1つの行列から派生する行列式の積に関する定理　その2

2021.2.23 (2021.6.7 改訂)　　鈴木　実

1　はじめに

前回，行の数が列の数よりも2つ多い行列から派生する行列式の積に関して成り立つ定理を示し，その証明を付した [1]．その一般的な定理への拡張の前に，ここでは，行の数が列の数よりも3つ多い場合の定理とその証明を示す．

2　定理

$h+3$ 行 h 列の行列 A において，第 i 行，第 j 行，第 k 行を除いてできる h 次行列式を A_{ijk} と表し，i，j，k，i，j，および k を昇順の行番号とするとき，

$$A_{jk\,n}\,A_{i\,lm}-A_{ik\,n}\,A_{j\,lm}+A_{ij\,n}\,A_{k\,lm}=A_{ijk}\,A_{lmn} \tag{1}$$

が成り立つ．行と列を入れ替えた h 行 $h+3$ 列の行列においても同様の関係式が成り立つ．

3　証明

A を次のように表す．

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1h} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{h1} & \cdots & a_{hh} \\ a_{h+1,1} & \cdots & a_{h+1,h} \\ a_{h+2,1} & \cdots & a_{h+2,h} \\ a_{h+3,1} & \cdots & a_{h+3,h} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

そのとき，たとえば $A_{ij\,n}$，$A_{k\,lm}$，$A_{jk\,n}$ は次のように表される．

$$A_{ijn}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1h} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,h} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,h} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j-1,1} & \cdots & a_{j-1,h} \\ a_{j+1,1} & \cdots & a_{j+1,h} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,h} \\ a_{n+1,1} & \cdots & a_{n+1,h} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{h+2,1} & \cdots & a_{h+2,h} \end{vmatrix},\quad A_{klm}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1h} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k-1,1} & \cdots & a_{k-1,h} \\ a_{k+1,1} & \cdots & a_{k+1,h} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{l-1,1} & \cdots & a_{l-1,h} \\ a_{l+1,1} & \cdots & a_{l+1,h} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m-1,1} & \cdots & a_{m-1,h} \\ a_{m+1,1} & \cdots & a_{m+1,h} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{h+2,1} & \cdots & a_{h+2,h} \end{vmatrix},\quad A_{jkn}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1h} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j-1,1} & \cdots & a_{j-1,h} \\ a_{j+1,1} & \cdots & a_{j+1,h} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k-1,1} & \cdots & a_{k-1,h} \\ a_{k+1,1} & \cdots & a_{k+1,h} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,h} \\ a_{n+1,1} & \cdots & a_{n+1,h} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{h+2,1} & \cdots & a_{h+2,h} \end{vmatrix}. \tag{3}$$

行列式における行の互換は符号の反転を伴うのみであるから，$i=1, j=2, k=3$; $l=h+1, m=h+2, n=h+3$ の場合について証明すれば十分である．そうすると，証明すべき式は

$$A_{23,h+3}\ A_{1,h+1,h+2} - A_{13,h+3}\ A_{2,h+1,h+2} + A_{12,h+3}\ A_{3,h+1,h+2} = A_{123}\ A_{h+1,h+2,h+3} \tag{4}$$

となる．

$A_{12,h+3}$，$A_{3,h+1,h+2}$，$A_{23,h+3}$ と $A_{1,h+1,h+2}$，$A_{13,h+3}$ と $A_{2,h+1,h+2}$ は次式で表される．

$$A_{12,h+3} = \begin{vmatrix} a_{31} & \cdots & a_{3h} \\ a_{41} & \cdots & a_{4h} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{h1} & \cdots & a_{hh} \\ a_{h+1,1} & \cdots & a_{h+1,h} \\ a_{h+2,1} & \cdots & a_{h+2,h} \end{vmatrix}, \quad A_{3,h+1,h+2} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1h} \\ a_{21} & \cdots & a_{2h} \\ a_{41} & \cdots & a_{4h} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{h1} & \cdots & a_{hh} \\ a_{h+3,1} & \cdots & a_{h+3,h} \end{vmatrix}, \tag{5}$$

$$A_{23,h+3} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1h} \\ a_{41} & \cdots & a_{4h} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{h1} & \cdots & a_{hh} \\ a_{h+1,1} & \cdots & a_{h+1,h} \\ a_{h+2,1} & \cdots & a_{h+2,h} \end{vmatrix}, \quad A_{1,h+1,h+2} = \begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2h} \\ a_{31} & \cdots & a_{3h} \\ a_{41} & \cdots & a_{4h} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{h1} & \cdots & a_{hh} \\ a_{h+3,1} & \cdots & a_{h+3,h} \end{vmatrix}, \tag{6}$$

$$A_{13,h+3} = \begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2h} \\ a_{41} & \cdots & a_{4h} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{h1} & \cdots & a_{hh} \\ a_{h+1,1} & \cdots & a_{h+1,h} \\ a_{h+2,1} & \cdots & a_{h+2,h} \end{vmatrix}, \quad A_{2,h+1,h+2} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1h} \\ a_{31} & \cdots & a_{3h} \\ a_{41} & \cdots & a_{4h} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{h1} & \cdots & a_{hh} \\ a_{h+3,1} & \cdots & a_{h+3,h} \end{vmatrix}. \tag{7}$$

