縁付き行列式を成分とする複合行列式に関する定理　その 1

2021.3.24 (2021.7.30 改訂)　　鈴木　実

1　はじめに

R. F. Scott 著 “A Treatise on the Theory of Determinants”[1] の中に縁付き行列式 (bordered determinant) とそれを成分とする複合行列式に関する Sylvester の定理と，M. Picket による証明が述べられている[1]．それが，完全な証明ではないように思われることと，行列式の形や性質に正面から取り組んでいないことが私には不満であった．そういうことで，この Sylvester の定理の直接的な証明を試みた．

2　縁付き行列式

縁付き行列式とは，1 つの行列式の右側に 1 列または複数列を加え，下側に同じ数の行を追加した行列式を言う．追加した行と列の数は縁の幅と言う．例えば，縁の幅が 1 の場合は次のように表される．

$$A_h = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1h} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2h} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{h1} & a_{h2} & \cdots & a_{hh} \end{vmatrix}, \quad B_1 = \left|\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1h} & u_{1,h+1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2h} & u_{2,h+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{h1} & a_{h2} & \cdots & a_{hh} & u_{h,h+1} \\ \hdashline u_{h+1,1} & u_{h+1,2} & \cdots & u_{h+1,h} & u_{h+1,h+1} \end{array}\right| \tag{1}$$

A_h は h 次の行列式で，この A_h に $h+1$ 行と $h+1$ 列が追加された行列式が B_1 で，これを A_h の縁付き行列式と言う．$h+1$ 行と $h+1$ 列を縁 (border) と言う．幅が 2 の場合には，

$$B_2 = \left|\begin{array}{cccc:cc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1h} & u_{1,h+1} & u_{1,h+2} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2h} & u_{2,h+1} & u_{2,h+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{h1} & a_{h2} & \cdots & a_{hh} & u_{h,h+1} & u_{h,h+2} \\ \hdashline u_{h+1,1} & u_{h+1,2} & \cdots & u_{h+1,h} & u_{h+1,h+1} & u_{h+1,h+2} \\ u_{h+2,1} & u_{h+2,2} & \cdots & u_{h+2,h} & u_{h+2,h+1} & u_{h+2,h+2} \end{array}\right| \tag{2}$$

と表される．幅が 3 以上の場合も同様である．

---

[1]参考のため，Scott の本に出ている Picket の証明 (p.64) の概略を以下に記す．(変数は本論文に合わせて変えている．)

5.1 節に示したように，A と B を $h+n$ 次行列式とし，それぞれの行列式から任意の m 行と任意の m 列からなる m 次小行列式とその補小行列式を p_{ij} と q_{ik}，および p'_{ij} と q'_{ik} とする．ただし，$1 \leq i,\, j,\, k \leq g'$，$g' = \binom{h+n}{m}$ である．次に，$t_{jk} = \sum_{i=1}^{\mu'} a_{ij} p'_{ij} q_{ik}$ を定義する．これは，最初の h 行，h 列も含めていることを除けば，式 (7) と同じである．A_h は A の最初の h 行 h 列の小行列式であるが，ここで，p.3 の式 (8) のように A_h を定義し直し，上の A を A_h に，B を A として考える．そのとき，T を t_{jk} を成分とする複合行列式と定義すると，

$$T = A^{\binom{h}{m}} M_1^{\binom{h}{m-1}} M_2^{\binom{h}{m-2}} \cdots M_m^{\binom{h}{0}} \tag{A}$$

となる．なぜ，この式になるのかということを説明するのは複雑であるので，別途書くことにしたい．一方，$T = A^{\binom{n-1}{m}} B^{\binom{n-1}{m-1}}$ であることが示せるので，

$$T = A_h^{\binom{h}{m}} A_1^{\binom{h}{m-1}} \tag{B}$$

ここで，

$$M_k = A_h^{\binom{n-1}{m}} A^{\binom{n-1}{m-1}} \tag{C}$$

とすると，式 (A) が式 (B) になることを数学的帰納法により示すことができる．

以上が Picket による証明である．しかし，このままでは必要条件にしかならないので，完全な証明とは言えない．(C) と異なるいかなる関数を用いても (A) が (B) になることはないことを示す必要があるが，それは極めて困難であるので，実質的に証明されたとみなされるのだろうか．

3　縁付き行列式を成分とする複合行列式

次の $h+n$ 次行列式 A を考える．

$$A = \left|\begin{array}{cccc:ccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1h} & a_{1,h+1} & \cdots & a_{1,h+n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2h} & a_{2,h+1} & \cdots & a_{2,h+n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{h1} & a_{h2} & \cdots & a_{hh} & a_{h,h+1} & \cdots & a_{h,h+n} \\ \hdashline a_{h+1,1} & a_{h+1,2} & \cdots & a_{h+1,h} & a_{h+1,h+1} & \cdots & a_{h+1,h+n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{h+n,1} & a_{h+n,2} & \cdots & a_{h+n,h} & a_{h+n,h+1} & \cdots & a_{h+n,h+n} \end{array}\right| \tag{3}$$

この行列式 A の第 h+1 行から第 $h+n$ 行までと第 h+1 列から第 $h+n$ 列までを取り除いてできる小行列式は式 (1) に示す A_h である．

次に、A の第 $h+1$ 行〜第 $h+n$ 行のうちから m 行を選び，第 $h+1$ 列〜第 $h+n$ 列のうちから m 列を選ぶ．第 $h+1$ 行〜第 $h+n$ 行と第 $h+1$ 列〜第 $h+n$ 列の中から選ばれなかった行と列を取り除いてできる小行列式は A_h への幅 m の縁付き行列式である．

ここで，この縁付き行列式を成分とする複合行列式を考える．m 行と m 列の選び方にはそれぞれ $g = \binom{n}{m}$ 種類ある．これに 1 から g まで番号を付ける．そうすると，縁付き行列式の種類は，m 行と m 列の選び方により g^2 種類存在し，縁の行の組の番号 i と列の組の番号 j で縁付き行列式を t_{ij} を識別することができる．明らかに，t_{ij} は,，$h+n$ 次行列式 A の A_h 以外の行および列から作られる幅 m の A_h の縁付き行列式をすべて網羅している．この t_{ij} を成分とする g 次複合行列式を $M_m^{(n)}$ と定義する．

