1つの行列から派生する行列式の積に関する定理　その3

2021.2.26　　鈴木　実

1　はじめに

行列式の積において，それぞれの行を交換した行列式の積の間の関係を示す定理をこれまで述べてきた [1, 2]．そこで扱われた行列式は $h+2$ 行 h 列の行列または $h+3$ 行 h 列の行列から得られる h 次行列式の積であった．ここで述べる内容は以上の定理の一般化である．

2　定理

$h+n$ 行 h 列の行列 A において，第 i_1 行，$\cdots$ 第 i_{n-1} 行，第 j_n 行を除いてできる h 次行列式を $A_{i_1,\cdots,i_{n-1},j_n}$ と表し，$i_1, i_2, \cdots, i_n$, $j_1, j_2, \cdots, j_n$ を相異なる昇順の行番号とするとき，

$$A_{i_2,i_3,\cdots,i_n\,j_n}\,A_{i_1,j_1,j_2,\cdots,j_{n-1}} - A_{i_1,i_3\cdots,i_n\,j_n}\,A_{i_2,j_1,j_2,\cdots,j_{n-1}} + A_{i_1,i_2,i_4,\cdots,i_n\,j_n}\,A_{i_3,j_1,j_2,\cdots,j_{n-1}}$$
$$+\cdots(-1)^{n-1}A_{i_1,i_2,\cdots,i_{n-1}\,j_n}\,A_{i_n,j_1,j_2,\cdots,j_{n-1}} = A_{i_1,i_2,\cdots,i_n}\,A_{j_1,j_2,\cdots,j_n} \tag{1}$$

が成り立つ．

3　証明

$h+n$ 行 h 列行列 A の要素を a_{ij} とする．行列式を展開したときの要素の積を要素積と言い，要素積の対の積を簡単に対積と言う．

行列式における行の互換は符号の反転を伴うのみであるから，式 (1) においては，$i_1=1, i_2=2, \cdots, i_n=n$; $j_1=h+1, j_2=h+2, \cdots, j_n=h+n$ の場合について証明すれば十分である．そうすると，証明すべき式は

$$A_{2,3,\cdots,n,h+n}\,A_{1,h+1,h+2,\cdots,h+n-1} - A_{1,3\cdots,n,h+n}\,A_{2,h+1,h+2,\cdots,h+n-1} + A_{1,2,4,\cdots,n,h+n}\,A_{3,h+1,h+2,\cdots,h+n-1}$$
$$+\cdots(-1)^{n-1}A_{1,2,\cdots,n-1,h+n}\,A_{n,h+1,h+2,\cdots,h+n-1} = A_{1,2,\cdots,n}\,A_{h+1,h+2,\cdots,h+n} \tag{2}$$

となる．

式 (2) にある行列式を展開して成分で表すと以下の式になる．

$$A_{23\cdots n,h+n} = \sum_{(\alpha,p,\cdots,t,\lambda,\cdots,\pi)} \operatorname{sgn}(\alpha,p,\cdots,t,\lambda,\cdots,\pi)a_{1\alpha}a_{n+1,p}\cdots a_{ht}a_{h+1,\lambda}\cdots a_{h+n-1,\pi} \tag{3}$$

$$A_{1,h+1,\cdots,h+n-1} = \sum_{(\beta,\cdots,\delta,q\cdots w,\omega)} \operatorname{sgn}(\beta,\cdots,\delta,q\cdots w,\omega)a_{2\beta}\cdots a_{n\delta}a_{n+1,q}\cdots a_{hw}a_{h+n,\omega} \tag{4}$$

$$A_{13\cdots n,h+n} = \sum_{(\beta,p,\cdots,t,\lambda,\cdots,\pi)} \operatorname{sgn}(\beta,p,\cdots,t,\lambda,\cdots,\pi)a_{2\beta}a_{h+1,p}\cdots a_{ht}a_{h+1,\lambda}\cdots a_{h+n-1,\pi} \tag{5}$$

$$A_{2,h+1,\cdots,h+n-1} = \sum_{(\alpha,\gamma,\cdots,\delta,q,\cdots,w,\omega)} \operatorname{sgn}(\alpha,\gamma,\cdots,\delta,q,\cdots,w,\omega)a_{1\alpha}a_{3\gamma}\cdots a_{n\delta}a_{n+1,q}\cdots a_{hw}a_{h+n,\omega} \tag{6}$$