これを展開式で表すと，式 (4) の左辺から，

$$A_{12,h+3} = \sum_{(\gamma,p,\cdots,t,\delta,\lambda)} \mathrm{sgn}\,(\gamma,p,\cdots,t,\delta,\lambda) a_{3\gamma} a_{4p} \cdots a_{ht} a_{h+1,\delta} a_{h+2,\lambda} \tag{8}$$

$$A_{3,h+1,h+2} = \sum_{(\alpha,\beta,p,\cdots,t,\mu)} \mathrm{sgn}\,(\alpha\beta,p,\cdots,t,\mu) a_{1\alpha} a_{2\beta} a_{4p} \cdots a_{ht} a_{h+3,\mu} \tag{9}$$

$$A_{23,h+3} = \sum_{(\alpha,p,\cdots,t,\delta,\lambda)} \mathrm{sgn}\,(\alpha,p,\cdots,t,\delta,\lambda) a_{1\alpha} a_{4p} \cdots a_{ht} a_{h+1,\delta} a_{h+2,\lambda} \tag{10}$$

$$A_{1,h+1,h+2} = \sum_{(\beta,\gamma,p,\cdots,t,\mu)} \mathrm{sgn}\,(\beta,\gamma,p,\cdots,t,\mu) a_{2\beta} a_{3\gamma} a_{4p} \cdots a_{ht} a_{h+3,\mu} \tag{11}$$

$$A_{13,h+3} = \sum_{(\beta,p,\cdots,t,\delta,\lambda)} \mathrm{sgn}\,(\beta,p,\cdots,t,\delta,\lambda) a_{2\beta} a_{4p} \cdots a_{ht} a_{h+1,\delta} a_{h+2,\lambda} \tag{12}$$

$$A_{2,h+1,h+2} = \sum_{(\alpha,\gamma,p,\cdots,t,\mu)} \mathrm{sgn}\,(\alpha,\gamma,p,\cdots,t,\mu) a_{1\alpha} a_{3\gamma} a_{4p} \cdots a_{ht} a_{h+3,\mu} \tag{13}$$

となる．ここで，$(\alpha,p,\cdots,t,\beta)$ や $(\gamma,p,\cdots,t,\delta)$ は $\{1,2,\cdots,h\}$ の置換を表し，$\sum_{(\alpha,p,\cdots,t,\beta)}$ や $\sum_{(\gamma,p,\cdots,t,\delta)}$ はそのすべての置換に関する総和を意味する．以下の式変形では符号 $\mathrm{sgn}\,(\gamma,p,\cdots,t,\delta)$ が変化しない場合は省略する．また変化する場合でも，そこでは簡単に述べるに留めて，最後に符号変化の詳細を述べることにする．

式 (4) の右辺の A_{123}，$A_{h+1,h+2,h+3}$ についても同様に,

$$A_{123}=\begin{vmatrix} a_{41} & \cdots & a_{4h} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{h1} & \cdots & a_{hh} \\ a_{h+1,1} & \cdots & a_{h+1,h} \\ a_{h+2,1} & \cdots & a_{h+2,h} \\ a_{h+3,1} & \cdots & a_{h+3,h} \end{vmatrix}, \quad A_{h+1,h+2,h+3}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1h} \\ a_{21} & \cdots & a_{2h} \\ a_{31} & \cdots & a_{3h} \\ a_{41} & \cdots & a_{4h} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{h1} & \cdots & a_{hh} \end{vmatrix}, \tag{14}$$

$$A_{123}=\sum_{(p,\cdots,t,\delta,\lambda,\mu)} \operatorname{sgn}(p,\cdots,t,\delta,\lambda,\mu) a_{4p}\cdots a_{ht}a_{h+1,\delta}a_{h+2,\lambda}a_{h+3,\mu} \tag{15}$$

$$A_{h+1,h+2,h+3}=\sum_{(\alpha,\beta,\gamma,p,\cdots,t)} \operatorname{sgn}(\alpha,\beta,\gamma,p,\cdots,t) a_{1\alpha}a_{2\beta}a_{3\gamma}a_{4p}\cdots a_{ht} \tag{16}$$

と表す.

要素交換による対積の変換

前回 [1] と同様に, 行列式を展開した多項式の 1 つの項を「要素積」と呼ぶ. 例えば式 (8) の $a_{3\gamma}a_{4p}\cdots a_{ht}a_{h+1,\delta}a_{h+2,\lambda}$ は要素積である．2 つの行列式の積を展開したときにできる多項式の項は, もとの 2 つの行列式の要素積の積である．このような 1 対の要素積の積を簡単に「対積」と言うことにする．証明しようとする式 (4) は, 式 (5)–(7) に示す 1 対の行列式の積の関係式であり, それぞれの行列式は式 (8)–(13) のように展開されるので, これを式 (4) 左辺の行列式の積 $A_{12,h+3}A_{3,h+1,h+2}$ に代入すると以下のように対積を用いて展開することができる.

