すと次のようになる．

$$\begin{aligned} A_{1,h+1}A_{2,h+2} &= \{\sum_{(\gamma,q,\cdots,w,\delta)} a_{2\gamma}a_{3q}\cdots a_{hw}a_{h+2,\delta}\}\{\sum_{(\alpha,p,\cdots,t,\beta)} a_{1\alpha}a_{3p}\cdots a_{ht}a_{h+1,\beta}\} \\ &= \sum_{(\alpha,p,\cdots,t,\beta)}\sum_{(\gamma,q,\cdots,w,\delta)} a_{1\alpha}a_{2\gamma}(a_{3p}\cdots a_{ht})(a_{3q}\cdots a_{hw})a_{h+1,\beta}a_{h+2,\delta} \\ &= \sum_{(\alpha,\beta)}\sum_{(\gamma,\delta)} a_{1\alpha}a_{2\gamma}(\sum_{(\alpha'\beta')} a_{3p}\cdots a_{r\gamma}\cdots a_{s\delta}\cdots a_{ht})(\sum_{(\gamma'\delta')} a_{3q}\cdots a_{f\alpha}\cdots a_{g\beta}\cdots a_{hw})a_{h+1,\beta}a_{h+2,\delta} \end{aligned} \tag{11}$$

$$
\begin{aligned}
&A_{1,h+2}A_{2,h+1} = \{\sum_{(\gamma,q,\cdots,w,\delta)} a_{2\gamma}a_{3q}\cdots a_{hw}a_{h+1,\delta}\}\{\sum_{(\alpha,p,\cdots,t,\beta)} a_{1\alpha}a_{3p}\cdots a_{ht}a_{h+2,\beta}\}\\
&= \sum_{(\alpha,p,\cdots,t,\beta)}\sum_{(\gamma,q,\cdots,w,\delta)} a_{1\alpha}a_{2\gamma}(a_{3p}\cdots a_{ht})(a_{3q}\cdots a_{hw})a_{h+2,\beta}a_{h+1,\delta}\\
&= \sum_{(\alpha,\beta)}\sum_{(\gamma,\delta)} a_{1\alpha}a_{2\gamma}(\sum_{(\alpha'\beta')} a_{3p}\cdots a_{r\gamma}\cdots a_{s\delta}\cdots a_{ht})(\sum_{(\gamma'\delta')} a_{3q}\cdots a_{f\alpha}\cdots a_{g\beta}\cdots a_{hw})a_{h+1,\delta}a_{h+2,\beta} \qquad (12)
\end{aligned}
$$

ここで，(α,β) と (γ,δ) は数列 $\{1,2,\cdots,h\}$ の 2-順列を表し，(α',β') と $(\gamma'\delta')$ は，それぞれ，$\{1,2,\cdots,h\}$ から α,β，または γ,δ を除いた $(h-2)$-順列を示す．

したがって，

$$
\begin{aligned}
&A_{1,h+1}A_{2,h+2} - A_{1,h+2}A_{2,h+1}\\
&= \sum_{(\alpha,\beta)}\sum_{(\gamma,\delta)} a_{1\alpha}a_{2\gamma}(\sum_{(\alpha'\beta')} a_{3p}\cdots a_{r\gamma}\cdots a_{s\delta}\cdots a_{ht})(\sum_{(\gamma'\delta')} a_{3q}\cdots a_{ru}\cdots a_{f\alpha}\cdots a_{g\beta}\cdots a_{hw})a_{h+1,\beta}a_{h+2,\delta}\\
&- \sum_{(\alpha,\beta)}\sum_{(\gamma,\delta)} a_{1\alpha}a_{2\gamma}(\sum_{(\alpha'\beta')} a_{3p}\cdots a_{r\gamma}\cdots a_{s\delta}\cdots a_{ht})(\sum_{(\gamma'\delta')} a_{3q}\cdots a_{ru}\cdots a_{f\alpha}\cdots a_{g\beta}\cdots a_{hw})a_{h+1,\delta}a_{h+2,\beta} \qquad (13)
\end{aligned}
$$

となる．この式の第 1 項と第 2 項の違いは，両者の最後の部分における $a_{h+1,\beta}a_{h+2,\delta}$ と $a_{h+1,\delta}a_{h+2,\beta}$ の列番号の違いで，β と δ を形式的に交換すれば両者は共通項になる．総和記号は，まず 2-順列の (α,β) と (γ,δ) について固定し（すなわち，α, β, γ, δ を固定し），その後 $(h-2)$-順列の (α',β') と (γ',δ') に関する総和をとり，最後に (α,β) と (γ,δ) に関する総和を取るという意味である．