$$A_{1,2,\cdots,n-1,h+n} = \sum_{(\delta,p,\cdots,t,\lambda,\cdots,\pi)} \operatorname{sgn}(\delta,p,\cdots,t,\lambda,\cdots,\pi)a_{n,\delta}a_{n+1,p}\cdots a_{ht}a_{h+1,\lambda}\cdots a_{h+n-1,\pi} \tag{7}$$

$$A_{n,h+1,\cdots,h+n-1} = \sum_{(\alpha,\cdots,\epsilon,q,\cdots,w,\omega)} \mathrm{sgn}\,(\alpha,\cdots,\epsilon,q,\cdots,w,\omega) a_{1\alpha}\cdots a_{n-1,\epsilon}a_{n+1,q}\cdots a_{h,w}a_{h+n,\omega} \tag{8}$$

$$A_{1\cdots n} = \sum_{(p,\cdots,t,\lambda,\cdots,\omega)} \mathrm{sgn}\,(p,\cdots,t,\lambda,\cdots,\omega) a_{n+1,p}\cdots a_{ht}a_{h+1,\lambda}\cdots a_{h+n,\omega} \tag{9}$$

$$A_{h+1,\cdots,h+n} = \sum_{(\alpha,\cdots,w)} \mathrm{sgn}\,(\alpha,\cdots,w) a_{1\alpha}\cdots a_{h,w} \tag{10}$$

ここで，$(\alpha,p,\cdots,t,\beta)$ や $(\gamma,p,\cdots,t,\delta)$ は $\{1,2,\cdots,h\}$ の置換を表し，$\sum_{(\alpha,p,\cdots,t,\beta)}$ や $\sum_{(\gamma,p,\cdots,t,\delta)}$ はそのすべての置換に関する総和を意味する．以下の式変形では符号 $\mathrm{sgn}\,(\gamma,p,\cdots,t,\delta)$ が変化しない場合は省略する．また変化する場合でも，そこでは簡単に述べるに留めて，最後に符号変化の詳細を述べることにする．

要素交換による対積の変換

式 (3) と式 (4) の積 $A_{23\cdots n,h+n}\,A_{1,h+1,\cdots,h+n-1}$ を展開したときにでてくる対積は

$$\begin{aligned}&\mathrm{sgn}\,(\alpha,p,\cdots,t,\lambda,\cdots,\pi)\mathrm{sgn}\,(\beta,\cdots,\delta,q\cdots w,\omega)\\ &\times(a_{1\alpha}a_{n+1,p}\cdots a_{r\omega}\cdots a_{ht}a_{h+1,\lambda}\cdots a_{h+n-1,\pi})(a_{2\beta}\cdots a_{n\delta}a_{n+1,q}\cdots a_{r\alpha}\cdots a_{hw}a_{h+n,\omega})\end{aligned} \tag{11}$$

と表される．符号に関しては後の節で別途述べることにしてこの節では省略する．この対積に要素交換操作 [1, 2] を行う．$A_{23\cdots n,h+3}$ と $A_{1,h+1,\cdots,h+n}$ を展開したときの要素積はそれぞれ上の式で左右の括弧内に分けて示す．この式を見ると，両方の括弧内の要素において行番号が共通に見られない行は，左括弧で

$$2 \quad 3 \quad 4 \quad \cdots \quad n \quad h+n\ , \tag{12}$$

の n 個，右括弧で

$$1 \quad h+1 \quad h+2 \quad n+3 \quad \cdots \quad h+n-1\ , \tag{13}$$

の n 個である．要素交換を，左括弧の $a_{1\alpha}$ の右括弧への移動から始め，いくつかの要素交換の後で，右括弧の $a_{h+n,\omega}$ に行き着き，この要素には同じ行番号が左括弧にないことからこの要素を左括弧内に移動して要素交換操作を終えるとする．その場合，対積は

$$(a_{n+1,p}\cdots a_{ht}a_{h+1,\lambda}\cdots a_{h+n-1,\pi}a_{h+n,\omega})(a_{1\alpha}a_{2\beta}\cdots a_{n\delta}a_{n+1,q}\cdots a_{hw}), \tag{14}$$