4　縁付き行列式を成分とする複合行列式に関する定理

前節で定義された縁付き行列式 t_{ij} を成分とする複合行列式 $M_m^{(n)}$ は次式で与えられる [1]．

$$M_m^{(n)} = A_h^{\binom{n-1}{m}} A^{\binom{n-1}{m-1}} \tag{4}$$

これを Sylvester の定理という．

$m=1$ の場合，$M_1^{(n)} = (c_{ik})$ として、その成分 c_{ik} は

$$c_{ik} = \left|\begin{array}{ccc:c} a_{11} & \cdots & a_{1h} & a_{1,h+i} \\ a_{21} & \cdots & a_{2h} & a_{2,h+i} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{h1} & \cdots & a_{hh} & a_{h,h+i} \\ \hdashline a_{h+k,1} & \cdots & a_{h+k,h} & a_{h+k,h+i} \end{array}\right| \quad (i,k=1,2,\cdots,n) \tag{5}$$

と表され、

$$M_1^{(n)} = {A_h}^{n-1} A \tag{6}$$

となる．

5　証明

5.1　準備

式 (4) を証明するために以下のような行列と小行列式を定義する．

n 個から m 個を選ぶ i 番目の組み合わせ (i 組と呼ぶ) により A の第 $h+1$ 行から第 $h+n$ 行までの中から m 行を選び，同じく第 $h+1$ 列から第 $h+n$ 列までの中から j 番目の組み合わせ (j 組と呼ぶ，以下同様) により m 列を選び，それ以外の行と列を A から取り除いてできる m 次の小行列式を p_{ij} とする．ここで，i, j は

$$1 \leq i,\, j \leq g,$$
$$g = \binom{n}{m}$$

である．また，

$$1 \leq m < n$$

とする．

次に，q_{ij} を A に関する p_{ij} の補小行列式とする．すなわち，q_{ij} は，i 組で示される m 個の行と j 組で示される m 個の列を A から取り除いて得られる $h+n-m$ 次小行列式である．

ここで，B をもう一つの $h+n$ 次行列式とする．B についても同様に p'_{ij} と q'_{ij} を定義する．さらに，p'_{ij} と q_{ij} から次のように t_{jk} を定義する．

$$t_{jk} = \sum_{i=1}^{g} \mathrm{sgn}\,(ij)\, p'_{ij} q_{ik} \tag{7}$$

式 (7) で p'_{ij} のかわりに p_{ik} を用いれば，この式は明らかに行列 A の k 組の列による展開式 [4] である．つまり，t_{jk} は $h+n$ 次の行列式 A である．ここで，p'_{ij} のかわりに p'_{ik} ならば，t_{kk} は行列式 A の k 組の m 列を B の k 組の m 列置き換えた行列式に等しい．したがって，p'_{ij} ならば，t_{jk} は行列式 A の k 組の m 列を B の j 組の m 列置き換えた $h+n$ 次行列式に等しい．

今，A_h として，式 (1) の h 次行列式のかわりに，次の $h+n$ 次行列式を用いることにしよう．

$$A_h = \left|\begin{array}{cccc:cccc}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1h} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2h} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{h1} & a_{h2} & \cdots & a_{hh} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hdashline
a_{h+1,1} & a_{h+1,2} & \cdots & a_{h+1,h} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
a_{h+2,1} & a_{h+2,2} & \cdots & a_{h+2,h} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{h+n,1} & a_{h+n,2} & \cdots & a_{h+n,h} & 0 & 0 & \cdots & 1
\end{array}\right| \tag{8}$$

次に，式 (7) に使われている A をこの A_h とし，B を A とする．その時，式 (7) は，式 (8) に示される A_h において，k 組の m 列を A の j 組の m 列で置き換えた $h+n$ 次行列式となる．

$m=1$ の場合を考えよう．この場合，簡単に，i 組は $h+i$ を表すことにしてよい．$m=1$ であるから，k 組と j 組は，それぞれ第 $h+k$ 列および第 $h+j$ 列となる．そのとき t_{jk} は，A の第 $h+j$ 列が A_h の第 $h+k$ 列

に入った行列式である．すなわち，

$$t_{jk} = \left|\begin{array}{cccc:ccccc}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1h} & 0 & \cdots & a_{1,h+j} & \cdots & 0 \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2h} & 0 & \cdots & a_{2,h+j} & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{h1} & a_{h2} & \cdots & a_{hh} & 0 & \cdots & a_{h,h+j} & \cdots & 0 \\ \hdashline
a_{h+1,1} & a_{h+1,2} & \cdots & a_{h+1,h} & 1 & \cdots & a_{h+1,,h+j} & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{h+k,1} & a_{h+k,2} & \cdots & a_{h+k,h} & 0 & \cdots & a_{h+k,h+j} & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & \cdots \\
a_{h+n,1} & a_{h+n,2} & \cdots & a_{h+n,h} & 0 & \cdots & a_{h+n,h+j} & \cdots & 1
\end{array}\right|. \tag{9}$$

ここで，A の j 列で置き換わった k 列以外の $h+1$ 列以上の列 (つまり単位行列の列部分) を順次その列で行列式展開していくと，結局，

$$t_{jk} = \left|\begin{array}{cccc:c}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1h} & a_{1,h+j} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2h} & a_{2,h+j} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{h1} & a_{h2} & \cdots & a_{hh} & a_{h,h+j} \\ \hdashline
a_{h+k,1} & a_{h+k,2} & \cdots & a_{h+k,h} & a_{h+k,h+j}
\end{array}\right| \tag{10}$$

となる．これは A_h に幅 1 の縁がついた縁付き行列式である．縁となる 1 行は A の第 $h+k$ 行，縁となる 1 列は A の第 $h+j$ 列である．

このようにして作られる幅が 1 の縁付き行列式は，縁となる行と列が A の $h+1$ から $h+n$ までとることができる．すなわち，$g = \binom{n}{1} = n$ であり，

$$1 \leq j,\, k \leq n \tag{11}$$

であるから，t_{jk} の数は n^2 である．すなわち，t_{jk} は，A の A_h 以外の任意の行および列を縁とする幅 1 の $h+1$ 次縁付き小行列式の全てを尽くしている．したがって，複合行列式 $M_1^{(n)}$ の成分は式 (9) の t_{kj} で与えられる．