$$\begin{aligned} A_{12,h+3}\ A_{3,h+1,h+2} &= \left[\sum_{(\gamma,p,\cdots,t,\delta,\lambda)} \operatorname{sgn}(\gamma,p,\cdots,t,\delta,\lambda) a_{3\gamma}a_{4p}\cdots a_{ht}a_{h+1,\delta}a_{h+2,\lambda}\right] \\ &\quad\times\left[\sum_{(\alpha,\beta,p,\cdots,t,\mu)} \operatorname{sgn}(\alpha\beta,q,\cdots,w,\mu) a_{1\alpha}a_{2\beta}a_{4q}\cdots a_{hw}a_{h+3,\mu}\right] \\ &= \sum_{(\gamma,p,\cdots,t,\delta,\lambda)}\ \sum_{(\alpha,\beta,q,\cdots,w,\mu)} a_{3\gamma}(a_{4p}\cdots a_{ht})a_{h+1,\delta}a_{h+2,\lambda}\cdot a_{1\alpha}a_{2\beta}(a_{4q}\cdots a_{hw})a_{h+3,\mu} \end{aligned}$$

上の式では第 2 式以降は符号 sgn ( ) を省略した．第 r, f, g 行の要素も記入すると

$$\begin{aligned} A_{12,h+3}\ A_{3,h+1,h+2} &= \sum_{(\gamma,p,\cdots,t,\delta,\lambda)}\ \sum_{(\alpha,\beta,q,\cdots,w,\mu)} \\ &\quad [a_{3\gamma}(a_{4p}\cdots a_{r\alpha}\cdots a_{f\beta}\cdots a_{g\mu}\cdots a_{ht})a_{h+1,\delta}a_{h+2,\lambda}]\ [a_{1\alpha}a_{2\beta}(a_{4q}\cdots a_{r\gamma}\cdots a_{f\delta}\cdots a_{g\lambda}\cdots a_{hw})a_{h+3,\mu}] \end{aligned} \tag{17}$$

となる．他の行列式の積 $A_{23,h+3}\ A_{1,h+1,h+2}$ と $A_{13,h+3}\ A_{2,h+1,h+2}$ についても同様に,

$$\begin{aligned} A_{23,h+3}\ A_{1,h+1,h+2} &= \sum_{(\gamma,p,\cdots,t,\delta,\lambda)}\ \sum_{(\alpha,\beta,q,\cdots,w,\mu)} \\ &\quad [a_{1\alpha}(a_{4p}\cdots a_{r\beta}\cdots a_{f\gamma}\cdots a_{g\mu}\cdots a_{ht})a_{h+1,\delta}a_{h+2,\lambda}]\ [a_{2\beta}a_{3\gamma}(a_{4q}\cdots a_{r\alpha}\cdots a_{f\delta}\cdots a_{g\lambda}\cdots a_{hw})a_{h+3,\mu}] \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned} A_{13,h+3}\ A_{2,h+1,h+2} &= \sum_{(\gamma,p,\cdots,t,\delta,\lambda)}\ \sum_{(\alpha,\beta,q,\cdots,w,\mu)} \\ &\quad [a_{2\beta}(a_{4p}\cdots a_{r\alpha}\cdots a_{f\gamma}\cdots a_{g\mu}\cdots a_{ht})a_{h+1,\delta}a_{h+2,\lambda}]\ [a_{1\alpha}a_{3\gamma}(a_{4q}\cdots a_{r\beta}\cdots a_{f\delta}\cdots a_{g\lambda}\cdots a_{hw})a_{h+3,\mu}] \end{aligned} \tag{19}$$

となる．$A_{123}A_{h+1,h+2,h+3}$ についても，式 (14)–(16) を用いて次のように対積で展開することができる．

$$A_{123}\ A_{h+1,h+2,h+3} = \sum_{(p,\cdots,t,\delta,\lambda,\mu)}\ \sum_{(\alpha,\beta,\gamma,q,\cdots,w)} [(a_{4p}\cdots a_{r\alpha}\cdots a_{f\beta}\cdots a_{g\gamma}\cdots a_{ht})a_{h+1,\delta}a_{h+2,\lambda}a_{h+3,\mu}]\ [a_{1\alpha}a_{2\beta}a_{3\gamma}(a_{4q}\cdots a_{r\delta}\cdots a_{f\lambda}\cdots a_{g\mu}\cdots a_{hw})] \quad (20)$$

行列式の積を対積で展開したとき，対積の項数は $(h!)^2$ である．任意の 1 つの対積を表すときには式 (17)–(20) の総和記号以下の表記を用いることにする．対積の符号については後で述べることにして，ここでは触れない．

証明しようとする式は行列式の積 (17)–(20) の間の関係を表す式 (4) である．そのために，式 (17)–(20) の対積の間の関係を明らかにする必要がある．この関係は以下に示すような要素交換による対積の変換をすることによって明らかになる．最初に，この要素交換の操作を説明し，その後で要素交換による対積の変換を具体的に説明する．まず，例として，式 (17) の対積の総和の中から 1 つを取り上げ，これに要素交換を施してみよう．次の式は式 (17) の対積である．

$$[a_{3\gamma}(a_{4p}\cdots a_{r\alpha}\cdots a_{f\beta}\cdots a_{g\mu}\cdots a_{ht})a_{h+1,\delta}a_{h+2,\lambda}]\ [a_{1\alpha}a_{2\beta}(a_{4q}\cdots a_{r\gamma}\cdots a_{f\delta}\cdots a_{g\lambda}\cdots a_{hw})a_{h+3,\mu}] \quad (21)$$