あるいは，中間の要素を省略すると，

$$(a_{n+1,p}\cdots a_{h+n,\omega})(a_{1\alpha}\cdots a_{hw}) \tag{15}$$

となる．すなわち，変換された対積は

$$A_{1\cdots n}\,A_{h+1,\cdots,h+n} \tag{16}$$

の対積であることがわかる．要素の交換は行番号を $n+1$ から h に持つ要素間で行われる．それ以外の要素と列番号が同じになった場合はその要素がそのまま左括弧内に移動して要素交換操作は終了する．異なる行番号の要素交換は右括弧内の第 $h+n$ 行以外に第 2 行から第 n 行までであるので，その場合は，変換後の対積は異なる行列式の積の対積に属することになる．つまり，同じ行列式積からの変換でも，交換される式 (12) の行の要素により，それぞれ異なる行列式の積の対積になる，ということである．例えば，左括弧内第 1 行要素と右括弧内第 2 行要素の交換では,

$$A_{13\cdots n,h+n},\ A_{2,h+1,\cdots,h+n-1} \tag{17}$$

の対積に変換され，右括弧内第 3 行要素との間の交換では,

$$A_{124\cdots n,h+n}A_{3,h+1,\cdots,h+n-1} \tag{18}$$

の対積に変換される．右括弧内第 n 行要素との間の交換では,

$$A_{1\cdots n-1,h+n}A_{n,h+1,\cdots,h+n-1} \tag{19}$$

の対積に変換される．他の場合も同様である．

以上述べたように，1 つの行列式積の対積に要素交換操作を施すことにより n 種類の行列式積の対積に変換される．そのことを詳しく見るために，式 (11) の $A_{23\cdots n,h+n}\,A_{1,h+1,\cdots,h+n-1}$ に $a_{1\alpha}$ から始まる要素交換操作を施して，式 (16) または式 (17) へ変換する場合を考えてみよう．式 (14) までで示したように，$a_{1\alpha}$ の移動から要素交換を始めると右括弧内の $a_{h+n,\omega}$ に行き着き，式 (14) の対積への変換が成り立つ．一方，式 (11) の右括弧の中で β と ω の位置を変え，それ以外の列番号が全く同じという対積は必ず存在する．そのとき，$a_{1\alpha}$ の移動から始めた要素変換は式 (17) に変換されることがわかる．β と ω 以外の列番号は全て同じで，β と ω の列番号のみが入れ替わっている対積は必ず対になって存在するから，式 (16) と式 (17) に変換される対積の数は同じでなければならない．これは式 (12) の列番号を持つ他の要素が $a_{1\alpha}$ と交換する場合でも全く同じであるから，式 (18) から式 (20) までに代表して示されている n 種類の行列式の積の場合でも同じである．したがって，式 (11) から変換されてこれら n 種類の行列式積の中に入る対積の数は全て等しく全体の $1/n$ である．すなわち，式 (11) の対積は $1/n$ ずつが要素交換変換により式 (16) から式 (20) までに示される n 種類の行列式積の対積になることを示す.

対積は変換されても，もともとは対積の要素交換であるから対積そのものは変わらない．したがって，$1/n$ ずつ変換された対積の集合を表すために, 例えば, $A_{2\cdots n,h+n}\,A_{1,h+1,\cdots,h+n-1}$ から変換された $A_{13\cdots n,h+n}, A_{2,h+1,\cdots,h+n-1}$ の対積の集合なら,

$$[A_{13\cdots n,h+n}]'_{2\cdots n,h+n} \tag{20}$$

と書くことにする．大括弧の中は変換された行列式積の左の行列式であり，大括弧の添字は変換元の行列式積の左の行列式を表している.（行列式積の左の行列式を示せば右の行列式は一義的に決定するのでこの書き方でも十分である.）$[A_{13\cdots n,h+n}]'_{2\cdots n,h+n}$ の対積の数は $A_{2\cdots n,h+n}\,A_{1,h+1,\cdots,h+n-1}$ の対積の数の $1/n$ である．この書式を用いると，$[A_{13\cdots n,h+n}]'_{2\cdots n,h+n}$ に変換を施した結果は次のように表すことができる.

$$\begin{aligned}
&A_{23\cdots n,h+n}\,A_{1,h+1,\cdots,h+n-1}\\
&\quad=(-1)^{\nu_{11}}[A_{13\cdots n,h+n}]'_{23\cdots n,h+n}+(-1)^{\nu_{12}}[A_{124\cdots n,h+n}]'_{23\cdots n,h+n}+(-1)^{\nu_{13}}[A_{1235\cdots n,h+n}]'_{23\cdots n,h+n}\\
&\quad+\cdots+(-1)^{\nu_{1,n-1}}[A_{12\cdots n-1,h+n}]'_{23\cdots n,h+n}+(-1)^{\nu_{1,n}}[A_{1\cdots n}]'_{23\cdots n,h+n}
\end{aligned} \tag{21}$$