縁の幅が 2 以上の場合も同様に考えることができる．$h+1, \cdots, h+n$ から任意の 2 つを選ぶ組み合わせの種類を 1 から $g = \binom{n}{2}$ まで番号を付す．式 (3) の A の第 $h+1$ 列以上から j 組の 2 列を選び，その 2 列で A_h の k 組の 2 列を置き換えれば幅が 2 の縁付き行列式になる．j の 2 列を $r,\ s$ とし，k の 2 列を $t,\ u$ とすると，

$$1 \leq j,\, k \leq g, \quad j = \{r, s\}, k = \{t, u\} \tag{12}$$

$$1 \leq r < s \leq n, \quad 1 \leq t < u \leq n \tag{13}$$

であり，式 (9) に相当する式は，

$$t_{jk} = \left|\begin{array}{cccc:ccccccc}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1h} & 0 & \cdots & a_{1,h+r} & \cdots & a_{1,h+s} & \cdots & 0 \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2h} & 0 & \cdots & a_{2,h+r} & \cdots & a_{2,h+s} & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{h1} & a_{h2} & \cdots & a_{hh} & 0 & \cdots & a_{h,h+r} & \cdots & a_{h,h+s} & \cdots & 0 \\ \hdashline
a_{h+1,1} & a_{h+1,2} & \cdots & a_{h+1,h} & 1 & \cdots & a_{h+1,h+r} & \cdots & a_{h+1,h+s} & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{h+t,1} & a_{h+t,2} & \cdots & a_{h+t,h} & 0 & \cdots & a_{h+t,h+r} & \cdots & a_{h+t,h+s} & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{h+u,1} & a_{h+u,2} & \cdots & a_{h+u,h} & 0 & \cdots & a_{h+u,h+r} & \cdots & a_{h+u,h+s} & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & \cdots \\
a_{h+n,1} & a_{h+n,2} & \cdots & a_{h+n,h} & 0 & \cdots & a_{h+n,h+r} & \cdots & a_{h+n,h+s} & \cdots & 1
\end{array}\right| \tag{14}$$

となる．置き換わった列以外の単位列ベクトルの列で行列式展開すれば，結局，

$$t_{jk}=\left|\begin{array}{cccc:cc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1h} & a_{1,h+r} & a_{1,h+s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2h} & a_{2,h+r} & a_{2,h+s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{h1} & a_{h2} & \cdots & a_{hh} & a_{h,h+r} & a_{h,h+s} \\ \hdashline a_{h+t,1} & a_{h+t,2} & \cdots & a_{h+t,h} & a_{h+t,h+r} & a_{h+t,h+s} \\ a_{h+u,1} & a_{h+u,2} & \cdots & a_{h+u,h} & a_{h+u,h+r} & a_{h+u,h+s} \end{array}\right| \tag{15}$$

となる．これは幅が 2 の縁付き行列式である．かつ，式 (12) あるいは式 (13) により，幅 2 の縁として A の A_h 以外の行および列を用いた全ての縁付き行列式を網羅している．したがって，μ 次複合行列式 $M_2^{(n)}$ の成分 t_{kj} は式 (14) によって表すことができる．

$m>2$ の場合も同様に定義することができる．

5.2 具体例 1　$n=2$，$m=1$ の場合

一般式 (4) あるいは式 (6) を証明する前に，$n=2$，$m=1$ および $n=3$，$m=1$ の場合を考えてみよう．

まず，$n=2$，$m=1$ の場合，t_{jk} は以下に示す通りである．

$$t_{11}=\left|\begin{array}{ccc:cc} a_{11} & \cdots & a_{1h} & a_{1,h+1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{h1} & \cdots & a_{hh} & a_{h,h+1} & 0 \\ \hdashline a_{h+1,1} & \cdots & a_{h+1,2} & a_{h+1,h+1} & 0 \\ a_{h+2,1} & \cdots & a_{h+2,h} & a_{h+2,h+1} & 1 \end{array}\right|,\quad t_{12}=\left|\begin{array}{ccc:cc} a_{11} & \cdots & a_{1h} & 0 & a_{1,h+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{h1} & \cdots & a_{hh} & 0 & a_{h,h+1} \\ \hdashline a_{h+1,1} & \cdots & a_{h+1,2} & 1 & a_{h+1,h+1} \\ a_{h+2,1} & \cdots & a_{h+2,h} & 0 & a_{h+2,h+1} \end{array}\right|. \tag{16}$$

$$t_{21}=\left|\begin{array}{ccc:cc} a_{11} & \cdots & a_{1h} & a_{1,h+2} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{h1} & \cdots & a_{hh} & a_{h,h+2} & 0 \\ \hdashline a_{h+1,1} & \cdots & a_{h+1,2} & a_{h+1,h+2} & 0 \\ a_{h+2,1} & \cdots & a_{h+2,h} & a_{h+2,h+2} & 1 \end{array}\right|,\quad t_{22}=\left|\begin{array}{ccc:cc} a_{11} & \cdots & a_{1h} & 0 & a_{1,h+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{h1} & \cdots & a_{hh} & 0 & a_{h,h+2} \\ \hdashline a_{h+1,1} & \cdots & a_{h+1,2} & 1 & a_{h+1,h+2} \\ a_{h+2,1} & \cdots & a_{h+2,h} & 0 & a_{h+2,h+2} \end{array}\right|. \tag{17}$$

この行列式を第 $h+1$ 列と第 $h+2$ 列の 2 列で展開しても構わないが，置き換えられていない第 $h+2$ 列または第 $h+1$ 列で展開して次式にしておいてから第 $h+1$ 列で展開しても同じである．

$$t_{11}=\left|\begin{array}{ccc:c} a_{11} & \cdots & a_{1h} & a_{1,h+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{h1} & \cdots & a_{hh} & a_{h,h+1} \\ \hdashline a_{h+1,1} & \cdots & a_{h+1,2} & a_{h+1,h+1} \end{array}\right|,\quad t_{12}=\left|\begin{array}{ccc:c} a_{11} & \cdots & a_{1h} & a_{1,h+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{h1} & \cdots & a_{hh} & a_{h,h+1} \\ \hdashline a_{h+2,1} & \cdots & a_{h+2,2} & a_{h+2,h+1} \end{array}\right|. \tag{18}$$

$$t_{21}=\left|\begin{array}{ccc:c} a_{11} & \cdots & a_{1h} & a_{1,h+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{h1} & \cdots & a_{hh} & a_{h,h+2} \\ \hdashline a_{h+1,1} & \cdots & a_{h+1,2} & a_{h+1,h+2} \end{array}\right|,\quad t_{22}=\left|\begin{array}{ccc:c} a_{11} & \cdots & a_{1h} & a_{1,h+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{h1} & \cdots & a_{hh} & a_{h,h+2} \\ \hdashline a_{h+2,1} & \cdots & a_{h+2,h} & a_{h+2,h+2} \end{array}\right|. \tag{19}$$