$\alpha=\gamma$ または $\beta=\delta$ の場合，式 (13) の第 1 項と第 2 項の全ての項は相殺する．なぜなら，まず，$\beta=\delta$ とすると，明らかに式 (13) の第 1 項と第 2 項は一致するので相殺することがわかる．次に，$\alpha=\gamma$ の場合は式 (13) の第 2 項で β と δ の文字を形式的に取り替えて次の式 (14) となり，さらに $\alpha=\gamma$ を用いて形式を式 (13) に合わせると次の式 (15) となる．

$$
\begin{aligned}
&\sum_{(\alpha,\delta)}\sum_{(\gamma,\beta)} a_{1\alpha}a_{2\gamma}(\sum_{(\alpha'\delta')} a_{3p}\cdots a_{r\gamma}\cdots a_{s\beta}\cdots a_{ht})(\sum_{(\gamma'\beta')} a_{3q}\cdots a_{ru}\cdots a_{f\alpha}\cdots a_{g\delta}\cdots a_{hw})a_{h+1,\beta}a_{h+2,\delta} \qquad (14)\\
&= \sum_{(\gamma,\delta)}\sum_{(\alpha,\beta)} a_{1\alpha}a_{2\gamma}(\sum_{(\gamma'\delta')} a_{3p}\cdots a_{r\alpha}\cdots a_{s\beta}\cdots a_{ht})(\sum_{(\alpha'\beta')} a_{3q}\cdots a_{ru}\cdots a_{f\gamma}\cdots a_{g\delta}\cdots a_{hw})a_{h+1,\beta}a_{h+2,\delta} \qquad (15)
\end{aligned}
$$

この式は式 (13) の第 1 項の前後の括弧を入れ替えたものと一致する．したがって，$\alpha=\gamma$ または $\beta=\delta$ の場合は式 (13) の第 1 項と第 2 項は相殺して 0 になる．

一方，式 (4) の右辺は，

$$
\begin{aligned}
&A_{1,2}A_{h+1,h+2}\\
&= \sum_{(\alpha,\gamma)}\sum_{(\beta,\delta)} a_{1\alpha}a_{2\gamma}(\sum_{(\alpha'\gamma')} a_{3p}\cdots a_{r\beta}\cdots a_{s\delta}\cdots a_{ht})(\sum_{(\beta'\delta')} a_{3q}\cdots a_{r\alpha}\cdots a_{s\gamma}\cdots a_{hw})a_{h+1,\beta}a_{h+2,\delta} \qquad (16)
\end{aligned}
$$

となる．つまり，証明すべきことは，式 (13) の第 1 項において，γ と β が交換された形に変換され，かつ同時に第 2 項が消滅することである．

α，β，γ，δ に関する総和については最後に述べる．それまで，全て異なる定数として扱う．式 (13) の第 1 項においては，$\alpha\neq\beta$ かつ $\gamma\neq\delta$ である．一方，式 (13) の第 2 項は β と δ を交換して式 (14) と表すことができるが，この式の β はもともと δ であるから変化する範囲は γ を含まず α と β は含む．また，同じように，δ はもともと β であるから変化する範囲は α を含まず γ と δ を含むことになる．このことは後で (α,δ) 等で総和をとるときに，総和する 2-順列を (α,γ) から (β,δ) に変更するときに用いる．

要素積間の要素交換による列番号の順列化

式 (13) の括弧内で，$(a_{3p}\cdots a_{r\gamma}\cdots a_{s\delta}\cdots a_{ht})$ などの $(h-2)$ 個の要素の積を「要素積」と呼ぶことにする．また，h 個の要素の積を「h-要素積」と呼ぶ．要素積の対の積は簡単に「対積」と呼ぶことにする．個々の要素積の列番号の並びは $\{1,2,\cdots,h\}$ の $(h-2)$-順列になっている．これに $a_{1\alpha}a_{2\gamma}$ あるいは $a_{h+1,\delta}a_{h+2,\beta}$ を掛けた h-要素積の列番号の並びは式 (13) の段階では $\{1,2,\cdots,h\}$ の順列になっていない．これを順列にするには，式 (13) において要素積間で列番号の γ と β を交換すればよい．そのためには，式 (13) の第 1 項（または第 2 項）の中の 2 つの要素積の間で行番号の γ と β が入れ替わるように要素を交換すればよい．

式 (13) の第 1 項で共通因子の $a_{1\alpha}a_{2\gamma}$ と $a_{h+1,\beta}a_{h+2,\delta}$ を除けば，前の括弧内は $(h-2)$-順列に関する総和であるから $(h-2)!$ 個の要素積 $(a_{3p}\cdots a_{r\gamma}\cdots a_{s\delta}\cdots a_{ht})$ の和であり，後の括弧内も同様に $(h-2)!$ 個の要素積 $(a_{3p_1}\cdots a_{r\alpha}\cdots a_{s\beta}\cdots a_{ht_1})$ の和である．したがって，全体としては要素積対の積すなわち対積

$$(a_{3p}\cdots a_{r\gamma}\cdots a_{s\delta}\cdots a_{ht})(a_{3q}\cdots a_{ru}\cdots a_{g\beta}\cdots a_{s\alpha}\cdots a_{hw}) \tag{17}$$