$(-1)^{\nu_{11}}$ 他は各項の符号で，これについては次節で述べる．式 (17) 以下についても同様にして,

$$\begin{aligned}
&A_{13\cdots n,h+n}\,A_{2,h+1,\cdots,h+n-1}\\
&\quad=(-1)^{\nu_{21}}[A_{23\cdots n,h+n}]'_{13\cdots n,h+n}+(-1)^{\nu_{22}}[A_{124\cdots n,h+n}]'_{13\cdots n,h+n}+(-1)^{\nu_{23}}[A_{1235\cdots n,h+n}]'_{13\cdots n,h+n}\\
&\quad+\cdots+(-1)^{\nu_{2,n-1}}[A_{1\cdots n-1,h+n}]'_{13\cdots n,h+n}+(-1)^{\nu_{2,n}}[A_{12\cdots n}]'_{13\cdots n,h+n}
\end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}
&A_{124\cdots n,h+n}\,A_{3,h+1,\cdots,h+n-1}\\
&\quad=(-1)^{\nu_{31}}[A_{234\cdots n,h+n}]'_{124\cdots n,h+n}+(-1)^{\nu_{32}}[A_{134\cdots n,h+n}]'_{124\cdots n,h+n}+(-1)^{\nu_{33}}[A_{124\cdots n,h+n}]'_{124\cdots n,h+n}\\
&\quad+\cdots+(-1)^{\nu_{3,n-1}}[A_{1\cdots n-1,h+n}]'_{124\cdots n,h+n}+(-1)^{\nu_{3,n}}[A_{1\cdots n}]'_{124\cdots n,h+n}
\end{aligned} \tag{23}$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned}
&A_{12\cdots n-1,h+n}A_{n,h+1,\cdots,h+n-1}\\
&\quad=(-1)^{\nu_{n1}}[A_{23\cdots n,h+n}]'_{12\cdots n-1,h+n}+(-1)^{\nu_{n2}}[A_{13\cdots n,h+n}]'_{12\cdots n-1,h+n}+(-1)^{\nu_{n3}}[A_{124\cdots n,h+n}]'_{12\cdots n-1,h+n}\\
&\quad+\cdots+(-1)^{\nu_{n,n-1}}[A_{12\cdots n-2,n,h+n}]'_{12\cdots n-1,h+n}+(-1)^{\nu_{n,n}}[A_{12\cdots n}]'_{12\cdots n-1,h+n}
\end{aligned} \tag{24}$$

式 (21) から式 (24) を用いて式 (4) を導くことになるが，その前に各項の前の符号 $(-1)^{\nu_{11}}$ 等を明らかにしておく必要がある.

変換に伴う対積の符号変化

既に述べたように [1, 2]，要素交換による対積の変換では，ある条件を満たした場合に符号の変化を伴う．これを式 (11) に示す対積の場合に考えてみる．そのために次の表を用いる．

$$\begin{array}{cccccccccccccc}
1 & 2 & \cdots & n & n+1 & \cdots & r & \cdots & f & \cdots & h & h+1 & \cdots & h+n-1 & h+n \\
\alpha & - & \cdots & - & (\ q & \cdots & u & \cdots & \omega & \cdots & w) & \lambda & \cdots & \pi & - \\
- & \beta & \cdots & \delta & (\ p & \cdots & \alpha & \cdots & u & \cdots & t) & - & \cdots & - & \omega
\end{array} \tag{25}$$

第 1 段は行番号，第 2 段は式 (11) 左括弧内のそれぞれの行に対応する列番号，第 3 段は右括弧内列番号である．要素交換操作では，最初に第 2 段第 1 行の α を第 3 段に移し，続いてだい r 行の第 3 段 α と第 2 段の u を交換し，続いて f 行の第 3 段 u と第 2 段 ω を交換し，最後に第 $h+n$ 行第 3 段の ω を第 2 段に移して終了する．