この対積において，左の大括弧と右の大括弧の間で要素の交換を考える．対積の中の要素の交換であるから対積自身は変わらない．最初に左の大括弧で行番号が右の大括弧にない要素を選ぶ．このような，片側の大括弧の中にしかないような行番号をもつ要素を「不対要素」と呼ぶことにする．この不対要素を右大括弧内へ移動する．例えば，これを $a_{3\gamma}$ とし，右大括弧の中へ移動する．そうすると，その要素の列番号（この例の場合は γ）と同じ列番号の要素が右大括弧内になければならない．なぜなら，右側の列番号の全体は 1 から h を覆っているからである．列番号が一致した 2 つの要素のうち，もともと右大括弧内にあった要素を，その要素の行番号と同じ行番号を持つ左大括弧内の要素と交換する．この交換により左大括弧内において列番号が重複することはない．なぜなら，左大括弧へ移動した要素の列番号はもともと左大括弧にあったものだからである．一方，右大括弧では，左から移動してきた要素の列番号と同じ列番号を持つ要素が必ず存在する．この要素と同じ行番号を持つ右大括弧内の要素と交換する．この場合もまた，左大括弧内では同じ列番号を持つ要素はなく，右大括弧内に同じ列番号の要素が出てくる．左大括弧および右大括弧内要素の列番号全体はそれぞれ 1 から h の置換であるから同じ列番号が再び交換されることはない．したがって，この交換操作を繰り返し行うと，左大括弧から移動してきた要素と同じ列番号を持つ要素が右大括弧内に存在するが，その要素の行番号と同じ行番号をもつ要素が左大括弧内に存在しないということが，要素交換がある回数に達したときに必ず起こる．この場合は要素の交換にはならないので，これをそのまま左大括弧の中に移動することになる．そうすると，両方の大括弧の中の要素の数は h となり，かつ，それぞれの大括弧内で列番号の並びには重複がないということになる．すなわち，それぞれの大括弧内の列番号全体は 1 から h の順列になることがわかる．このことは，対積の不対要素が左右の大括弧の間で入れ替わったことを意味する．つまり，式 (17)–(20) の 1 つで示される行列式積の対積が上の要素交換操作により，式 (17)–(20) の別の式の対積へと変換されたことになる．

上で説明した要素交換操作を，具体的に式 (21) の対積の場合に当てはめてみよう．最初に，左大括弧内の $a_{3\gamma}$ を右大括弧内に移動する．そうすると右大括弧内で $a_{r\gamma}$ と列番号 γ が重複する．この $a_{r\gamma}$ と左大括弧内 $a_{r\alpha}$ を交換する．今度は $a_{r\alpha}$ が右大括弧内で $a_{1\alpha}$ と列番号 α が重複する．一方，$a_{1\alpha}$ の行番号 1 は左大括弧内にはないので交換はできない．したがって，今度は交換ではなく，$a_{1\alpha}$ をそのまま左大括弧内へ移動することになる．その結果，一連の要素交換操作は終了する．この要素交換操作により対積は次のように変換される．

$$[a_{1\alpha}(a_{4p}\cdots a_{r\gamma}\cdots a_{f\beta}\cdots a_{g\mu}\cdots a_{ht})a_{h+1,\delta}a_{h+2,\lambda}]\ [a_{2\beta}a_{3\gamma}(a_{4q}\cdots a_{r\alpha}\cdots a_{f\delta}\cdots a_{g\lambda}\cdots a_{hw})a_{h+3,\mu}] \quad (22)$$

この式は式 (18) で示される $A_{23,h+3}A_{1,h+1,h+2}$ の 1 つの対積であることがわかる．したがって，$A_{12,h+3}A_{3,h+1,h+2}$ の 1 つの対積に対して，$a_{3\gamma}$ から始まり $a_{1\alpha}$ で終わる要素交換操作を行うと $A_{23,h+3}A_{1,h+1,h+2}$ の対積に変換されることがわかる．

次に，同じ式 (17) の対積の 1 つである

$$[a_{3\gamma}(a_{4p}\cdots a_{r\mu}\cdots a_{f\beta}\cdots a_{g\alpha}\cdots a_{ht})a_{h+1,\delta}a_{h+2,\lambda}]\ [a_{1\alpha}a_{2\beta}(a_{4q}\cdots a_{r\gamma}\cdots a_{f\delta}\cdots a_{g\lambda}\cdots a_{hw})a_{h+3,\mu}] \quad (23)$$

に当てはめてみよう．式 (21) との違いは左大括弧内の第 r 行と第 g 行の列番号が互いに置き換わっていることである．同じ変換操作を行うと，左大括弧内の $a_{3\gamma}$ を右括弧内に移動することから始まり，いくつかの要素交換を経て最後に右括弧内の $a_{h+3,\mu}$ を左括弧内に移動して終わる．その結果，式 (23) は

$$[(a_{4p}\cdots a_{r\gamma}\cdots a_{f\beta}\cdots a_{g\alpha}\cdots a_{ht})a_{h+1,\delta}a_{h+2,\lambda}a_{h+3,\mu}]\,[a_{1\alpha}a_{2\beta}a_{3\gamma}(a_{4q}\cdots a_{r\mu}\cdots a_{f\delta}\cdots a_{g\lambda}\cdots a_{hw})] \tag{24}$$