が $[(h-2)!]^2$ 個存在する．この項に $a_{1\alpha}a_{2\gamma}$ と $a_{h+1,\beta}a_{h+2,\delta}$ を掛けて

$$[(a_{1\alpha}a_{2\gamma})(a_{3p}\cdots a_{r\gamma}\cdots a_{s\delta}\cdots a_{ht})][(a_{3q}\cdots a_{ru}\cdots a_{g\beta}\cdots a_{s\alpha}\cdots a_{hw})(a_{h+1,\beta}a_{h+2,\delta})] \tag{18}$$

としたものが式 (13) 第 1 項の各項に相当する．

式 (18) において，左の大括弧の中の列番号では γ が重複し，右の大括弧の中の列番号では β が重複している．大括弧内の h-要素積の列番号並びを $\{1,2,\cdots,h\}$ の順列にするには，大括弧間で行番号の同じ要素を交換して γ と β を交換できればよい．式 (13) の第 2 項の場合には式 (14) と変形して，左の要素積の列番号 γ と右の要素積の列番号 δ の交換をすればよい．

要素交換操作による $(h-2)$-順列から h-順列への変換

最初に，2 つの要素積の間で要素を交換することにより，列番号が交換され非順列が順列に変換されることをみてみよう．式 (17) を例にとると，左の $a_{r\gamma}$ と行番号の同じ右の a_{ru} を交換すれば列番号 γ は右の括弧に移り u が左の括弧の中に入るが，β は右の括弧に残ったままになる．つまり，γ と β の交換は 1 回では完結しない．一般に，列番号 γ と β の交換には以下のような一連の操作が必要である．まず，式 (13) 第 1 項の左の括弧の $(h-2)!$ 個の要素積の中から任意の 1 つの項を取り出す．その列番号の並びは順列 (α',β') である．これを $a_{1\alpha}a_{2\gamma}$ と合わせて次のように表すことにする．

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & r & \cdots & f & \cdots & g & \cdots & s & \cdots & h & h+1 & h+2 \\ (\alpha & \gamma) & (p & \cdots & \gamma & \cdots & u & \cdots & v & \cdots & \delta & \cdots & t) & & \end{matrix} \tag{19}$$

この式で上の段は，A の要素の行番号を表し，下の段は要素積の列番号を表す．α，β，γ，δ は固定した列番号で，(α,γ) は共通因子の 2-順列である．残りの括弧は $(h-2)$-順列 (α',γ') を表す

一方，式 (13) 第 1 項の右の括弧の中の $(h-2)!$ 個の要素積から 1 つを取り，これと $a_{h+1,\beta}a_{h+2,\delta}$ の積を上と同様に表せば，1 つの例として，

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & r & \cdots & f & \cdots & g & \cdots & s & \cdots & h & h+1 & h+2 \\ & & (q & \cdots & u & \cdots & v & \cdots & \beta & \cdots & \alpha & \cdots & w) & (\ \beta & \delta\ ) \end{matrix} \tag{20}$$

と書くことができる．式 (19) も式 (20) もそれぞれ列番号の γ あるいは β が重複しているために h-順列にはなっていない．

ここで，式 (19) と式 (20) を用いて上で述べた $a_{r\gamma}$ と a_{ru} を交換を考えてみよう．式 (13) から明らかなように，もともとこの 2 つは式 (18) であり，1 つの積を構成しているから，交換しても式全体は変わらない．省略されている符号 $\mathrm{sgn}\,(p,\cdots,t)$ は交換により変化するが，これは後で述べるのでここでは考えない．このような交換は，式 (19) の行番号 r 列番号の γ と式 (20) の行番号 r 列番号 u を交換することになるから，式 (19) と式 (20) は次のように変わる．

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} 1 & 2 & 3 & \cdots & r & \cdots & f & \cdots & g & \cdots & s & \cdots & h & h+1 & h+2 \\ (\alpha & \gamma) & (p & \cdots & u & \cdots & u & \cdots & v & \cdots & \delta & \cdots & t) & & \end{array} \tag{21}$$

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} 1 & 2 & 3 & \cdots & r & \cdots & f & \cdots & g & \cdots & s & \cdots & h & h+1 & h+2 \\ & & (q & \cdots & \gamma & \cdots & v & \cdots & \beta & \cdots & \alpha & \cdots & t_1) & (\ \beta & \delta\ ) \end{array} \tag{22}$$