式 (18) と式 (19) の展開式を記述するために次のような h 次行列式を定義する．

$$A_{\alpha,\beta} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1h} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2h} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{\alpha-1,1} & a_{\alpha-1,2} & \cdots & a_{\alpha-1,h} \\ a_{\alpha+1,1} & a_{\alpha+1,2} & \cdots & a_{\alpha+1,h} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{\beta-1,1} & a_{\beta-1,2} & \cdots & a_{\beta-1,h} \\ a_{\beta+1,1} & a_{\beta+1,2} & \cdots & a_{\beta+1,h} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{h1} & a_{h2} & \cdots & a_{hh} \\ a_{h+1,1} & a_{h+1,2} & \cdots & a_{h+1,h} \\ a_{h+2,1} & a_{h+2,2} & \cdots & a_{h+2,h} \end{vmatrix}, \tag{20}$$

ここで，α と β は相異なる 1 から $h+2$ までのいずれかの行番号である．この行列式は式 (16) あるいは式 (17) の行列式で，第 $h+1$ 列と第 $h+2$ 列を取り除き，さらに第 α 行と第 β 行を取り除いて作った h 次行列式である．特に，$A_{h+1,h+2} = A_h$ である．式 (18) と式 (19) を $h+1$ 列で展開すると，

$$t_{11} = A_{h+1,h+2}a_{h+1,h+1} + \sum_{\alpha=1}^{h}(-1)^{h+1-\alpha}A_{\alpha,h+2}a_{\alpha,h+1} \tag{21}$$

$$t_{12} = A_{h+1,h+2}a_{h+2,h+1} + \sum_{\alpha=1}^{h}(-1)^{h+1-\alpha}A_{\alpha,h+1}a_{\alpha,h+1} \tag{22}$$

$$t_{21} = A_{h+1,h+2}a_{h+1,h+2} + \sum_{\beta=1}^{h}(-1)^{h+1-\beta}A_{\beta,h+2}a_{\beta,h+2} \tag{23}$$

$$t_{22} = A_{h+1,h+2}a_{h+2,h+2} + \sum_{\beta=1}^{h}(-1)^{h+1-\beta}A_{\beta,h+1}a_{\beta,h+2} \tag{24}$$

であるから，

$$\begin{aligned} M_1^{(2)} &= t_{11}t_{22} - t_{12}t_{21} \\ &= A_{h+1,h+2}^2 a_{h+1,h+1}a_{h+2,h+2} \\ &+ \sum_{\beta=1}^{h}(-1)^{h+1-\beta}A_{h+1,h+2}A_{\beta,h+1}a_{\beta,h+2}a_{h+1,h+1} + \sum_{\alpha=1}^{h}(-1)^{h+1-\alpha}A_{h+1,h+2}A_{\alpha,h+2}a_{\alpha,h+1}a_{h+2,h+2} \\ &+ \sum_{\alpha,\beta=1}^{h}(-1)^{\alpha+\beta}A_{\alpha,h+2}A_{\beta,h+1}a_{\alpha,h+1}a_{\beta,h+2} \\ &- A_{h+1,h+2}^2 a_{h+2,h+1}a_{h+1,h+2} \\ &- \sum_{\beta=1}^{h}(-1)^{h+1-\beta}A_{h+1,h+2}A_{\beta,h+2}a_{\beta,h+2}a_{h+2,h+1} - \sum_{\alpha=1}^{h}(-1)^{h+1-\alpha}A_{h+1,h+2}A_{\alpha,h+1}a_{\alpha,h+1}a_{h+1,h+2} \\ &- \sum_{\alpha,\beta=1}^{h}(-1)^{\alpha+\beta}A_{\alpha,h+1}A_{\beta,h+2}a_{\alpha,h+1}a_{\beta,h+2} \end{aligned} \tag{25}$$

となる．ここで，$A_{h+1,h+2} = A_h$ とおく．さらに，第 4 項と第 8 項を見ると，α と β 両方に関する総和の部分は，$\alpha = \beta$ の場合に相殺する．また，総和を $\alpha < \beta$ に限ると，$\beta < \alpha$ の部分は α と β を交換して加えること

になる．したがって，第 4 項と第 8 項を抜き出すと，

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\substack{\alpha,\beta=1\\ \alpha\neq\beta}}^{h}(-1)^{\alpha+\beta}A_{\alpha,h+2}A_{\beta,h+1}a_{\alpha,h+1}a_{\beta,h+2}-\sum_{\substack{\alpha,\beta=1\\ \alpha\neq\beta}}^{h}(-1)^{\alpha+\beta}A_{\alpha,h+1}A_{\beta,h+2}a_{\alpha,h+1}a_{\beta,h+2}\\
&=\sum_{\alpha<\beta}^{h}(-1)^{\alpha+\beta}(A_{\alpha,h+2}A_{\beta,h+1}a_{\alpha,h+1}a_{\beta,h+2}+A_{\beta,h+2}A_{\alpha,h+1}a_{\beta,h+1}a_{\alpha,h+2})\\
&-\sum_{\alpha<\beta}^{h}(-1)^{\alpha+\beta}(A_{\alpha,h+1}A_{\beta,h+2}a_{\alpha,h+1}a_{\beta,h+2}+A_{\beta,h+1}A_{\alpha,h+2}a_{\beta,h+1}a_{\alpha,h+2})\\
&=\sum_{\alpha<\beta}^{h}(-1)^{\alpha+\beta}(A_{\alpha,h+2}A_{\beta,h+1}-A_{\alpha,h+1}A_{\beta,h+2})\begin{vmatrix}a_{\alpha,h+1} & a_{\alpha,h+2}\\ a_{\beta,h+1} & a_{\beta,h+2}\end{vmatrix}.
\end{aligned}
\tag{26}
$$

となることがわかる．ここで，行列式の積の公式 [2] を用いると，

$$
A_{\alpha,h+1}A_{\beta,h+2}-A_{\alpha,h+2}A_{\beta,h+1}=A_{\alpha,\beta}A_{h+1,h+2} \tag{27}
$$