と変換される．これは $A_{123}\ A_{h+1,h+2,h+3}$ の対積である．

もう一つ，次のような式 (17) の対積を変換しよう．この対積は，式 (21) の左大括弧内の第 r 行と第 f 行の列番号が互いに置き換わったものである．

$$[a_{3\gamma}(a_{4p}\cdots a_{r\beta}\cdots a_{f\alpha}\cdots a_{g\mu}\cdots a_{ht})a_{h+1,\delta}a_{h+2,\lambda}]\,[a_{1\alpha}a_{2\beta}(a_{4q}\cdots a_{r\gamma}\cdots a_{f\delta}\cdots a_{g\lambda}\cdots a_{hw})a_{h+3,\mu}] \tag{25}$$

この対積は，左大括弧内の $a_{3\gamma}$ から始まる交換操作により

$$[a_{2\beta}(a_{4p}\cdots a_{r\gamma}\cdots a_{f\alpha}\cdots a_{g\mu}\cdots a_{ht})a_{h+1,\delta}a_{h+2,\lambda}]\,[a_{1\alpha}a_{3\gamma}(a_{4q}\cdots a_{r\beta}\cdots a_{f\delta}\cdots a_{g\lambda}\cdots a_{hw})a_{h+3,\mu}] \tag{26}$$

と変換される．これはこれは $A_{13,h+3}A_{2,h+1,h+2}$ の対積である．

以上の結果から，$A_{12,h+3}\ A_{3,h+1,h+2}$ の対積に $a_{3\gamma}$ から始まる交換操作を施すと，$A_{23,h+3}\ A_{1,h+1,h+2}$，または $A_{123}\ A_{h+1,h+2,h+3}$，あるいは $A_{13,h+3}\ A_{2,h+1,h+2}$ のいずれかの対積に変換されることがわかった．しかも，これ以外の対積ではあり得ないことが以下のようにしてわかる．

まず，要素の交換では行番号が同じであるから列番号の交換になる．要素交換で右大括弧内の要素に列番号が重複が起こる．このとき，交換していないほうの要素を次の要素交換の対称となる．この要素は必ずまだ交換を経験していない要素である．なぜなら，要素交換で左大括弧へ移る要素の列番号は，もともと左大括弧から来た要素の列番号であるから左大括弧にはなく，もとの列番号が戻るだけである．右大括弧も同じで次の交換で列番号はもどってくる．また，交換のたびに，新しい行番号，新しい列番号と交互に更新される．したがって，一度交換された列番号が再び交換されるということは，左大括弧あるいは右大括弧に同じ列番号が重複している場合のみであるが，これはあり得ない．このことは，列番号全体は 1 から h の順列であるから明らかである．交換が h 回以上になればあり得るかもしれないが，実際には不対要素があるのでその前に要素交換は終わるから，いずれにしても一度交換された要素が再び交換されることはない．

このようにして，要素の移動から始まり，何回かの要素の交換を経て，要素の移動で終わることにより，左右の要素積の列番号全体の順列が変わり，不対要素の行番号の入れ替えが起こる．1 つの不対要素の入れ替えが起こったとして，左大括弧には，入れ替えが起こった右大括弧の不対要素の列番号をもつ要素と右大括弧の別の不対要素の列番号をもつ要素が必ず存在する．行列式の総和は全ての列番号の組み合わせに渡るから，これら 2 つの要素の列番号を交換した対積も必ず存在する．したがって，その対積に同じ要素から始まる要素交換操作をすれば，もう 1 つの不対要素との入れ替えが起こることになる．すなわち，左大括弧の不対要素から始まる要素交換操作を行列式積のすべての対積に対して行えば，変換された対積の帰属する行列式積の種類は右大括弧内にある不対要素の数に等しいことになる．不対要素以外の列番号は対称であるから，それぞれの行列式積で，変換された対積の数は等しいことになる．式 (25) の場合は，右大括弧の不対要素は $a_{1\alpha}$，$a_{2\beta}$，$a_{h+3,\mu}$ の 3 つである．したがって，$A_{12,h+3}\ A_{3,h+1,h+2}$ の対積から変換される対積は上記 3 つの行列式の積の対積しかあり得ないということがわかる．

上に示したことは式 (21) を例に取ると以下のようになる．まず，左大括弧内の $a_{3\gamma}$ の右大括弧への移動から始まり，右大括弧の $a_{r\gamma}$ と左大括弧の $a_{r\alpha}$ を交換し (一般にはこれが何回か続き)，最後に右大括弧の $a_{1\alpha}$ を左大括弧へ移動して要素交換操作を終わる．その結果，左大括弧の不対要素 $a_{3\gamma}$ と右大括弧の不対要素 $a_{1\alpha}$ の交換が起こる．つまり，$A_{12,h+3}\ A_{3,h+1,h+2}$ の対積から $A_{23,h+3}\ A_{1,h+1,h+2}$ の対積に変換される．

一方，式 (17) は全ての列番号の順列に関する総和であるから，左大括弧内の列番号 α と β のみが逆でそれ以外は全て同じという対積が必ず存在する．この対積を $a_{3\gamma}$ から始まる変換をすれば今度は左大括弧の不対要