ここで式 (21) で示される上の段（左の括弧）の行番号 r と f は同じ列番号 u を持つことになるので，この段階では h-順列ではない．そこでさらに，式 (17) の a_{fu} と a_{fv} を交換する．すなわち，式 (21) 行番号 f 列番号 u と式 (22) 行番号 f 列番号 v を交換する．その結果，式 (23) と式 (24) のようになる．

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} 1 & 2 & 3 & \cdots & r & \cdots & f & \cdots & g & \cdots & s & \cdots & h & h+1 & h+2 \\ (\alpha & \gamma) & (p & \cdots & u & \cdots & v & \cdots & v & \cdots & \delta & \cdots & t) & & \end{array} \tag{23}$$

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} 1 & 2 & 3 & \cdots & r & \cdots & f & \cdots & g & \cdots & s & \cdots & h & h+1 & h+2 \\ & & (q & \cdots & \gamma & \cdots & u & \cdots & \beta & \cdots & \alpha & \cdots & w) & (\ \beta & \delta\ ) \end{array} \tag{24}$$

式 (23) では行番号 f の列番号が v に変わるが，この列番号は行番号 g の列番号を同じである．したがって，まだ γ と β の交換にもならないし，h-順列にもならない．結局，こういう操作を次々と繰り返し，式 (19) の列番号の並びが h-順列になるまで続けることになる．そうすると，h-2 回に達する前に式 (19) の第 3 行から第 h 行までに含まれない列番号，つまりこの場合は β に行き当たり，それと交換することで最終的に式 (19) の列番号の並びは h-順列になる．

最後の部分は，具体的には次のようになる．式 (24) の下の段で第 g 行の列番号が β だったとする．これまでの操作により式 (23) は第 f 行と第 g 行において同じ列番号 v になっているから，第 g 行の列番号を式 (23) と式 (24) で交換すると，

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} 1 & 2 & 3 & \cdots & r & \cdots & f & \cdots & g & \cdots & s & \cdots & h & h+1 & h+2 \\ (\alpha & \gamma) & (p & \cdots & u & \cdots & v & \cdots & \beta & \cdots & \delta & \cdots & t) & & \end{array} \tag{25}$$

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} 1 & 2 & 3 & \cdots & r & \cdots & f & \cdots & g & \cdots & s & \cdots & h & h+1 & h+2 \\ & & (q & \cdots & \gamma & \cdots & u & \cdots & v & \cdots & \alpha & \cdots & w) & (\ \beta & \delta\ ) \end{array} \tag{26}$$

となる．今度は式 (25) の第 g 行に β が入り，β は式 (19) の列には含まれていないことから結局，式 (19) の列番号の並びは式 (25) のような h-順列に変換されることがわかる．また，同時に式 (26) の列番号の並びも h-順列になるから，式 (20) の下の段の β も上の段に移動して重複がなくなり h-順列に変換される．このように，一連の要素交換の操作により列番号 γ と β が交換され，したがって，式 (18) の 2 つの大括弧内の h-要素積の列番号が両方とも h-順列に変換されることがわかる．

$(h-2)$ 要素積の総和の積から h 要素積の総和の積への変換

上で示した例が一般に必ず可能であることを示す必要がある．

今の方法では，下の段（第 3 行から第 h 行まで）の列番号が要素交換によって上の段（第 3 行から第 h 行まで）に移動したときに，上の段に重複する列番号があれば，その列番号は次の要素交換により下の段に戻るこ

とになる．そのとき上の段に移動する列番号は，順列の中から選ばれることになるので，回数が $(h-2)$ 回に達する前に同じ列番号になることはない．したがって，互換が $(h-2)$ 回を超える前に必ず下の段の α または β に行き当たることになる．β の場合は上の段に同じ列番号が存在しないのでそこでこの操作は完了する．その結果，第 1 行から第 h 行の列番号並びは順列になる．これは上の例の場合である．

一方，α に行き着いた場合は行番号 2 の α と重複するが，行番号 2 で交換できる要素は下の段にはないので，第 3 行から第 h 行までの上の段と下の段の間の要素交換はその段階で終了する．この場合は明らかに列番号並びは h-順列とはならない．α に行き当たった場合は，この後で述べるように別の操作を必要とする．

ここで明らかになったことは，式 (17) において要素対間の要素交換操作を繰り返していくと，必ず α または β を列番号とする要素が左の要素積に入って交換操作が終了することである．そのとき β が左の要素積に入る要素積の対は対積全体の半数を占める．このことは以下のようにして示すことができる．

式 (13) 第 1 項の右括弧内の各要素積は全ての $(h-2)$-順列に亘っているから，式 (17) の右括弧内で α と β が位置を交換し他の列番号の位置は全く同じという要素積が必ず存在する．さらに，式 (13) 第 1 項の全ての要素積において，α と β 以外の列番号は全て同じで α と β の位置のみが逆の要素積は対になって存在することも明らかである．その対の 1 つが右側の括弧にあって上記の要素交換の操作により最終的に α で終われば，もう一方の要素積では必ず β で終わらなければならない．したがって，式 (13) 第 1 項の $[(h-2)!]^2$ 個の積対において，上記の変換操作により半数は α で終わり残りの半数は β で終わるということがわかる．

