１つの行列から派生する行列式の積に関する定理　その４

2021.6.10　　鈴木　実

1　はじめに

これまで述べた行列式の積に関する定理では，それぞれの行列式の 1 つの行を交換した場合の関係式であった [1, 2, 3]．今度は 2 つの行を交換した場合について考える．ここで述べる定理は，行列式の積において 2 つの行を交換する最も簡単な場合である．

2　定理

$h+4$ 行 h 列の行列 A において，第 i_1 行，第 i_2 行と第 j_3 行，第 j_4 行を除いてできる h 次行列式を $A_{i_1i_2j_3j_4}$ のように表す．i_1,i_2,i_3,i_4, j_1,j_2,j_3,j_4 を相異なる昇順の行番号とし，それ以外の $h-4$ 行を 2 つの行列式に共通とするとき，

$$\begin{aligned}&A_{i_1i_2\,j_1j_2}\,A_{i_3i_4\,j_3j_4}-A_{i_1i_2\,j_1j_3}\,A_{i_3i_4\,j_2j_4}+A_{i_1i_2\,j_1j_4}\,A_{i_3i_4\,j_2j_3}+A_{i_1i_2\,j_2j_3}\,A_{i_3i_4\,j_1j_4}\\&-A_{i_1i_2\,j_2j_4}\,A_{i_3i_4\,j_1j_3}+A_{i_1i_2\,j_3j_4}\,A_{i_3i_4\,j_1j_2}=A_{i_1i_2i_3i_4}\,A_{j_1j_2j_3j_4}\end{aligned}\tag{1}$$

が成り立つ．

もう少しわかりやすく，$i_1=1,i_2=2,i_3=3,i_4=4$，$j_1=h+1,j_2=h+2,j_3=h+3,j_4=h+4$ とすると，

$$\begin{aligned}&A_{12,h+1,h+2}\,A_{34,h+3,h+4}-A_{12,h+1,h+3}\,A_{34,h+2,h+4}+A_{12,h+1,h+4}\,A_{34,h+2,h+3}+A_{12,h+2,h+3}\,A_{34,h+1,h+4}\\&-A_{12,h+2,h+4}\,A_{34,h+1,h+3}+A_{12,h+3,h+4}\,A_{34,h+1,h+2}=A_{1234}\,A_{h+1,h+2,h+3,h+4}\end{aligned}\tag{2}$$

が成り立つ．

行列式であるから，以上の関係式は行と列を入れ替えても同じ式が成り立つ．

3　証明

行を移動しても符号が変わるのみであるから，式 (1) で，簡単に $i_1=1,i_2=2,i_3=3,i_4=4$，$j_1=h+1,j_2=h+2,j_3=h+3,j_4=h+4$ としても構わない．したがって，式 (2) を示せばよい．記述を簡潔にするため，式 (2) の添字をさらに $h+1=\alpha$，$h+2=\beta$，$h+3=\gamma$，$h+4=\delta$ と書くことにする．そうすると，式 (2) は

$$A_{12\alpha\beta}\,A_{34\gamma\delta}-A_{12\alpha\gamma}\,A_{34\beta\delta}+A_{12\alpha\delta}\,A_{34\beta\gamma}+A_{12\beta\gamma}\,A_{34\alpha\delta}-A_{12\beta\delta}\,A_{34\alpha\gamma}+A_{12\gamma\delta}\,A_{34\alpha\beta}=A_{1234}\,A_{\alpha\beta\gamma\delta}\tag{3}$$

となる．左辺の意味は本節最後で述べる．

式 (3) を証明するために，最初に式 (3) 左辺の各項に要素交換変換を施す．変換は各項の第 2 因子 (2 番目の行列式) の添字の 3 番目を第 1 因子に移動するところから始める．つまり，第 1 項なら第 1 因子の a_γ を第 2 因子へ移動するところから始める．そうすると，これまで述べてきたようにして [2, 3],

$$A_{12\alpha\beta}\,A_{34\gamma\delta}=-[A_{2\alpha\beta\gamma}\,A_{134\delta}]_{12\alpha\beta}+[A_{1\alpha\beta\gamma}\,A_{234\delta}]_{12\alpha\beta}-[A_{12\beta\gamma}\,A_{34\alpha\delta}]_{12\alpha\beta}+[A_{12\alpha\gamma}\,A_{34\beta\delta}]_{12\alpha\beta}\tag{4}$$