素 $a_{3\gamma}$ と右大括弧の不対要素 $a_{2\beta}$ の交換が起こる．つまり，$A_{12,h+3}\,A_{3,h+1,h+2}$ の対積から $A_{13,h+3}\,A_{2,h+1,h+2}$ の対積に変換される．ここで，α と β のみが逆でそれ以外の列番号は全て同じという対積は必ず対で存在するから，変換によって $a_{3\gamma}$ と $a_{1\alpha}$ が交換される対積の数と $a_{3\gamma}$ と $a_{2\beta}$ が交換される対積の数は等しい．このことは，$a_{3\gamma}$ と $a_{h+3,\mu}$ の場合も成り立つ．結局，$A_{12,h+3}\,A_{3,h+1,h+2}$ の対積は 1/3 ずつが $A_{23,h+3}\,A_{1,h+1,h+2}$，$A_{13,h+3}\,A_{2,h+1,h+2}$，および $A_{123}\,A_{h+1,h+2,h+3}$ に変換される．これは式 (18)–(20) の行列式の積についても当てはまる．つまり，式 (17) から式 (20) で示される対積の総和は要素交換操作により，他の 3 つの式の対積に変換され，その数はそれぞれ全体の対積の数の 1/3 である．

変換に伴う対積の符号変化

式 (21) の対積に $a_{3\gamma}$ の移動から始まる要素交換の変換を施した場合における符号

$$\operatorname{sgn}(\gamma, p, \cdots, \alpha, \cdots, \beta, \cdots, \mu, \cdots, t, \delta, \lambda)\ \operatorname{sgn}(\alpha\beta, q, \cdots, \gamma, \cdots, \delta, \cdots, \lambda, \cdots, w, \mu) \tag{27}$$

の変化を考えよう．各行における列番号の並びを

$$\begin{array}{cccccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & r & \cdots & f & \cdots & g & \cdots & h & h+1 & h+2 & h+3 \\ - & - & \gamma & (p & \cdots & \alpha & \cdots & \beta & \cdots & \mu & \cdots & t) & \delta & \lambda & - \\ \alpha & \beta & - & (q & \cdots & \gamma & \cdots & \delta & \cdots & \lambda & \cdots & w) & - & - & \mu \end{array} \tag{28}$$

と表すことにする．第 1 段は行番号，第 2 段と第 3 段はそれぞれ式 (21) の左大括弧要素積および右大括弧の要素積の列番号の並びである．少括弧は左右大括弧に共通に存在する行番号の部分を示している．列番号が「–」で示される行は不対要素を表している．要素交換変換による符号変化は，第 2 段と第 3 段の列番号の要素交換操作と移動が終了して列番号の順列が定まってから決まる．したがって，符号の変化を知るためには，もとの列番号の並びが要素交換操作が終了した段階における列番号並びと一致するように列番号の互換をしたときのその回数を知ればよい．すなわち，式 (28) のそれぞれの段で列番号の互換を行い，その回数の偶奇により符号変化の有無を判断すればよい．次の式は要素交換操作が終了したときの列番号の並びである．

$$\begin{array}{cccccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & r & \cdots & f & \cdots & g & \cdots & h & h+1 & h+2 & h+3 \\ \alpha & - & - & (p & \cdots & \gamma & \cdots & \beta & \cdots & \mu & \cdots & t) & \delta & \lambda & - \\ - & \beta & \gamma & (q & \cdots & \alpha & \cdots & \delta & \cdots & \lambda & \cdots & w) & - & - & \mu \end{array} \tag{29}$$

つまり，式 (28) の場合は式 (29) となるように列番号互換を考えればよい．式 (29) を得るには，まず，式 (28) の第 2 段で，第 3 行の γ を第 1 行に移動する（互換 0 回）．次に第 1 行と第 r 行を互換する．互換は合計 1 回である．次に第 3 段で，第 1 行の α を第 3 行に移動する（互換 1 回）．次に第 3 行と第 r 行を互換する．互換は合計 2 回である．以上の互換を合計すると 3 回であるから，式 (27) の符号は変換により反転する．要素交換は第 4 行から第 h 行の間で行われるから，最初と最後の要素の移動を除けば他は要素の交換であって，これは列番号の互換に対応するが，第 2 段と第 3 段の両方で互換が起こるので互換数は必ず偶数になり，全体の互換数の偶奇には関係しないので考えなくてもよい．したがって，符号の変化は最初と最後の要素の移動で決まり，第 2 段と第 3 段で要素の移動が起こる行の間に存在する要素の数の偶奇で決定する．つまり，要素積の要素を行番号の順に並べた時に，交換される不対要素の間に存在する交換に関わらない不対要素の偶奇が符号を決定し，奇数なら符号反転する，ということである．今の場合には式 (28) の第 1 行と第 3 行の間に存在する要素であり，この場合には $a_{2\beta}$ が 1 個のみ存在するから符号の反転が起こることになる．

式 (23) から出発する場合は次の表から考える．

$$\begin{array}{cccccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & r & \cdots & f & \cdots & g & \cdots & h & h+1 & h+2 & h+3 \\ - & - & \gamma & (p & \cdots & \mu & \cdots & \beta & \cdots & \alpha & \cdots & t) & \delta & \lambda & - \\ \alpha & \beta & - & (q & \cdots & \gamma & \cdots & \delta & \cdots & \lambda & \cdots & w) & - & - & \mu \end{array} \tag{30}$$