このことは式 (13) の第 2 項においても同様に成り立つ．式 (13) の第 2 項において，β と δ の変数名を交換すると最後の部分は $a_{h+1,\beta}a_{h+2,\delta}$ となり共通項になる．これは式 (14) で表される．これを式 (18) と同じ形式で表すと，

$$[(a_{1\alpha}a_{2\gamma})(a_{3p}\cdots a_{r\gamma}\cdots a_{s\beta}\cdots a_{ht})][(a_{3q}\cdots a_{ru}\cdots a_{f\alpha}\cdots a_{g\delta}\cdots a_{hw})(a_{h+1,\beta}a_{h+2,\delta})] \tag{27}$$

となる．ここでも，α，β，γ および δ は固定された列番号である．ここで，第 3 行から第 h 行までの間の要素交換をする．最初に，左括弧内の列番号 γ の右括弧内への移動から始まり，何回かの操作の後に右括弧内の δ あるいは α のいずれかが左括弧内に移動して交換が終了する．α で終わった場合は，上で述べた場合と同じように，α と δ 以外の列番号は全く同じで α と δ の位置が逆の要素積の対が右括弧内に必ず存在するので，これに同じ操作を施せば今度は必ず δ まで行き着いて γ と δ の交換が成り立つ．γ と δ が交換された場合は，両方の大括弧内の要素積において列番号並びは h-順列になることがわかる．また，第 1 項の場合と同じように，第 2 項においても，変換操作により対積の半数は δ で終わり，半数は α で終わる．

上記の要素交換において，何回かの操作により α に行き着いたときは，$a_{1\alpha}$ を左の括弧内に置く限りもうそれ以上要素の交換ができないので，この場合は以下のように式 (13) に戻って考える必要がある．

式 (13) の第 1 項の対積において，最初の要素の交換を，右括弧内の a_{ru} と左括弧内の $a_{r\gamma}$ から始める．何回かの交換操作の後に，結果として γ が右括弧内の第 3 行から第 h 行までの間に移動し α が左括弧内の第 f 行に移動して終わるとしよう．そのとき，第 1 行に α，第 2 行に γ，第 f 行に α，第 h+1 行に β，第 $h+1$ 行に δ が残る．これを h-要素積で表すと，

$$[(a_{1\alpha}a_{2\gamma})(a_{3p}\cdots a_{ru}\cdots a_{f\alpha}\cdots a_{s\delta}\cdots a_{ht})][(a_{3q}\cdots a_{r\gamma}\cdots a_{g\beta}\cdots a_{hw})(a_{h+1,\beta}a_{h+2,\delta})] \tag{28}$$

となる．この状態は，左側大括弧内で第 1 行の α と第 f 行の α が重複している．また，右側大括弧内では β が重複しており，両方の大括弧内の h-要素対は行番号並びが順列にならない．

しかし，この状態で，左大括弧内の $a_{1\alpha}$ を右大括弧内へ移動し，右大括弧内の $a_{h+1\beta}$ を左大括弧内へ移動すると，

$$[a_{2\gamma}(a_{3p}\cdots a_{ru}\cdots a_{f\alpha}\cdots a_{s\delta}\cdots a_{ht})a_{h+1,\beta}][a_{1\alpha}(a_{3q}\cdots a_{r\gamma}\cdots a_{g\beta}\cdots a_{hw})a_{h+2,\delta}] \tag{29}$$

となり，それぞれの大括弧内の h-要素積は，第 1 列から第 h 列または第 3 列から第 $h+2$ 列という連続した行の要素積ではなくなるが，それぞれの $h-$ 要素積の行番号重複はなくなって h-順列になることがわかる．これ

を第 2 列から第 $h+1$ 列までの要素積および第 2 列と第 $h+1$ 列を除く第 1 列から第 $h+2$ 列までの要素積とみなすと，実は重複が解消されてそれぞれの要素積の行番号並びは順列になっていることがわかる．さらに，この状態は式 (14) において左と右の括弧を交換した状態と同じであることがわかる．要素積間で要素を交換しても対積は変わらないのであるから，このことは，式 (13) の第 1 項で α で終わる対積と同じ対積が第 2 項の対積の中に存在することを示している．ここで扱った第 1 項の対積は交換操作の結果 α で終了するものであるから，これと一致する第 2 項の対積も α で終わるものでなければならない．これから，第 1 項の α で終わる対積は全て第 2 項の α で終わる対積のいずれかに必ず一致しなければならない．また，後で述べるように，ここで述べた変換操作によって対積の符号 $\mathrm{sgn}\,(\alpha,p,\cdots,t)\mathrm{sgn}\,(\gamma,q\cdots,w)$ は変わらない．したがって，式 (13) の第 2 項の符号は負であるから，第 1 項の対積の α で終わる半分と第 2 項の対積の α で終わる半分は互いに打ち消し合うことがわかる．