となる．ここで，$[A_{2\alpha\beta\gamma}\ A_{134\delta}]_{12\alpha\beta}$ は $A_{12\alpha\beta}\ A_{34\gamma\delta}$ から要素交換変換によって変換された対積のうち $A_{2\alpha\beta\gamma}\ A_{134\delta}$ に属するもので，全体の 1/4 である．符号は [2] で述べたように，交換する不対要素の間に存在する他の不対要素の数の偶奇で決まる．いまの場合，不対要素は行番号で決まり，$1\cdots,4$，$\alpha,\cdots,\delta$ の順で 8 個ある．式 (4) の第 1 項の場合は，1 と γ の交換であるから 5 個の不対要素を挟むことになり負号がつく．他の項についても同様にして，

$$A_{12\alpha\gamma}\ A_{34\beta\delta} = +[A_{2\alpha\beta\gamma}\ A_{134\delta}]_{12\alpha\gamma} - [A_{1\alpha\beta\gamma}\ A_{234\delta}]_{12\alpha\gamma} + [A_{12\beta\gamma}\ A_{34\alpha\delta}]_{12\alpha\gamma} + [A_{12\alpha\beta}\ A_{34\gamma\delta}]_{12\alpha\gamma} \tag{5}$$

$$A_{12\alpha\delta}\ A_{34\beta\gamma} = +[A_{2\alpha\beta\delta}\ A_{134\gamma}]_{12\alpha\delta} - [A_{1\alpha\beta\delta}\ A_{234\gamma}]_{12\alpha\delta} + [A_{12\beta\delta}\ A_{34\alpha\gamma}]_{12\alpha\delta} - [A_{12\alpha\beta}\ A_{34\gamma\delta}]_{12\alpha\delta} \tag{6}$$

$$A_{12\beta\gamma}\ A_{34\alpha\delta} = -[A_{2\alpha\beta\gamma}\ A_{134\delta}]_{12\beta\gamma} + [A_{1\alpha\beta\gamma}\ A_{234\delta}]_{12\beta\gamma} + [A_{12\alpha\gamma}\ A_{34\beta\delta}]_{12\beta\gamma} - [A_{12\alpha\beta}\ A_{34\gamma\delta}]_{12\beta\gamma} \tag{7}$$

$$A_{12\beta\delta}\ A_{34\alpha\gamma} = -[A_{2\alpha\beta\delta}\ A_{134\gamma}]_{12\beta\delta} + [A_{1\alpha\beta\delta}\ A_{234\gamma}]_{12\beta\delta} + [A_{12\alpha\delta}\ A_{34\beta\gamma}]_{12\beta\delta} + [A_{12\alpha\beta}\ A_{34\gamma\delta}]_{12\beta\delta} \tag{8}$$

$$A_{12\gamma\delta}\ A_{34\alpha\beta} = -[A_{2\alpha\gamma\delta}\ A_{134\beta}]_{12\gamma\delta} + [A_{1\alpha\gamma\delta}\ A_{234\beta}]_{12\gamma\delta} - [A_{12\alpha\delta}\ A_{34\beta\gamma}]_{12\gamma\delta} + [A_{12\alpha\gamma}\ A_{34\beta\delta}]_{12\gamma\delta} \tag{9}$$

となる．

次に，同じ式 (4) 左辺の各項に別の要素交換変換を施す．今度は，第 2 因子の第 4 番目の添字を第 1 因子に移動する．つまり，第 2 因子第 4 番目の添字の行を持つ要素を第 1 因子から第 2 因子への移動から始まる変換を施すと，

$$A_{12\alpha\beta}\ A_{34\gamma\delta} = +[A_{2\alpha\beta\delta}\ A_{134\gamma}]_{12\alpha\beta} - [A_{1\alpha\beta\delta}\ A_{234\gamma}]_{12\alpha\beta} + [A_{12\beta\delta}\ A_{34\alpha\gamma}]_{12\alpha\beta} - [A_{12\alpha\delta}\ A_{34\beta\gamma}]_{12\alpha\beta} \tag{10}$$