変換後は

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & r & \cdots & f & \cdots & g & \cdots & h & h+1 & h+2 & h+3 \\
- & - & - & (p & \cdots & \gamma & \cdots & \beta & \cdots & \alpha & \cdots & t) & \delta & \lambda & \mu \\
\alpha & \beta & \gamma & (q & \cdots & \mu & \cdots & \delta & \cdots & \lambda & \cdots & w) & - & - & -
\end{array} \tag{31}
$$

である．この表式 (30) の第 2 段において，第 3 行の γ を第 $h+3$ 行に移動し（互換 $h-1$ 回），次に第 $h+3$ 行と第 r 行の互換により第 2 段の互換は完了する，第 3 段に関しては最初に第 $h+3$ 行の μ を第 3 行に移動し（互換 $h-3$ 回），その後，第 3 行と第 r 行の互換により第 3 段の互換は完了して式 (31) となる．結局合計偶数回の互換で変換の列番号並びと一致するので符号の反転はない．要素の入れ替えが起こる第 3 行と第 $h+3$ 行の間にある不対要素の数は式 (30) から明らかなように偶数で，したがって符号の反転はないことと一致する．

式 (25) から出発する場合は次の表から考える．

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & r & \cdots & f & \cdots & g & \cdots & h & h+1 & h+2 & h+3 \\
- & - & \gamma & (p & \cdots & \beta & \cdots & \alpha & \cdots & \mu & \cdots & t) & \delta & \lambda & - \\
\alpha & \beta & - & (q & \cdots & \gamma & \cdots & \delta & \cdots & \lambda & \cdots & w) & - & - & \mu
\end{array} \tag{32}
$$

変換後は

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & r & \cdots & f & \cdots & g & \cdots & h & h+1 & h+2 & h+3 \\
- & \beta & - & (p & \cdots & \gamma & \cdots & \alpha & \cdots & \mu & \cdots & t) & \delta & \lambda & - \\
\alpha & - & \gamma & (q & \cdots & \beta & \cdots & \delta & \cdots & \lambda & \cdots & w) & - & - & \mu
\end{array} \tag{33}
$$

である．まず式 (32) の第 2 段で第 3 行の γ を第 2 行に移動し（互換 0 回），次に第 2 行と第 r 行の互換により式 (33) の第 2 段になる．第 3 段に関しては，式 (32) の第 2 行の β を第 3 行に移動し（互換 0 回），その後，第 3 行と第 r 行の互換を行い式 (33) の第 3 段になる．互換の回数は合計で 2 回で，符号の変化はない．第 2 行と第 3 行の間の不対要素数は 0 で，符号変化がないことが示される..

以上のように，要素交換操作による対積の変換において，対積の符号の変化は，変換操作で交換される 2 つの行の間に存在する要素の数が，偶数の場合は符号の変化がなく，奇数の場合は符号が反転する．言い換えれば，要素積を行順に並べたとき，入れ替えられる不対要素の間にある不対要素の数が偶なら符号は不変，奇なら符号は反転する，ということである．

行列式の積の変換

行列式の積 (17) 式の全ての対積に要素交換変換を施したとき，対積全体の 1/3 ずつが式 (18) から式 (20) の対積のそれぞれ 1/3 の部分に変換される．同様に，式 (18) から式 (20) の全ての対積に変換を施した場合は，式 (17) から式 (20) の他の 3 つの式の対積のそれぞれ 1/3 の部分に変換される．

いま簡単のために，$A_{12,h+3}\ A_{3,h+1,h+2}$ を表す添字として “$12, h+3$” を用いることにし，$A_{12,h+3}\ A_{3,h+1,h+2}$ に含まれる対積に $a_{3\gamma}$ から始まる変換を施した結果，$A_{23,h+3}\ A_{1,h+1,h+2}$ に含まれる対積の集合を

$$
[A_{23,h+3}\ A_{1,h+1,h+2}]'_{12,h+3} \tag{34}
$$

と表すことにする．他の行列式の積についても同様とする．式 (34) は $A_{23,h+3}\ A_{1,h+1,h+2}$ に含まれる対積の 1/3 である．そうすると，変換によって式そのものは変わらないので，まず次の式が成り立つ．

$$
\begin{aligned}
&A_{12,h+3}\ A_{3,h+1,h+2} \\
&= -\,[A_{23,h+3}\ A_{1,h+1,h+2}]'_{12,h+3} + [A_{13,h+3}\ A_{2,h+1,h+2}]'_{12,h+3} + [A_{123}\ A_{h+1,h+2,h+3}]'_{12,h+3}
\end{aligned} \tag{35}
$$