式 (13) の対積で，α で終わる対積は全て相殺して消えることがわかった．一方，式 (13) が式 (16) と等しいことを示すためには，第 2 項で δ で残る対積が，第 1 項で β で終わる対積と同様に，式 (16) の対積と同等であること，および残る全ての対積に重複がないことを示す必要がある．いま，式 (13) の第 2 項から 1 つの要素積対をとり，それと δ と α を入れ替えたもう 1 つの要素積対を取り上げて対にしよう．式 (13) の第 2 項の全ての要素積対は全てこのような対になる．これを次のように書く．

$$-(a_{3p}\cdots a_{r\gamma}\cdots a_{s\beta}\cdots a_{ht})(a_{3q}\cdots a_{g\alpha}\cdots a_{f\delta}\cdots a_{hw})-(a_{3p}\cdots a_{r\gamma}\cdots a_{s\beta}\cdots a_{ht})(a_{3q}\cdots a_{g\delta}\cdots a_{f\alpha}\cdots a_{hw}) \tag{30}$$

この式の第 1 項は式 (13) の第 1 項の対積のうち要素交換で α に行き着く対積と相殺する対積とする．第 2 項は第 1 項の δ と α を入れ替えただけであるから，要素交換で必ず δ に行き着く．式 (13) の第 1 項のうち，変換によって α で終わる要組積の対はすべて，式 (30) で表される全ての対の第 1 項と相殺する．したがって，式 (13) の第 2 項からは式 (30) の第 2 項に相当する対積のみが残る．この項は定義により $a_{r\gamma}$ から始まる要素交換の変換で δ に行き着いて，

$$(a_{3p}\cdots a_{r\delta}\cdots a_{s\beta}\cdots a_{ht})(a_{3p_1}\cdots a_{r\gamma}\cdots a_{s\alpha}\cdots a_{ht_1}) \tag{31}$$

の形の対積になり，左側の括弧に $a_{1\alpha}a_{2\gamma}$ を，または右側の括弧に $a_{h+1,\beta}a_{h+2,\delta}$ を書けた h-要素積の列番号並びは h-順列になる．かつ，後で理由を述べるように，この対積は式 (13) の第 1 項の要素変換で β で終わる個々の対積とは相異なる．結局，式 (13) の第 1 項と第 2 項は半数ずつが相殺しあい，残りの半数ずつが $[(h-2)!]^2$ 個の積対として残る．要素変換後の符号についてはこの後で述べる．

変換後の要素積が互いに異なること

式 (13) の第 1 項において，前の括弧内総和に含まれる要素積は $(h-2)!$ 個あり，列番号並びに全ての順列が重複なく割り当てられていることから，全て異なる．これは後の括弧内総和に含まれる要素積でも同じである．したがって，その積からなる $[(h-2)!]^2$ 個の対積は全て異なる．異なる対積から変換された対積は全て異なる．要素交換によるこの変換には，逆の操作が可能であることから，逆変換が存在する．すなわち，変換前と変換後の対積の集合の間には 1 対 1 対応が可能である．したがって，変換前の (α',β') と (γ',δ') に関する対積の総和は，変換後の (α',γ') と (β',δ') に関する対積の総和と等しい．

変換後の符号

対積に変換を施したときに，式 (13) では省略されている符号の積 $\mathrm{sgn}\,(\alpha,p,\cdots,t,\beta)\mathrm{sgn}\,(\gamma,q,\cdots,w,\delta)$ の変換後における変化の有無を明らかにしておく必要がある．まず，式 (13) 第 1 項左側括弧の変換前の要素積列

番号の並びは $\{1,2,\cdots,h\}$ の置換として $\{\alpha,p,\gamma,\cdots,t,\beta\}$ であるとし，式 (19) 以下にならって，

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
1 & 2 & 3 & \cdots & r & \cdots & f & \cdots & g & \cdots & s & \cdots & h & h+1 & h+2 \\
(\alpha &) & (p & \cdots & \gamma & \cdots & u & \cdots & v & \cdots & \delta & \cdots & t) & \beta &
\end{array}
\tag{32}
$$

と表すことにする．この列番号の並びで，まず β を第 2 行目の位置まで $(h-2)$ 回の互換で移動して，

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
1 & 2 & 3 & \cdots & r & \cdots & f & \cdots & g & \cdots & s & \cdots & h & h+1 & h+2 \\
(\alpha & \beta) & (p & \cdots & \gamma & \cdots & u & \cdots & v & \cdots & \delta & \cdots & t) & &
\end{array}
\tag{33}
$$