$$A_{12\alpha\gamma}\ A_{34\beta\delta} = +[A_{2\alpha\gamma\delta}\ A_{134\beta}]_{12\alpha\gamma} - [A_{1\alpha\gamma\delta}\ A_{234\beta}]_{12\alpha\gamma} + [A_{12\gamma\delta}\ A_{34\alpha\beta}]_{12\alpha\gamma} + [A_{12\alpha\delta}\ A_{34\beta\gamma}]_{12\alpha\gamma} \tag{11}$$

$$A_{12\alpha\delta}\ A_{34\beta\gamma} = -[A_{2\alpha\gamma\delta}\ A_{134\beta}]_{12\alpha\delta} + [A_{1\alpha\gamma\delta}\ A_{234\beta}]_{12\alpha\delta} - [A_{12\gamma\delta}\ A_{34\alpha\beta}]_{12\alpha\delta} + [A_{12\alpha\gamma}\ A_{34\beta\delta}]_{12\alpha\delta} \tag{12}$$

$$A_{12\beta\gamma}\ A_{34\alpha\delta} = +[A_{2\beta\gamma\delta}\ A_{134\alpha}]_{12\beta\gamma} - [A_{1\beta\gamma\delta}\ A_{234\alpha}]_{12\beta\gamma} - [A_{12\gamma\delta}\ A_{34\alpha\beta}]_{12\beta\gamma} + [A_{12\beta\delta}\ A_{34\alpha\gamma}]_{12\beta\gamma} \tag{13}$$

$$A_{12\beta\delta}\ A_{34\alpha\gamma} = -[A_{2\beta\gamma\delta}\ A_{134\alpha}]_{12\beta\delta} + [A_{1\beta\gamma\delta}\ A_{234\alpha}]_{12\beta\delta} + [A_{12\gamma\delta}\ A_{34\alpha\beta}]_{12\beta\delta} + [A_{12\beta\gamma}\ A_{34\alpha\delta}]_{12\beta\delta} \tag{14}$$

$$A_{12\gamma\delta}\ A_{34\alpha\beta} = +[A_{2\beta\gamma\delta}\ A_{134\alpha}]_{12\gamma\delta} - [A_{1\beta\gamma\delta}\ A_{234\alpha}]_{12\gamma\delta} + [A_{12\beta\delta}\ A_{34\alpha\gamma}]_{12\gamma\delta} - [A_{12\beta\gamma}\ A_{34\alpha\delta}]_{12\gamma\delta} \tag{15}$$

となる．

式 (4) から式 (15) の各式の左辺と右辺第 3 項または第 4 項の間には，要素交換変換の 1 対 1 対応の関係から，次のような 12 の関係式が成り立つ．以下はそのうちの 4 式のみを示している．

$$[A_{12\beta\gamma}\ A_{34\alpha\delta}]_{12\alpha\beta} = -[A_{12\alpha\beta}\ A_{34\gamma\delta}]_{12\beta\gamma} \tag{16}$$

$$[A_{12\alpha\gamma}\ A_{34\beta\delta}]_{12\alpha\beta} = [A_{12\alpha\beta}\ A_{34\gamma\delta}]_{12\alpha\gamma} \tag{17}$$

$$[A_{12\beta\delta}\ A_{34\alpha}\gamma]_{12\alpha\beta} = [A_{12\alpha\beta}\ A_{34\gamma\delta}]_{12\beta\delta} \tag{18}$$

$$[A_{12\alpha\delta}\ A_{34\beta\gamma}]_{12\alpha\beta} = -[A_{12\alpha\beta}\ A_{34\gamma\delta}]_{12\alpha\delta} \tag{19}$$

$$\vdots$$

ここで，式 (4) から式 (15) を次のように辺辺加える．

$$[(4) - (5) + (6) + (7) - (8) + (9)] + [(10) - (11) + (12) + (13) - (14) + (15)]$$