であるから，これを代入すると式 (26) は

$$
\sum_{\alpha<\beta}^{h}(-1)^{\alpha+\beta+1}A_{\alpha,\beta}A_{h+1,h+2}\begin{vmatrix}a_{\alpha,h+1} & a_{\alpha,h+2}\\ a_{\beta,h+1} & a_{\beta,h+2}\end{vmatrix}=A_h\sum_{\alpha<\beta}^{h}(-1)^{\alpha+\beta+1}A_{\alpha,\beta}\begin{vmatrix}a_{\alpha,h+1} & a_{\alpha,h+2}\\ a_{\beta,h+1} & a_{\beta,h+2}\end{vmatrix} \tag{28}
$$

となる．

次に，総和の変数名を変えても式の中身は変わらないから，第 6 項の β を α に，第 7 項の α を β に変える．第 3 項と第 6 項を取り出して加えると，

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\alpha=1}^{h}(-1)^{h+1-\alpha}A_{h+1,h+2}A_{\alpha,h+2}a_{\alpha,h+1}a_{h+2,h+2}-\sum_{\alpha=1}^{h}(-1)^{h+1-\alpha}A_{h+1,h+2}A_{\alpha,h+2}a_{\alpha,h+2}a_{h+2,h+1}\\
=&A_h\sum_{\alpha=1}^{h}(-1)^{h+1-\alpha}A_{\alpha,h+2}(a_{\alpha,h+1}a_{h+2,h+2}-a_{\alpha,h+2}a_{h+2,h+1})\\
=&A_h\sum_{\alpha=1}^{h}(-1)^{h+1-\alpha}A_{\alpha,h+2}\begin{vmatrix}a_{\alpha,h+1} & a_{\alpha,h+2}\\ a_{h+2,h+1} & a_{h+2,h+2}\end{vmatrix}
\end{aligned}
\tag{29}
$$

となる．

第 2 項と第 7 項についても同様にして，

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\beta=1}^{h}(-1)^{h+1-\beta}A_{h+1,h+2}A_{\beta,h+1}a_{\beta,h+2}a_{h+1,h+1}-\sum_{\alpha=1}^{h}(-1)^{h+1-\alpha}A_{h+1,h+2}A_{\beta,h+1}a_{\beta,h+1}a_{h+1,h+2}\\
=&A_h\sum_{\beta=1}^{h}(-1)^{h+1-\beta}A_{\beta,h+1}\begin{vmatrix}a_{h+1,h+1} & a_{h+1,h+2}\\ a_{\beta,h+1} & a_{\beta,h+2}\end{vmatrix}
\end{aligned}
\tag{30}
$$

となる．

最後に第 1 項と第 5 項は,

$$
A_{h+1,h+2}^2a_{h+1,h+1}a_{h+2,h+2}-A_{h+1,h+2}^2a_{h+2,h+1}a_{h+1,h+2}=A_h^2\begin{vmatrix}a_{h+1,h+1} & a_{h+1,h+2}\\ a_{h+2,h+1} & a_{h+2,h+2}\end{vmatrix} \tag{31}
$$

となる．

以上の式 (28) から式 (31) を加えたものは，A を $h+1$ 列と $h+2$ 列で展開した式に A_h を掛けたものに等しい．このことは，次の A を第 $h+1$ 列と第 $h+2$ 列の 2 行を用いて展開した式と比較すれば明らかである．この式で，第 1 式は一般の展開公式そのままで，次の式は，総和が $1 \sim h+2$ から 2 個取る組合わせの全てに関するものであるから，それを 1 から h の中から 2 個の場合，1 から h の中から 1 個と $h+1$ の場合，1 から h の中から 1 個と $h+2$ の場合，および $h+1$ と $h+2$ の場合の 4 つの場合に分けたときの式である．

$$\begin{aligned}
A &= \sum_{\alpha<\beta}^{h+2} (-1)^{\alpha+\beta+1} A_{\alpha,\beta} \begin{vmatrix} a_{\alpha,h+1} & a_{\alpha,h+2} \\ a_{\beta,h+1} & a_{\beta,h+2} \end{vmatrix} \\
&= \sum_{\alpha<\beta}^{h} (-1)^{\alpha+\beta+1} A_{\alpha,\beta} \begin{vmatrix} a_{\alpha,h+1} & a_{\alpha,h+2} \\ a_{\beta,h+1} & a_{\beta,h+2} \end{vmatrix} + \sum_{\alpha=1}^{h} (-1)^{\alpha+h+1} A_{\alpha,h+2} \begin{vmatrix} a_{\alpha,h+1} & a_{\alpha,h+2} \\ a_{h+2,h+1} & a_{h+2,h+2} \end{vmatrix} \\
&+ \sum_{\beta=1}^{h} (-1)^{h+1+\beta} A_{h+1,\beta} \begin{vmatrix} a_{h+1,h+1} & a_{h+1,h+2} \\ a_{\beta,h+1} & a_{\beta,h+2} \end{vmatrix} + A_{h+1,h+2} \begin{vmatrix} a_{h+1,h+1} & a_{h+1,h+2} \\ a_{h+2,h+1} & a_{h+2,h+2} \end{vmatrix}
\end{aligned} \tag{32}$$

したがって，

$$M_1^{(2)} = A_h A \tag{33}$$

となる．これは，$n=2$，$m=1$ の場合の式 (4) である．

5.3 具体例 2　$n=3$，$m=1$ の場合

求める式は，

$$M_1^{(3)} = \begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{vmatrix} \tag{34}$$

である．ここで，t_{ij} は以下の幅 1 の縁付き行列式である．

$$t_{11} = \left|\begin{array}{ccc|c|c|c} & & & a_{1,h+1} & 0 & 0 \\ & A_h & & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & a_{h,h+1} & 0 & 0 \\ \hline a_{h+1,1} & \cdots & a_{h+1,h} & a_{h+1,h+1} & 0 & 0 \\ \hline a_{h+2,1} & \cdots & a_{h+2,h} & a_{h+2,h+1} & 1 & 0 \\ \hline a_{h+3,1} & \cdots & a_{h+3,h} & a_{h+3,h+1} & 0 & 1 \end{array}\right|, \quad t_{12} = \left|\begin{array}{ccc|c|c|c} & & & 0 & a_{1,h+1} & 0 \\ & A_h & & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & 0 & a_{h,h+1} & 0 \\ \hline a_{h+1,1} & \cdots & a_{h+1,h} & 1 & a_{h+1,h+1} & 0 \\ \hline a_{h+2,1} & \cdots & a_{h+2,h} & 0 & a_{h+2,h+1} & 0 \\ \hline a_{h+3,1} & \cdots & a_{h+3,h} & 0 & a_{h+3,h+1} & 1 \end{array}\right|,$$