となる．次にこの β と第 r 行の γ との互換，第 r 行の β と第 f 行の u との互換，そして，第 f 行の β と第 g 行の v との互換により，要素変換操作で最終的に導かれる要素積列番号の並びの式 (25) に一致する．つまり，符号の変化は以上の互換回数の偶奇に依存する．

一方，この変換ではもう一方の要素積でも同様の列番号の互換が起こる．このことは，

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
1 & 2 & 3 & \cdots & r & \cdots & f & \cdots & g & \cdots & s & \cdots & h & h+1 & h+2 \\
 & \gamma & (q & \cdots & u & \cdots & v & \cdots & \beta & \cdots & \alpha & \cdots & w) & (& \delta\ )
\end{array}
\tag{34}
$$

において，第 2 行目列番号 γ を $(h-2)$ 回の互換で第 $(h+1)$ 行目に移動し，次にこれを g 行目の β と互換して，

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
1 & 2 & 3 & \cdots & r & \cdots & f & \cdots & g & \cdots & s & \cdots & h & h+1 & h+2 \\
 & & (q & \cdots & u & \cdots & v & \cdots & \gamma & \cdots & \alpha & \cdots & w) & (\ \beta & \delta\ )
\end{array},
\tag{35}
$$

それから f 行目の v と互換，最後に r 行目の u と互換して最終順列への変換が完了し，式 (26) に一致する．最初の β または γ の互換を除けば，全ての互換は要素の交換に付随するものであるから，式 (32) と式 (34) の互換はそれぞれ対応しておりその数は等しい．一方，最初の β または γ の互換の数は双方とも $(h-2)$ 回であるから全体として偶数であることがわかる．つまり，

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{sgn}(\alpha,p,\cdots,\gamma,\cdots,u,\cdots,v,\cdots,\delta,\cdots,t,\beta)\operatorname{sgn}(\gamma,q,\cdots,u,\cdots,v,\cdots,\beta,\cdots,\alpha,\cdots,w,\delta) \\
=&\operatorname{sgn}(\alpha,\gamma,p,\cdots,u,\cdots,v,\cdots,\beta,\cdots,\delta,\cdots,t)\operatorname{sgn}(q,\cdots,\gamma,\cdots,u,\cdots,v,\cdots,\alpha,\cdots,w,\beta,\delta)
\end{aligned}
\tag{36}
$$

となる．

一方，式 (13) の第 2 項について考えると，β と δ の変数名を交換した後で，変換前の列番号の並びは

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
1 & 2 & 3 & \cdots & r & \cdots & f & \cdots & g & \cdots & s & \cdots & h & h+1 & h+2 \\
(\alpha &) & (p & \cdots & \gamma & \cdots & u & \cdots & v & \cdots & \beta & \cdots & t) & & \delta
\end{array}
\tag{37}
$$

である．第 $h+2$ 行の δ を $h-2$ 回の互換で第 2 行まで移動し，それから第\$r\$行の γ と互換，第 f 行の u と互換，第 g 行の v と互換して，次の要素交換による変換後の行番号並びと一致する．

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
1 & 2 & 3 & \cdots & r & \cdots & f & \cdots & g & \cdots & s & \cdots & h & h+1 & h+2 \\
(\alpha & \gamma) & (p & \cdots & u & \cdots & v & \cdots & \delta & \cdots & \beta & \cdots & t) & &
\end{array}
\tag{38}
$$

一方，対積を構成するもう 1 つの要素積の行番号並びは最初に

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
1 & 2 & 3 & \cdots & r & \cdots & f & \cdots & g & \cdots & s & \cdots & h & h+1 & h+2 \\
 & \gamma & (q & \cdots & u & \cdots & v & \cdots & \delta & \cdots & \alpha & \cdots & w) & (\ \beta &)
\end{array}
\tag{39}
$$

であり，これから第 2 行の γ を $h-1$ 回の互換で第 $h+2$ 行へ移動し，さらに，第 g 行の δ と互換，第 f 行の v と互換，第 r 行の u と互換し，最後に

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & r & \cdots & f & \cdots & g & \cdots & s & \cdots & h & h+1 & h+2 \\ & & (q & \cdots & \gamma & \cdots & u & \cdots & v & \cdots & \alpha & \cdots & w) & (\ \beta & \delta\ ) \end{matrix} \tag{40}$$