これは式 (4) から式 (9) を式 (3) に代入した式と，式 (10) から式 (15) を式 (3) に代入した式を加えたものと等しい．したがって，左辺は式 (4) の 2 倍になる．一方，右辺は式 (16) から式 (19) および同様の 12 個の関係式を用いることにより式 (4) から式 (15) の第 3 項と第 4 項は全て相殺する．たとえば，式 (4) の第 3 項と第 4 項はそれぞれ，式 (7) の第 4 項と式 (5) の第 4 項と相殺する．式 (10) の第 3 項と第 4 項はそれぞれ，式 (8) の第 4 項と式 (6) の第 4 項と相殺する．その他も同様である．そこで，式 (3) の左辺を

$$\Psi = A_{12\alpha\beta}\ A_{34\gamma\delta} - A_{12\alpha\gamma}\ A_{34\beta\delta} + A_{12\alpha\delta}\ A_{34\beta\gamma} + A_{12\beta\gamma}\ A_{34\alpha\delta} - A_{12\beta\delta}\ A_{34\alpha\gamma} + A_{12\gamma\delta}\ A_{34\alpha\beta} \tag{20}$$

とおくと，結局，次の式が得られる．

$$
\begin{aligned}
2\Psi = &+ [A_{2\beta\gamma\delta}\ A_{134\alpha}]_{12\gamma\delta} + [A_{2\beta\gamma\delta}\ A_{134\alpha}]_{12\beta\delta} + [A_{2\beta\gamma\delta}\ A_{134\alpha}]_{12\beta\gamma} \\
&- [A_{1\alpha\gamma\delta}\ A_{234\beta}]_{12\alpha\delta} - [A_{2\alpha\gamma\delta}\ A_{134\beta}]_{12\alpha\gamma} - [A_{2\alpha\gamma\delta}\ A_{134\beta}]_{12\gamma\delta} \\
&+ [A_{2\alpha\beta\delta}\ A_{134\gamma}]_{12\alpha\beta} + [A_{2\alpha\beta\delta}\ A_{134\gamma}]_{12\beta\delta} + [A_{2\alpha\beta\delta}\ A_{134\gamma}]_{12\alpha\delta} \\
&- [A_{2\alpha\beta\gamma}\ A_{134\delta}]_{12\beta\gamma} - [A_{2\alpha\beta\gamma}\ A_{134\delta}]_{12\alpha\gamma} - [A_{2\alpha\beta\gamma}\ A_{134\delta}]_{12\alpha\beta} \\
&- [A_{1\beta\gamma\delta}\ A_{234\alpha}]_{12\gamma\delta} - [A_{1\beta\gamma\delta}\ A_{234\alpha}]_{12\beta\delta} - [A_{1\beta\gamma\delta}\ A_{234\alpha}]_{12\beta\gamma} \\
&+ [A_{1\alpha\gamma\delta}\ A_{234\beta}]_{12\alpha\delta} + [A_{1\alpha\gamma\delta}\ A_{234\beta}]_{12\alpha\gamma} + [A_{1\alpha\gamma\delta}\ A_{234\beta}]_{12\gamma\delta} \\
&- [A_{1\alpha\beta\delta}\ A_{234\gamma}]_{12\alpha\beta} - [A_{1\alpha\beta\delta}\ A_{234\gamma}]_{12\beta\delta} - [A_{1\alpha\beta\delta}\ A_{234\gamma}]_{12\alpha\delta} \\
&+ [A_{1\alpha\beta\gamma}\ A_{234\delta}]_{12\beta\gamma} + [A_{1\alpha\beta\gamma}\ A_{234\delta}]_{12\alpha\gamma} + [A_{1\alpha\beta\gamma}\ A_{234\delta}]_{12\alpha\beta}
\end{aligned} \tag{21}
$$

ここで，式 (3) の右辺に要素交換変換を施す．最初に，第 1 因子の第 1 番目の添字を第 2 因子へ移動する操作，すなわち，第 2 の行列式の要素積の該当する添字の行の要素を第 1 の行列式の要素積へ移動することから始まる要素交換変換をすると，

$$A_{1234}\ A_{\alpha\beta\gamma\delta} = -A_{234\alpha}\ A_{1\beta\gamma\delta} + A_{234\beta}\ A_{1\alpha\gamma\delta} - A_{234\gamma}\ A_{1\alpha\beta\delta} + A_{234\delta}\ A_{1\alpha\beta\gamma} \tag{22}$$

となる．一方，第 1 因子の第 2 番目の添字を第 2 因子へ移動する操作から変換を開始すると，

$$A_{1234}\ A_{\alpha\beta\gamma\delta} = +A_{134\alpha}\ A_{2\beta\gamma\delta} - A_{134\beta}\ A_{2\alpha\gamma\delta} + A_{134\gamma}\ A_{2\alpha\beta\delta} A -_{134\delta}\ \ A_{2\alpha\beta\gamma} \tag{23}$$