これに対して，符号変化は列番号の互換の回数を数える必要がある．知りたい符号は $\mathrm{sgn}\,(\alpha, p, \cdots, t, \lambda, \cdots, \pi)$ $\mathrm{sgn}\,(\beta, \cdots, \delta, q \cdots w, \omega)$ であるから，第 2 段と第 3 段の符号の積を知るだけでよい．そのため，第 2 段および第 3 段それぞれの中で互換を繰り返して変換後の第 2 段および第 3 段まで変換した時に，それぞれの互換の合計回数の偶奇を知れば十分である．

符号変化を具体的にみるために式 (25) の場合を考えよう．各段の互換操作においては，第 1 行の α を第 $h+n$ に移動し，第 $h+n$ と第 f 行を互換し，最後に第 f 行と第 r 行を互換して要素交換操作の結果と同じ列番号の並びになる．第 3 段についても同様である．要素の移動と交換は，最初の片方の括弧内にしか存在しない列番号の移動と両方に存在する行番号における交換になる．前者は移動するための互換の回数が必要であるのに対し，後者では第 2 段と第 3 段における互換が対応しているので必ず偶数回になる．要素の移動は，第 2 段では，第 3 段へ移動する行から第 3 段から移動してくる行へ要素を互換し，その後は要素交換に伴う互換である．第 3 段では，第 2 段へ移動する行から第 2 段から移動してくる行へ要素を互換し，その後は要素交換に伴う互換である．したがって，要素が移動する 2 つの行の間の第 2 段と第 3 段の互換の数を知れば良い．これは，互換の回数の偶奇のみ知ればよいのであるから，2 つの行の間にある片方にしか行番号のない要素の数を知れば良いということになる．片方にしか行番号のない要素とは式 (12) と式 (13) に示した行番号で示されるものである．

以上の例からわかるように，変換操作に関わる互換の偶奇は移動する要素のある 2 つの行の間にある要素の数で決まる．今の例の場合は，第 1 行と第 $h+n$ 行であるから第 2 行から第 $h+n-1$ 行にある要素すなわち列番号の数である．すなわち，β から δ まで，それから λ から π までで，合計 $n-1$ と $n-1$ の和であるから偶数であることがわかる．したがって，この変換の場合は符号の変化はない．

式 (21) の場合は，右辺第 1 項は第 1 行と第 2 行の交換であるから互換回数は偶数で符号変化なし，第 2 項は第 1 行と第 3 行の交換であるから互換回数は奇数で符号は反転，第 3 項は第 1 行と第 4 行の交換であるから互換回数は偶数で符号変化なし，以下同様にして，第 n 項は第 1 行と第 $n+h$ 行の交換であるから互換回数は $n-1$ となる．

式 (22) においてもほぼ同様である．右辺第 1 項は，第 2 行と第 1 行の交換で互換は 0 で符号は不変，第 2 項は第 2 行と第 3 行の交換で互換は 0 符号は不変，第 3 項は第 2 行と第 4 行の交換互換は 1 回で符号は反転，そして第 n 項は第 2 行と第 $h+n$ 行の交換になり互換は $(n-2)+(n-1)$ となり符号は $(-1)^{2n-3}$ となる．