$$t_{13} = \left|\begin{array}{ccc|c|c|c} & & & 0 & 0 & a_{1,h+1} \\ & A_h & & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & 0 & 0 & a_{h,h+1} \\ \hline a_{h+1,1} & \cdots & a_{h+1,h} & 1 & 0 & a_{h+1,h+1} \\ \hline a_{h+2,1} & \cdots & a_{h+2,h} & 0 & 1 & a_{h+2,h+1} \\ \hline a_{h+3,1} & \cdots & a_{h+3,h} & 0 & 0 & a_{h+3,h+1} \end{array}\right|,$$

$$
t_{21} = \left|\begin{array}{ccc:c:c:c}
 & A_h & & \begin{matrix} a_{1,h+2} \\ \vdots \\ a_{h,h+2} \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ \hdashline
a_{h+1,1} & \cdots & a_{h+1,h} & a_{h+1,h+2} & 0 & 0 \\ \hdashline
a_{h+2,1} & \cdots & a_{h+2,h} & a_{h+2,h+2} & 1 & 0 \\ \hdashline
a_{h+3,1} & \cdots & a_{h+3,h} & a_{h+3,h+2} & 0 & 1
\end{array}\right|, \quad
t_{22} = \left|\begin{array}{ccc:c:c:c}
 & A_h & & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} a_{1,h+2} \\ \vdots \\ a_{h,h+2} \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ \hdashline
a_{h+1,1} & \cdots & a_{h+1,h} & 1 & a_{h+1,h+2} & 0 \\ \hdashline
a_{h+2,1} & \cdots & a_{h+2,h} & 0 & a_{h+2,h+2} & 0 \\ \hdashline
a_{h+3,1} & \cdots & a_{h+3,h} & 0 & a_{h+3,h+2} & 1
\end{array}\right|,
$$

$$
t_{23} = \left|\begin{array}{ccc:c:c:c}
 & A_h & & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} a_{1,h+2} \\ \vdots \\ a_{h,h+2} \end{matrix} \\ \hdashline
a_{h+1,1} & \cdots & a_{h+1,h} & 1 & 0 & a_{h+1,h+2} \\ \hdashline
a_{h+2,1} & \cdots & a_{h+2,h} & 0 & 1 & a_{h+2,h+2} \\ \hdashline
a_{h+3,1} & \cdots & a_{h+3,h} & 0 & 0 & a_{h+3,h+2}
\end{array}\right|, \tag{35}
$$

$$
t_{31} = \left|\begin{array}{ccc:c:c:c}
 & A_h & & \begin{matrix} a_{1,h+3} \\ \vdots \\ a_{h,h+3} \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ \hdashline
a_{h+1,1} & \cdots & a_{h+1,h} & a_{h+1,h+3} & 0 & 0 \\ \hdashline
a_{h+2,1} & \cdots & a_{h+2,h} & a_{h+2,h+3} & 1 & 0 \\ \hdashline
a_{h+3,1} & \cdots & a_{h+3,h} & a_{h+3,h+3} & 0 & 1
\end{array}\right|, \quad
t_{32} = \left|\begin{array}{ccc:c:c:c}
 & A_h & & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} a_{1,h+3} \\ \vdots \\ a_{h,h+3} \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ \hdashline
a_{h+1,1} & \cdots & a_{h+1,h} & 1 & a_{h+1,h+3} & 0 \\ \hdashline
a_{h+2,1} & \cdots & a_{h+2,h} & 0 & a_{h+2,h+3} & 0 \\ \hdashline
a_{h+3,1} & \cdots & a_{h+3,h} & 0 & a_{h+3,h+3} & 1
\end{array}\right|,
$$

$$
t_{33} = \left|\begin{array}{ccc:c:c:c}
 & A_h & & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} a_{1,h+3} \\ \vdots \\ a_{h,h+3} \end{matrix} \\ \hdashline
a_{h+1,1} & \cdots & a_{h+1,h} & 1 & 0 & a_{h+1,h+3} \\ \hdashline
a_{h+2,1} & \cdots & a_{h+2,h} & 0 & 1 & a_{h+2,h+3} \\ \hdashline
a_{h+3,1} & \cdots & a_{h+3,h} & 0 & 0 & a_{h+3,h+3}
\end{array}\right|.
$$

t_{ij} は，式 (8) の A_h の第 j 列を A の第 i 列で置き換えた行列式である．式 (34) を第 3 列で展開すると，

$$
M_1^{(3)} = \begin{vmatrix} t_{21} & t_{22} \\ t_{31} & t_{32} \end{vmatrix} t_{13} - \begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{31} & t_{32} \end{vmatrix} t_{23} + \begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{vmatrix} t_{33} \tag{36}
$$

となる．ここで，式 (36) の第 1 項の行列式の部分に着目すると，この行列式の成分は，式 (35) で単位列ベクトルの部分で行列式を 2 回展開するとわかるように，幅 1 の縁付き行列式である．かつ，列には A の $h+2$ 列と $h+3$ 列を使い，行には A の $h+1$ 行と $h+2$ 行を使っているので，この 4 種類の幅 1 の縁付き行列式は，$h+3$ 次行列式である A から $h+1$ 列と $h+3$ 行を取り除いた $h+2$ 次小行列式を新たな A として，そこから式 (7) に従って作られる 4 つの幅 1 の縁付き行列式に等しいということがわかる．したがって，それを成分とする式 (36) の第 1 項の行列式は式 (4) で定義されている複合行列式である．この複合行列式の結果は式 (7) であり，これから証明するものであるが，$n=2$，$m=1$ の場合は 5.2 節ですでに示されている．したがって，その場合の式 (33) を適用すると次式になる．

$$
\begin{vmatrix} t_{21} & t_{22} \\ t_{31} & t_{32} \end{vmatrix} = A_h \left|\begin{array}{ccc:c:c}
 & A_h & & \begin{matrix} a_{1,h+2} \\ \vdots \\ a_{h,h+2} \end{matrix} & \begin{matrix} a_{1,h+3} \\ \vdots \\ a_{h,h+3} \end{matrix} \\ \hdashline
a_{h+1,1} & \cdots & a_{h+1,h} & a_{h+1,h+2} & a_{h+1,h+3} \\ \hdashline
a_{h+2,1} & \cdots & a_{h+2,h} & a_{h+2,h+2} & a_{h+2,h+3}
\end{array}\right|, \tag{37a}
$$