となる．ここで得られた式 (22) と式 (23) の右辺の各項を行列式積の第 1 因子の第 1 添字を第 2 因子へ移動する要素交換変換をすると，式 (22) は

$$A_{234\alpha}\ A_{1\beta\gamma\delta} = +[A_{134\alpha}\ A_{2\beta\gamma\delta}]_{234\alpha} - [A_{34\alpha\beta}\ A_{12\gamma\delta}]_{234\alpha} + [A_{34\alpha\gamma}\ A_{12\beta\delta}]_{234\alpha} - [A_{34\alpha\delta}\ A_{12\beta\gamma}]_{234\alpha} \tag{24}$$

$$A_{234\beta}\ A_{1\alpha\gamma\delta} = +[A_{134\beta}\ A_{2\alpha\gamma\delta}]_{234\beta} + [A_{34\alpha\beta}\ A_{12\gamma\delta}]_{234\beta} + [A_{34\beta\gamma}\ A_{12\alpha\delta}]_{234\beta} - [A_{34\beta\delta}\ A_{12\alpha\gamma}]_{234\beta} \tag{25}$$

$$A_{234\gamma}\ A_{1\alpha\beta\delta} = +[A_{134\gamma}\ A_{2\alpha\beta\delta}]_{234\gamma} + [A_{34\alpha\gamma}\ A_{12\beta\delta}]_{234\gamma} - [A_{34\beta\gamma}\ A_{12\alpha\delta}]_{234\gamma} - [A_{34\gamma\delta}\ A_{12\alpha\beta}]_{234\gamma} \tag{26}$$

$$A_{234\delta}\ A_{1\alpha\beta\gamma} = +[A_{134\delta}\ A_{2\alpha\beta\gamma}]_{234\delta} + [A_{34\alpha\delta}\ A_{12\beta\gamma}]_{234\delta} - [A_{34\beta\delta}\ A_{12\alpha\gamma}]_{234\delta} + [A_{34\gamma\delta}\ A_{12\alpha\beta}]_{234\delta} \tag{27}$$

となり，式 (23) は

$$A_{134\alpha}\ A_{2\beta\gamma\delta} = +[A_{234\alpha}\ A_{1\beta\gamma\delta}]_{134\alpha} + [A_{34\alpha\beta}\ A_{12\gamma\delta}]_{134\alpha} - [A_{34\alpha\gamma}\ A_{12\beta\delta}]_{134\alpha} + [A_{34\alpha\delta}\ A_{12\beta\gamma}]_{134\alpha} \tag{28}$$

$$A_{134\beta}\ A_{2\alpha\gamma\delta} = +[A_{234\beta}\ A_{1\alpha\gamma\delta}]_{134\beta} - [A_{34\alpha\beta}\ A_{12\gamma\delta}]_{134\beta} + [A_{34\beta\gamma}\ A_{12\alpha\delta}]_{134\beta} + [A_{34\beta\delta}\ A_{12\alpha\gamma}]_{134\beta} \tag{29}$$

$$A_{134\gamma}\ A_{2\alpha\beta\delta} = +[A_{234\gamma}\ A_{1\alpha\beta\delta}]_{134\gamma} - [A_{34\alpha\gamma}\ A_{12\beta\delta}]_{134\gamma} + [A_{34\beta\gamma}\ A_{12\alpha\delta}]_{134\gamma} + [A_{34\gamma\delta}\ A_{12\alpha\beta}]_{134\gamma} \tag{30}$$

$$A_{134\delta}\ A_{2\alpha\beta\gamma} = +[A_{234\delta}\ A_{1\alpha\beta\gamma}]_{134\delta} - [A_{34\alpha\delta}\ A_{12\beta\gamma}]_{134\delta} + [A_{34\beta\delta}\ A_{12\alpha\gamma}]_{134\delta} - [A_{34\gamma\delta}\ A_{12\alpha\beta}]_{134\delta} \tag{31}$$