以上のように，移動する要素のある 2 つの行の間にある要素の数を ν とすると，式 (21) から式 (24) の右辺

各項の符号は $(-1)^\nu$ となる．これを式 (21) から式 (24) に適用すると，

$$\begin{aligned}
&A_{23\cdots n,h+n}\,A_{1,h+1,\cdots,h+n-1}\\
&\quad=[A_{13\cdots n,h+n}]'_{2\cdots n,h+n}-[A_{124\cdots n,h+n}]'_{2\cdots n,h+n}+[A_{1235\cdots n,h+n}]'_{2\cdots n,h+n}\\
&\quad+\cdots+(-1)^{n-2}[A_{1\cdots n-1,h+n}]'_{2\cdots n,h+n}+[A_{123\cdots n}]'_{2\cdots n,h+n} \qquad (26)\\
&A_{13\cdots n,h+n}\,A_{2,h+1,\cdots,h+n-1}\\
&\quad=[A_{23\cdots n,h+n}]'_{13\cdots n,h+n}+[A_{124\cdots n,h+n}]'_{13\cdots n,h+n}-[A_{1235\cdots n,h+n}]'_{13\cdots n,h+n}\\
&\quad+\cdots+(-1)^{n-3}[A_{1\cdots n-1,h+n}]'_{13\cdots n,h+n}-[A_{123\cdots n}]'_{13\cdots n,h+n} \qquad (27)\\
&A_{124\cdots n,h+n}\,A_{3,h+1,\cdots,h+n-1}\\
&\quad=-[A_{234\cdots n,h+n}]'_{124\cdots n,h+n}+[A_{134\cdots n,h+n}]'_{124\cdots n,h+n}+[A_{124\cdots n,h+n}]'_{124\cdots n,h+n}\\
&\quad+\cdots+(-1)^{n-4}[A_{1\cdots n-1,h+n}]'_{124\cdots n,h+n}+[A_{123\cdots n}]'_{124\cdots n,h+n} \qquad (28)\\
&\qquad\qquad\vdots\\
&A_{1\cdots n-1,h+n}A_{n,h+1,\cdots,h+n-1}\\
&\quad=(-1)^{n-2}[A_{23\cdots n,h+n}]'_{1\cdots n-1,h+n}+(-1)^{n-3}[A_{134\cdots n,h+n}]'_{1\cdots n-1,h+n}+(-1)^{n-4}[A_{124\cdots n,h+n}]'_{1\cdots n-1,h+n}\\
&\quad+\cdots+[A_{1\cdots n-2,n,h+n}]'_{1\cdots n-1,h+n}+(-1)^{n-1}[A_{1\cdots n}]'_{1\cdots n-1,h+n} \qquad (29)
\end{aligned}$$

行列式の積の変換

式 (26) から式 (29) の右辺は，左辺の行列式の積を変換したときその中の対積の変換先を示す．変換先は n 種類存在するから各式の右辺は n 項からなる．変換先は，式 (12) で示される行の数だけあるから，この式は全部で n 個存在する．これを第 1 式から第 n 式とここで呼ぶことにして，第 i 式に $(-1)^{i-1}$ を掛けてから第 1 式から第 n 式を全て加える．そうすると，各式の最後の項を除く $n(n-1)$ 個の項は全て相殺して 0 になることがわかる．その結果，

$$\begin{aligned}
&A_{23\cdots n,h+n}\,A_{1,h+1,\cdots,h+n-1}-A_{13\cdots n,h+n}\,A_{2,h+1,\cdots,h+n-1}+A_{124\cdots n,h+n}\,A_{3,h+1,\cdots,h+n-1}\\
&+\cdots A_{1\cdots n-1,h+n}A_{n,h+1,\cdots,h+n-1}\\
&=[A_{123\cdots n}]'_{2\cdots n,h+n}+[A_{123\cdots n}]'_{13\cdots n,h+n}+[A_{123\cdots n}]'_{124\cdots n,h+n}+\cdots+[A_{1\cdots n}]'_{1\cdots n-1,h+n} \qquad (30)
\end{aligned}$$

となる．第 1 式から第 n 式を全て加えて $n(n-1)$ 個の項が相殺されることは以下のようにして確認することができる．まず，対積の変換では符号を除き式の変化はなく，かつ逆変換で 1 対 1 対応するから以下の式が成り立つ．

$$[A_{13\cdots n,h+n}]'_{23\cdots n,h+n}=[A_{23\cdots n,h+n}]'_{13\cdots n,h+n} \qquad (31)$$

$$[A_{124\cdots n,h+n}]'_{2\cdots n,h+n}=-[A_{234\cdots n,h+n}]'_{124\cdots n,h+n} \qquad (32)$$

$$[A_{124\cdots n,h+n}]'_{13\cdots n,h+n}=[A_{134\cdots n,h+n}]'_{124\cdots n,h+n} \qquad (33)$$

$$[A_{1\cdots n-1,h+n}]'_{2\cdots n,h+n}=(-1)^{n-2}[A_{23\cdots n,h+n}]'_{1\cdots n-1,h+n} \qquad (34)$$

$$\vdots$$

その他の項についても同様である．

以上の関係式を用いると，第 1 式の第 1 項と第 2 式の第 1 項が相殺，第 1 式の第 2 項と第 3 式の第 1 項が相殺，第 1 式の第 3 項と第 4 式の第 1 項が相殺，他の項も同じように相殺し，第 1 式の第 $n-1$ 項と第 n 式の第 1 項が相殺し，第 1 式の最後の項を除いた全ての項が相殺される．