他の項も同様にして，

$$
\begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{31} & t_{32} \end{vmatrix} = A_h \left| \begin{array}{ccc|c|c} & & & a_{1,h+1} & a_{1,h+3} \\ & A_h & & \vdots & \vdots \\ & & & a_{h,h+1} & a_{h,h+3} \\ \hline a_{h+1,1} & \cdots & a_{h+1,h} & a_{h+1,h+1} & a_{h+1,h+3} \\ \hline a_{h+2,1} & \cdots & a_{h+2,h} & a_{h+2,h+1} & a_{h+2,h+3} \end{array} \right|, \tag{37b}
$$

$$
\begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{vmatrix} = A_h \left| \begin{array}{ccc|c|c} & & & a_{1,h+1} & a_{1,h+2} \\ & A_h & & \vdots & \vdots \\ & & & a_{h,h+1} & a_{h,h+2} \\ \hline a_{h+1,1} & \cdots & a_{h+1,h} & a_{h+1,h+1} & a_{h+1,h+2} \\ \hline a_{h+2,1} & \cdots & a_{h+2,h} & a_{h+2,h+1} & a_{h+2,h+2} \end{array} \right|. \tag{37c}
$$

となる．

一方，式 (35) から，

$$
t_{13} = \left| \begin{array}{ccc|c} & & & a_{1,h+1} \\ & A_h & & \vdots \\ & & & a_{h,h+1} \\ \hline a_{h+3,1} & \cdots & a_{h+3,h} & a_{h+3,h+1} \end{array} \right|, \tag{38a}
$$

$$
t_{23} = \left| \begin{array}{ccc|c} & & & a_{1,h+2} \\ & A_h & & \vdots \\ & & & a_{h,h+2} \\ \hline a_{h+3,1} & \cdots & a_{h+3,h} & a_{h+3,h+2} \end{array} \right|, \tag{38b}
$$

$$
t_{33} = \left| \begin{array}{ccc|c} & & & a_{1,h+3} \\ & A_h & & \vdots \\ & & & a_{h,h+3} \\ \hline a_{h+3,1} & \cdots & a_{h+3,h} & a_{h+3,h+3} \end{array} \right| \tag{38c}
$$

となる．式 (37) の 3 つの行列式は最後の 2 列を用いて展開することができる [4]．1 つ目の行列式は，

$$
\sum_{\beta<\gamma}^{h+2} A_{\beta,\gamma;h+3} \begin{vmatrix} a_{\beta,h+2} & a_{\beta,h+3} \\ a_{\gamma,h+2} & a_{\gamma,h+3} \end{vmatrix} (-1)^{[(\beta-1)+(\gamma-2)]} \tag{39}
$$

となる．この式の $A_{\beta,\gamma;h+3}$ は，式 (8) の第 1 行から第 $h+3$ 行まで，および第 1 列から第 h 列までを取り出した行列式から，第 β 行，第 γ 行，および第 $h+3$ 行を除いた h 次行列式である．下付き添字は取り除く行を表している．総和は，$\{1, 2, \cdots, h+2\}$ から $\beta < \gamma$ となる 2 つの異なる整数 β と γ の組み合わせを取り出し，その全ての組み合わせについて総和をとることを意味する．各項の符号は，「行列式展開の一般式」[3] ですでに説明した通りである．他の 2 つの行列式についても，

$$
\sum_{\beta<\gamma}^{h+2} A_{\beta,\gamma;h+3} \begin{vmatrix} a_{\beta,h+1} & a_{\beta,h+3} \\ a_{\gamma,h+1} & a_{\gamma,h+3} \end{vmatrix} (-1)^{[(\beta-1)+(\gamma-2)]} \tag{40}
$$

$$
\sum_{\beta<\gamma}^{h+2} A_{\beta,\gamma;h+3} \begin{vmatrix} a_{\beta,h+1} & a_{\beta,h+2} \\ a_{\gamma,h+1} & a_{\gamma,h+2} \end{vmatrix} (-1)^{[(\beta-1)+(\gamma-2)]} \tag{41}
$$

となる．

次に，式 (38c) で第 3 列で行列式を展開すると，

$$t_{13} = \sum_{\substack{\alpha=1\\ \neq h+1,h+2}}^{h+3} A_{\alpha;h+1,h+2}\, a_{\alpha,h+1}(-1)^{(\alpha-1)+h} \tag{42}$$

$$t_{23} = \sum_{\substack{\alpha=1\\ \neq h+1,h+2}}^{h+3} A_{\alpha;h+1,h+2}\, a_{\alpha,h+2}(-1)^{(\alpha-1)+h} \tag{43}$$

$$t_{33} = \sum_{\substack{\alpha=1\\ \neq h+1,h+2}}^{h+3} A_{\alpha;h+1,h+2}\, a_{\alpha,h+3}(-1)^{(\alpha-1)+h} \tag{44}$$