となる．

要素交換変換が 1 対 1 変換であることから，式 (24) の左辺と右辺第 2 項から第 4 項の間には明らかに次の関係式が成り立つ．

$$[A_{34\alpha\beta}\ A_{12\gamma\delta}]_{234\alpha} = -[A_{234\alpha}\ A_{1\beta\gamma\delta}]_{34\alpha\beta} = -[A_{234\alpha}\ A_{1\beta\gamma\delta}]_{12\gamma\delta} \tag{32}$$

$$[A_{34\alpha\gamma}\ A_{12\beta\delta}]_{234\alpha} = [A_{234\alpha}\ A_{1\beta\gamma\delta}]_{34\alpha\gamma} = [A_{234\alpha}\ A_{1\beta\gamma\delta}]_{12\beta\delta} \tag{33}$$

$$[A_{34\alpha\delta}\ A_{12\beta\gamma}]_{234\alpha} = -[A_{234\alpha}\ A_{1\beta\gamma\delta}]_{34\alpha\delta} = -[A_{234\alpha}\ A_{1\beta\gamma\delta}]_{12\beta\gamma} \tag{34}$$

式 (24) についても同様に次の関係式が成り立つ．

$$[A_{34\alpha\beta}\ A_{12\gamma\delta}]_{134\alpha} = [A_{134\alpha}\ A_{2\beta\gamma\delta}]_{34\alpha\beta} = [A_{134\alpha}\ A_{2\beta\gamma\delta}]_{12\gamma\delta} \tag{35}$$

$$[A_{34\alpha\gamma}\ A_{12\beta\delta}]_{134\alpha} = -[A_{134\alpha}\ A_{2\beta\gamma\delta}]_{34\alpha\gamma} = -[A_{134\alpha}\ A_{2\beta\gamma\delta}]_{12\beta\delta} \tag{36}$$

$$[A_{34\alpha\delta}\ A_{12\beta\gamma}]_{134\alpha} = [A_{134\alpha}\ A_{2\beta\gamma\delta}]_{34\alpha\delta} = [A_{134\alpha}\ A_{2\beta\gamma\delta}]_{12\beta\gamma} \tag{37}$$

他の式からも同様の関係式が得られる．この関係式を式 (24)–(31) に代入すると以下の式が得られる．

$$A_{234\alpha}\ A_{1\beta\gamma\delta} = +[A_{134\alpha}\ A_{2\beta\gamma\delta}]_{234\alpha} + [A_{234\alpha}\ A_{1\beta\gamma\delta}]_{12\gamma\delta} + [A_{234\alpha}\ A_{1\beta\gamma\delta}]_{12\beta\delta} + [A_{234\alpha}\ A_{1\beta\gamma\delta}]_{12\beta\gamma} \tag{38}$$
$$A_{234\beta}\ A_{1\alpha\gamma\delta} = +[A_{134\beta}\ A_{2\alpha\gamma\delta}]_{234\beta} + [A_{234\beta}\ A_{1\alpha\gamma\delta}]_{12\gamma\delta} + [A_{234\beta}\ A_{1\alpha\gamma\delta}]_{12\alpha\delta} + [A_{234\beta}\ A_{1\alpha\gamma\delta}]_{12\alpha\gamma} \tag{39}$$
$$A_{234\gamma}\ A_{1\alpha\beta\delta} = +[A_{134\gamma}\ A_{2\alpha\beta\delta}]_{234\gamma} + [A_{234\gamma}\ A_{1\alpha\beta\delta}]_{12\beta\delta} + [A_{234\gamma}\ A_{1\alpha\beta\delta}]_{12\alpha\delta} + [A_{234\gamma}\ A_{1\alpha\beta\delta}]_{12\alpha\beta} \tag{40}$$
$$A_{234\delta}\ A_{1\alpha\beta\gamma} = +[A_{134\delta}\ A_{2\alpha\beta\gamma}]_{234\delta} + [A_{234\delta}\ A_{1\alpha\beta\gamma}]_{12\beta\gamma} + [A_{234\delta}\ A_{1\alpha\beta\gamma}]_{12\alpha\gamma} + [A_{234\delta}\ A_{1\alpha\beta\gamma}]_{12\alpha\beta} \tag{41}$$