となる．すなわち，両方の互換の回数の和は奇数となり，

$$\begin{aligned} &\operatorname{sgn}(\alpha,p,\cdots,\gamma,\cdots,u,\cdots,v,\cdots,\beta,\cdots,t,\delta)\operatorname{sgn}(\gamma,q,\cdots,u,\cdots,v,\cdots,\delta,\cdots,\alpha,\cdots,w,\beta) \\ =& -\operatorname{sgn}(\alpha,\gamma,p,\cdots,u,\cdots,v,\cdots,\delta,\cdots,\beta,\cdots,t)\operatorname{sgn}(q,\cdots,\gamma,\cdots,u,\cdots,v,\cdots,\alpha,\cdots,w,\beta,\delta) \end{aligned} \tag{41}$$

となる．結局，式 (13) 第 2 項の符号は要素交換後に負から正に変わり，要素交換後の対積の符号は本来の符号のまま変わらない．

α，β，γ，δ に関する総和の変換

式 (16) を導く最後の段階として，式 (13) の (α,β) および (γ,δ) に関する総和の

$$\sum_{(\alpha,\beta)}\sum_{(\gamma,\delta)} \tag{42}$$

と式 (14) の (α,δ) および (γ,β) に関する総和の

$$\sum_{(\alpha,\delta)}\sum_{(\gamma,\beta)} \tag{43}$$

から式 (16) の (α,γ) および (β,δ) に関する総和の

$$\sum_{(\alpha,\gamma)}\sum_{(\beta,\delta)} \tag{44}$$

に変換することが必要となる．このことは，1 対 1 対応が成り立つのでそうならざるを得ないことをすでに述べているが，ここでは再度具体的に確認しておこう．まず，$\alpha=\gamma$ または $\beta=\delta$ という関係は式 (13) を 0 にするので，式 (42) と式 (43) から除かれて式 (44) と合致する．式 (44) には $\alpha=\delta$ または $\gamma=\beta$ が含まれるが，これは式 (13) の第 1 項（式 (42)）から帰結される．$\alpha=\beta$ または $\gamma=\delta$ が含まれるのは，式 (14)（式 (43)）から帰結される

以上から，α, γ に関する総和および β, δ に関する総和から $\alpha=\gamma$ と $\beta=\delta$ が除かれて順列 (α,γ) および (β,δ) に関する総和になり，かつ，両方の総和の独立が示されたことになる．その結果，式 (13) は式 (38) に等しく，式 (38) の (α,γ) と (β,δ) に関する総和をとると式 (38) は次式になる．

$$\begin{aligned} &\sum_{(\alpha,\gamma)}\sum_{(\beta,\delta)}[(a_{1\alpha}a_{2\gamma})(\sum_{(\alpha',\gamma')}a_{3p}\cdots a_{r\beta}\cdots a_{s\delta}\cdots a_{ht})][(\sum_{(\beta',\delta')}a_{3q}\cdots a_{r\gamma}\cdots a_{s\alpha}\cdots a_{hw})(a_{h+1,\beta}a_{h+2,\delta})] \\ =&[(\sum_{(\alpha,\gamma)}a_{1\alpha}a_{2\gamma})(\sum_{(\alpha',\gamma')}a_{3p}\cdots a_{r\beta}\cdots a_{s\delta}\cdots a_{ht})][(\sum_{(\beta',\delta')}a_{3q}\cdots a_{r\gamma}\cdots a_{s\alpha}\cdots a_{hw})(\sum_{(\beta,\delta)}a_{h+1,\beta}a_{h+2,\delta})] \\ =&(\sum_{(\alpha,\gamma,p,\cdots,\beta,\cdots,\delta,\cdots,t)}a_{1\alpha}a_{2\gamma}a_{3p}\cdots a_{r\beta}\cdots a_{s\delta}\cdots a_{ht}) \\ &\qquad\qquad\times(\sum_{(q,\cdots,\alpha,\cdots,\gamma,\cdots,w,\beta,\delta)}a_{3q}\cdots a_{r\gamma}\cdots a_{s\alpha}\cdots a_{hw}a_{h+1,\beta}a_{h+2,\delta}) \\ =&A_{h+1,h+2}A_{12} \end{aligned} \tag{45}$$

もともとこの式は式 (13) に等しい．大括弧内の対積の数は，(α, γ) の順列が 2!，α と γ を選ぶ組み合わせが ${}_h\mathrm{C}_2$，要素積の数が $(h-2)!$ であるから全部乗じて $h!$ となり本来の h-要素積の数になる．以上で

$$A_{1,h+1}A_{2,h+2} - A_{2,h+1}A_{1,h+2} = A_{h+1,h+2}A_{12} \tag{46}$$

が示された．

4 おわりに

この証明は地味で長く，決して良くない．もっと優れた証明法があるのではないかと思うのであるが，今のところはここまでにしておきたい．

参考文献

[1] Robert Forsyth Scott, "A Treatise on the Theory of Determinants and Their Applications in Analysis and Geometry", Cambridge at the University Press, 1880.
http://www.totoha.net/archiv/scott1880.pdf