第 2 式についても，第 2 式の第 2 項と第 3 式の第 2 項が相殺，第 2 式の第 3 項と第 4 式の第 2 項が相殺し，以下同様に相殺され，第 2 式の第 $n-1$ 項と第 n 式の第 2 項が相殺し，第 2 式の最後の項を除いた全ての項が相殺される．

第 3 式についても，第 3 式の第 3 項と第 4 式の第 3 項が相殺，第 3 式の第 4 項と第 5 式の第 3 項が相殺し，以下同様に相殺され，第 3 式の第 $n-1$ 項と第 n 式の第 3 項が相殺し，第 3 式の最後の項を除いた全ての項が相殺される．

第 4 式以下も同様である．このようにして第 1 式から第 n 式のうち，各式の最後の項を除く $n(n-1)$ 項は全て相殺される．

次に $A_{123\cdots n}A_{h+1,\cdots,h+n}$ に $h+n$ 行から始まる変換を施すと，

$$\begin{aligned}
&A_{123\cdots n}A_{h+1,\cdots,h+n}\\
&\qquad = [A_{234\cdots n,h+n}]'_{123\cdots n} - [A_{124\cdots n,h+n}]'_{123\cdots n} + [A_{1235\cdots n,h+n}]'_{123\cdots n}\\
&\qquad + \cdots + (-1)^{n-1}[A_{12\cdots n-1,h+n}]'_{123\cdots n}
\end{aligned} \tag{35}$$

となる．一方，

$$[A_{234\cdots n,h+n}]'_{123\cdots n} = [A_{123\cdots n}]'_{234\cdots n,h+n} \tag{36}$$

$$[A_{124\cdots n,h+n}]'_{123\cdots n} = -[A_{123\cdots n}]'_{124\cdots n,h+n} \tag{37}$$

$$[A_{1235\cdots n,h+n}]'_{123\cdots n} = [A_{123\cdots n}]'_{1235\cdots n,h+n} \tag{38}$$

$$\vdots$$

$$[A_{12\cdots n-1,h+n}]'_{123\cdots n} = (-1)^{n-1}[A_{123\cdots n}]'_{12\cdots n-1,h+n} \tag{39}$$

が，式 (31) から式 (34) などと同じ理由から成り立つ．これを式 (35) に代入すると，

$$\begin{aligned}
&A_{123\cdots n}A_{h+1,\cdots,h+n}\\
&\qquad = [A_{123\cdots n}]'_{234\cdots n,h+n} + [A_{123\cdots n}]'_{124\cdots n,h+n} + [A_{123\cdots n}]'_{1235\cdots n,h+n}\\
&\qquad + \cdots + (-1)^{n-1}[A_{123\cdots n}]'_{12\cdots n-1,h+n}
\end{aligned} \tag{40}$$

となる．これは明らかに式 (30) の右辺に等しい．したがって，

$$\begin{aligned}
&A_{2\cdots n,h+n}\,A_{1,h+1,\cdots,h+n-1} - A_{13\cdots n,h+n}\,A_{2,h+1,\cdots,h+n-1} + A_{124\cdots n,h+n}\,A_{3,h+1,\cdots,h+n-1}\\
&+ \cdots A_{1\cdots n-1,h+n}A_{n,h+1,\cdots,h+n-1}\\
&= A_{123\cdots n}A_{h+1,\cdots,h+n}
\end{aligned} \tag{41}$$

となる．これは式 (2) に他ならない．以上により定理は証明された．

具体的な例

$n=2$ の場合

式 (2) から，

$$A_{2,h+2}A_{1,h+1} - A_{1,h+2}A_{2,h+1} = A_{12}A_{h+1,h+2} \tag{42}$$

となる．これは以前述べた定理 [1] である．

$n = 3$ の場合

式 (2) から,

$$A_{23,h+3}A_{1,h+1,h+2} - A_{13,h+3}A_{2,h+1,h+2} + A_{12,h+3}A_{3,h+1,h+2} = A_{123}A_{h+1,h+2,h+3} \tag{43}$$

となる．これも以前述べた定理 [2] である．

参考文献

[1] 「1 つの行列から派生する行列式の積に関する定理」(2021/1/31 のエントリー).
`http://totoha.web.fc2.com/det_prod_theory.pdf`

[2] 「1 つの行列から派生する行列式の積に関する定理」(2021/2/26 のエントリー).
`http://totoha.web.fc2.com/det_prod_theory-2.pdf`