$$A_{134\alpha}\ A_{2\beta\gamma\delta} = +[A_{234\alpha}\ A_{1\beta\gamma\delta}]_{134\alpha} + [A_{134\alpha}\ A_{2\beta\gamma\delta}]_{12\gamma\delta} + [A_{134\alpha}\ A_{2\beta\gamma\delta}]_{12\beta\delta} + [A_{134\alpha}\ A_{2\beta\gamma\delta}]_{12\beta\gamma} \tag{42}$$
$$A_{134\beta}\ A_{2\alpha\gamma\delta} = +[A_{234\beta}\ A_{1\alpha\gamma\delta}]_{134\beta} + [A_{134\beta}\ A_{2\alpha\gamma\delta}]_{12\gamma\delta} + [A_{134\beta}\ A_{2\alpha\gamma\delta}]_{12\alpha\delta} + [A_{134\beta}\ A_{2\alpha\gamma\delta}]_{12\alpha\gamma} \tag{43}$$
$$A_{134\gamma}\ A_{2\alpha\beta\delta} = +[A_{234\gamma}\ A_{1\alpha\beta\delta}]_{134\gamma} + [A_{134\gamma}\ A_{2\alpha\beta\delta}]_{12\beta\delta} + [A_{134\gamma}\ A_{2\alpha\beta\delta}]_{12\alpha\delta} + [A_{134\gamma}\ A_{2\alpha\beta\delta}]_{12\alpha\beta} \tag{44}$$
$$A_{134\delta}\ A_{2\alpha\beta\gamma} = +[A_{234\delta}\ A_{1\alpha\beta\gamma}]_{134\delta} + [A_{134\delta}\ A_{2\alpha\beta\gamma}]_{12\beta\gamma} + [A_{134\delta}\ A_{2\alpha\beta\gamma}]_{12\alpha\gamma} + [A_{134\delta}\ A_{2\alpha\beta\gamma}]_{12\alpha\beta} \tag{45}$$

となる．

ここで，式 (21) と式 (38)–式 (45) を比較すると，式 (21) の右辺第 1 行から第 4 行は式 (42) から式 (45) の右辺第 2 項から第 4 項に等しく，式 (21) の右辺第 5 行から第 8 行は式 (38) から式 (41) の右辺第 2 項から第 4 項に等しいことがわかる．したがって，式 (38)–式 (45) の右辺第 2 項から第 4 項を式 (21) に代入すると，

$$\begin{aligned}
2\Psi = {}& A_{134\alpha}\ A_{2\beta\gamma\delta} - [A_{1\beta\gamma\delta}\ A_{234\alpha}]_{134\alpha} - A_{134\beta}\ A_{2\alpha\gamma\delta} + [A_{1\alpha\gamma\delta}\ A_{234\beta}]_{134\beta} \\
& + A_{134\gamma}\ A_{2\alpha\beta\delta} - [A_{1\alpha\beta\delta}\ A_{234\gamma}]_{134\gamma} - A_{134\delta}\ A_{2\alpha\beta\gamma} + [A_{1\alpha\beta\gamma}\ A_{234\delta}]_{134\delta} \\
& - A_{234\alpha}\ A_{1\beta\gamma\delta} + [A_{2\beta\gamma\delta}\ A_{134\alpha}]_{234\alpha} + A_{234\beta}\ A_{1\alpha\gamma\delta} - [A_{2\alpha\gamma\delta}\ A_{134\beta}]_{234\beta} \\
& - A_{234\gamma}\ A_{1\alpha\beta\delta} + [A_{2\alpha\beta\delta}\ A_{134\gamma}]_{234\gamma} + A_{234\delta}\ A_{1\alpha\beta\gamma} - [A_{2\alpha\beta\gamma}\ A_{134\delta}]_{234\delta}
\end{aligned} \tag{46}$$

となる．

式 (38)–(41) において，式 (32) 以下の関係式が得られたのと同じ理由により，左辺と右辺の第 1 項の間には，以下の関係式が成り立つ．

$$[A_{234\alpha}\ A_{1\beta\gamma\delta}]_{134\alpha} = +[A_{2\beta\gamma\delta}\ A_{134\alpha}]_{234\alpha}, \quad [A_{234\beta}\ A_{1\alpha\gamma\delta}]_{134\beta} = +[A_{2\alpha\gamma\delta}\ A_{134\beta}]_{234\beta} \tag{47}$$
$$[A_{234\gamma}\ A_{1\alpha\beta\delta}]_{134\gamma} = +[A_{2\alpha\beta\delta}\ A_{134\gamma}]_{234\gamma}, \quad [A_{234\delta}\ A_{1\alpha\beta\gamma}]_{134\delta} = +[A_{2\alpha\beta\gamma}\ A_{134\delta}]_{234\delta} \tag{48}$$