右辺第 1 項の負号は変換による符号反転による．同様に，式 (18) と式 (19) から，それぞれ $a_{1\alpha}$ および $a_{2\beta}$ からの変換に対して以下の関係式が成り立つ．

$$\begin{aligned}&A_{23,h+3}\ A_{1,h+1,h+2}\\=&-[A_{12,h+3}\ A_{3,h+1,h+2}]'_{23,h+3}+[A_{13,h+3}\ A_{2,h+1,h+2}]'_{23,h+3}+[A_{123}\ A_{h+1,h+2,h+3}]'_{23,h+3}\end{aligned}\tag{36}$$

$$\begin{aligned}&A_{13,h+3}\ A_{2,h+1,h+2}\\=&[A_{23,h+3}\ A_{1,h+1,h+2}]'_{13,h+3}+[A_{12,h+3}\ A_{3,h+1,h+2}]'_{13,h+3}-[A_{123}\ A_{h+1,h+2,h+3}]'_{13,h+3}\end{aligned}\tag{37}$$

が成り立つ．

以上の結果をもとに，式 (36)-(37)+(35) を計算すると，

$$\begin{aligned}&A_{23,h+3}\ A_{1,h+1,h+2}-A_{13,h+3}\ A_{2,h+1,h+2}+A_{12,h+3}\ A_{3,h+1,h+2}\\=&-[A_{12,h+3}\ A_{3,h+1,h+2}]'_{23,h+3}+[A_{13,h+3}\ A_{2,h+1,h+2}]'_{23,h+3}\\&+[A_{23,h+3}\ A_{1,h+1,h+2}]'_{13,h+3}+[A_{12,h+3}\ A_{3,h+1,h+2}]'_{13,h+3}\\&-[A_{23,h+3}\ A_{1,h+1,h+2}]'_{12,h+3}+[A_{13,h+3}\ A_{2,h+1,h+2}]'_{12,h+3}\\&+[A_{123}\ A_{h+1,h+2,h+3}]'_{23,h+3}+[A_{123}\ A_{h+1,h+2,h+3}]'_{13,h+3}+[A_{123}\ A_{h+1,h+2,h+3}]'_{12,h+3}\end{aligned}\tag{38}$$

となる．ここで，要素交換による対積変換は逆変換が可能で変換が 1 対 1 対応することから明らかに

$$[A_{23,h+3}\ A_{1,h+1,h+2}]'_{12,h+3}=-[A_{12,h+3}\ A_{3,h+1,h+2}]'_{23,h+3}\tag{39}$$

$$[A_{13,h+3}\ A_{2,h+1,h+2}]'_{12,h+3}=[A_{12,h+3}\ A_{3,h+1,h+2}]'_{13,h+3}\tag{40}$$

$$[A_{13,h+3}\ A_{2,h+1,h+2}]'_{23,h+3}=[A_{23,h+3}\ A_{1,h+1,h+2}]'_{13,h+3}\tag{41}$$

という関係式が成り立つ．

式 (39)–(41) を式 (38) に適用すると最初の 6 項が相殺されて

$$\begin{aligned}&A_{23,h+3}\ A_{1,h+1,h+2}-A_{13,h+3}\ A_{2,h+1,h+2}+A_{12,h+3}\ A_{3,h+1,h+2}\\=&[A_{123}\ A_{h+1,h+2,h+3}]'_{12,h+3}+[A_{123}\ A_{h+1,h+2,h+3}]'_{23,h+3}+[A_{123}\ A_{h+1,h+2,h+3}]'_{13,h+3}\end{aligned}\tag{42}$$

となる．

一方，$A_{123}\ A_{h+1,h+2,h+3}$ からの変換に関しては式 (35) と同様にして

$$\begin{aligned}&A_{123}\ A_{h+1,h+2,h+3}\\=&[A_{23,h+3}\ A_{1,h+1,h+2}]'_{123}-[A_{13,h+3}\ A_{2,h+1,h+2}]'_{123}+[A_{12,h+3}\ A_{3,h+1,h+2}]'_{123}\end{aligned}\tag{43}$$

が成り立つ．また，式 (39)–(41) と同様の理由から以下の関係式が成り立つ

$$[A_{23,h+3}\ A_{1,h+1,h+2}]'_{123}=[A_{123}\ A_{h+1,h+2,h+3}]'_{23,h+3}\tag{44}$$

$$[A_{13,h+3}\ A_{2,h+1,h+2}]'_{123}=-[A_{123}\ A_{h+1,h+2,h+3}]'_{13,h+3}\tag{45}$$

$$[A_{12,h+3}\ A_{3,h+1,h+2}]'_{123}=[A_{123}\ A_{h+1,h+2,h+3}]'_{12,h+3}\tag{46}$$

式 (44)–(46) を式 (43) に代入すると．

$$\begin{aligned}&A_{123}\ A_{h+1,h+2,h+3}\\=&[A_{123}\ A_{h+1,h+2,h+3}]'_{23,h+3}+[A_{123}\ A_{h+1,h+2,h+3}]'_{13,h+3}+[A_{123}\ A_{h+1,h+2,h+3}]'_{12,h+3}\end{aligned}\tag{47}$$

が成り立つ．これと式 (42) の右辺を比較することにより

$$A_{23,h+3}\ A_{1,h+1,h+2}-A_{13,h+3}\ A_{2,h+1,h+2}+A_{12,h+3}\ A_{3,h+1,h+2}=A_{123}\ A_{h+1,h+2,h+3}\tag{48}$$

となる．これは証明すべき式 (4) である．以上により定理は証明された．

参考文献

[1] 「1 つの行列から派生する行列式の積に関する定理」(2021/1/31 のエントリー).
http://totoha.web.fc2.com/det_prod_theory.pdf