式 (47) と式 (48) を式 (46) に代入すると，偶数項はすべて相殺して，

$$\begin{aligned}
2\Psi = {}& A_{134\alpha}\ A_{2\beta\gamma\delta} - A_{134\beta}\ A_{2\alpha\gamma\delta} + A_{134\gamma}\ A_{2\alpha\beta\delta} - A_{134\delta}\ A_{2\alpha\beta\gamma} \\
& - A_{234\alpha}\ A_{1\beta\gamma\delta} + A_{234\beta}\ A_{1\alpha\gamma\delta} - A_{234\gamma}\ A_{1\alpha\beta\delta} + A_{234\delta}\ A_{1\alpha\beta\gamma}
\end{aligned} \tag{49}$$

となる．この式の右辺第 1 行は式 (23) の右辺に等しく，右辺第 2 行は式 (22) の右辺に等しい．すなわち，第 1 行と第 2 行はそれぞれ $A_{1234}\ A_{\alpha\beta\gamma\delta}$ に等しい．したがって，式 (22) と式 (23) 加えた式に式 (49) を代入すると，

$$\Psi = A_{1234}\ A_{\alpha\beta\gamma\delta} \tag{50}$$

となる．Ψ はもともと式 (20) であるから，式 (50) に等しいとおいて，

$$A_{12\alpha\beta}\ A_{34\gamma\delta} - A_{12\alpha\gamma}\ A_{34\beta\delta} + A_{12\alpha\delta}\ A_{34\beta\gamma} + A_{12\beta\gamma}\ A_{34\alpha\delta} - A_{12\beta\delta}\ A_{34\alpha\gamma} + A_{12\gamma\delta}\ A_{34\alpha\beta} = A_{1234}\ A_{\alpha\beta\gamma\delta} \tag{51}$$

を得る．これは式 (3) にほかならない．以上により定理は証明された．

最後に，この定理の成り立ちを考えてみよう．式 (3) は 2 つの行列式の積において，第 1 因子から第 2 因子へ行を 2 つ移動し，第 2 因子の他の行を 2 つ戻すという操作である．このとき，戻す 2 つの行は，第 2 因子に

ある 2 つの行列式に共通しない行の中から取り出すことになる．その取り出し方は，共通しない行から 2 つ取り出す組み合わせになる．式 (3) で言えば，第 1, 2, 3, 4 行から第 3, 4 行を第 2 行列式に移し，第 2 行列式の α，β，γ，δ 行から 2 つ戻すことになる．その組み合わせは，$\alpha\beta$，$\alpha\gamma$，$\alpha\delta$，$\beta\gamma$，$\beta\delta$，$\gamma\delta$ 行の 6 種類ということになり，式 (3) の左辺はその通りになっていることがわかる．

式 (3) の左辺各項の符号は要素交換変換の符号である．すなわち，左辺各項は対積の和であり，右辺の対積から変換されるものが含まれている．したがって，その変換の符号を知れば，それがその項の符号になる．符号を知るには交換する不対要素の間の不対要素の数を知ればよい [2]．このことは，[2] の表を参照すればわかりやすい．式 (3) の左辺第 1 項で言えば，β と 4 を，α と 3 を交換することである．3 と 4 は接しているので，α と β の間の不対要素の数が偶奇を決めることになる．今の場合は 0 であるから，この項は正の符号を持つ．第 2 項は α と γ の間に β があるので負の符号となる．他も同様である．

参考文献

[1] 「1 つの行列から派生する行列式の積に関する定理」(2021/1/31 のエントリー).
`http://totoha.web.fc2.com/det_prod_theory.pdf`

[2] 「1 つの行列から派生する行列式の積に関する定理」(2021/2/26 のエントリー).
`http://totoha.web.fc2.com/det_prod_theory-2.pdf`

[3] 「1 つの行列から派生する行列式の積に関する定理」(2021/3/1 のエントリー).
`http://totoha.web.fc2.com/det_prod_theory-3.pdf`