となる．ここでも，$A_{\alpha;h+1,h+2}$ は同じ意味である．

式 (39) から式 (44) を式 (36) に代入すると，

$$\begin{aligned}
&M_1^{(3)}A_h^{-1} = \\
&\left[\sum_{\beta<\gamma}^{h+2} A_{\beta,\gamma;h+3} \begin{vmatrix} a_{\beta,h+2} & a_{\beta,h+3} \\ a_{\gamma,h+2} & a_{\gamma,h+3} \end{vmatrix} (-1)^{[(\beta-1)+(\gamma-2)]}\right] \left[\sum_{\substack{\alpha=1\\ \neq h+1,h+2}}^{h+3} A_{\alpha;h+1,h+2}\, a_{\alpha,h+1}(-1)^{(\alpha-1)+h}\right] \\
&- \left[\sum_{\beta<\gamma}^{h+2} A_{\beta,\gamma;h+3} \begin{vmatrix} a_{\beta,h+1} & a_{\beta,h+3} \\ a_{\gamma,h+1} & a_{\gamma,h+3} \end{vmatrix} (-1)^{[(\beta-1)+(\gamma-2)]}\right] \left[\sum_{\substack{\alpha=1\\ \neq h+1,h+2}}^{h+3} A_{\alpha;h+1,h+2}\, a_{\alpha,h+2}(-1)^{(\alpha-1)+h}\right] \\
&+ \left[\sum_{\beta<\gamma}^{h+2} A_{\beta,\gamma;h+3} \begin{vmatrix} a_{\beta,h+1} & a_{\beta,h+2} \\ a_{\gamma,h+1} & a_{\gamma,h+2} \end{vmatrix} (-1)^{[(\beta-1)+(\gamma-2)]}\right] \left[\sum_{\substack{\alpha=1\\ \neq h+1,h+2}}^{h+3} A_{\alpha;h+1,h+2}\, a_{\alpha,h+3}(-1)^{(\alpha-1)+h}\right] \\
&= \sum_{\beta<\gamma}^{h+2} \sum_{\substack{\alpha=1\\ \neq h+1,h+2}}^{h+3} A_{\beta,\gamma;h+3}\, A_{\alpha;h+1,h+2} \begin{vmatrix} a_{\beta,h+2} & a_{\beta,h+3} \\ a_{\gamma,h+2} & a_{\gamma,h+3} \end{vmatrix} a_{\alpha,h+1}(-1)^{[(\beta-1)+(\gamma-2)]+(\alpha-1)+h} \\
&- \sum_{\beta<\gamma}^{h+2} \sum_{\substack{\alpha=1\\ \neq h+1,h+2}}^{h+3} A_{\beta,\gamma;h+3}\, A_{\alpha;h+1,h+2} \begin{vmatrix} a_{\beta,h+1} & a_{\beta,h+3} \\ a_{\gamma,h+1} & a_{\gamma,h+3} \end{vmatrix} a_{\alpha,h+2}(-1)^{[(\beta-1)+(\gamma-2)]+(\alpha-1)+h} \\
&+ \sum_{\beta<\gamma}^{h+2} \sum_{\substack{\alpha=1\\ \neq h+1,h+2}}^{h+3} A_{\beta,\gamma;h+3}\, A_{\alpha;h+1,h+2} \begin{vmatrix} a_{\beta,h+1} & a_{\beta,h+2} \\ a_{\gamma,h+1} & a_{\gamma,h+2} \end{vmatrix} a_{\alpha,h+3}(-1)^{\alpha+\beta+\gamma+h} \\
&= \sum_{\beta<\gamma}^{h+2} \sum_{\substack{\alpha=1\\ \neq h+1,h+2}}^{h+3} A_{\beta,\gamma;h+3}\, A_{\alpha;h+1,h+2}\, (-1)^{[(\beta-1)+(\gamma-2)]+(\alpha-1)+h} \\
&\quad \times \left[\begin{vmatrix} a_{\beta,h+2} & a_{\beta,h+3} \\ a_{\gamma,h+2} & a_{\gamma,h+3} \end{vmatrix} a_{\alpha,h+1} - \begin{vmatrix} a_{\beta,h+1} & a_{\beta,h+3} \\ a_{\gamma,h+1} & a_{\gamma,h+3} \end{vmatrix} a_{\alpha,h+2} + \begin{vmatrix} a_{\beta,h+1} & a_{\beta,h+2} \\ a_{\gamma,h+1} & a_{\gamma,h+2} \end{vmatrix} a_{\alpha,h+3}\right]
\end{aligned} \tag{45}$$

となる．ここで，

$$\begin{vmatrix} a_{\alpha,h+1} & a_{\alpha,h+2} & a_{\alpha,h+3} \\ a_{\beta,h+1} & a_{\beta,h+2} & a_{\beta,h+3} \\ a_{\gamma,h+1} & a_{\gamma,h+2} & a_{\gamma,h+3} \end{vmatrix} = a_{\alpha,h+1} \begin{vmatrix} a_{\beta,h+2} & a_{\beta,h+3} \\ a_{\gamma,h+2} & a_{\gamma,h+3} \end{vmatrix} - a_{\alpha,h+2} \begin{vmatrix} a_{\beta,h+1} & a_{\beta,h+3} \\ a_{\gamma,h+1} & a_{\gamma,h+3} \end{vmatrix} + a_{\alpha,h+3} \begin{vmatrix} a_{\beta,h+1} & a_{\beta,h+2} \\ a_{\gamma,h+1} & a_{\gamma,h+2} \end{vmatrix} \tag{46}$$

であるから，式 (45) は,

$$M_1^{(3)} A_h^{-1} = \sum_{\beta<\gamma}^{h+2} \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \neq h+1,h+2}}^{h+3} A_{\beta,\gamma,h+3}\, A_{\alpha,h+1,h+2} \begin{vmatrix} a_{\alpha,h+1} & a_{\alpha,h+2} & a_{\alpha,h+3} \\ a_{\beta,h+1} & a_{\beta,h+2} & a_{\beta,h+3} \\ a_{\gamma,h+1} & a_{\gamma,h+2} & a_{\gamma,h+3} \end{vmatrix} (-1)^{\alpha+\beta+\gamma+h} \tag{47}$$

となる．この式で，α が β もしくは γ に等しい場合は行列式が 0 になるので，総和は異なる 3 つの整数の選び方になる．いま，α_1，β_1，は γ_1 を 3 つの異なる整数とし，$\alpha_1 < \beta_1 < \gamma_1$ とする．

(1) $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1 \leq h$ の場合

まず最初に，$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1 \leq h$ の場合を考える．このとき，α が取ることのできる整数は α_1，β_1，および γ_1 の 3 つの場合がある．一方，$\beta < \gamma$ であるから，それぞれの場合に残った 2 つの整数の中で大きいほうが γ である．これから，次の 3 通りの場合が考えられる．

	α	β	γ
Case 1	α_1	β_1	γ_1
Case 2	β_1	α_1	γ_1
Case 3	γ_1	α_1	β_1

(48)

したがって，1 から h までの中から 3 個の整数 α_1，β_1，γ_1 を選び，それを α，β，γ に対して表 (48) の 3 つの場合を考えれば式 (47) の α，β，γ に関する総和で h 以下の場合を全て網羅していることになる．

表 (48) で，Case 1 と Case 2 は α_1 と β_1 の互換で等しくなる．Case 1 と Case 3 では，γ_1 と α_1 の互換，次に γ_1 と β_1 の互換という計 2 回の互換で両者は等しくなる．したがって，式 (47) の行列式部分は Case 1 と Case 3 で等しく，Case 2 のみ符号が負になる．また，式 (47) の符号の部分は α，β，γ の対称式になっているので，互換をしてもこの部分の符号変化は起こらない．以上を考慮すると，表 (48) の 3 つの場合について式 (47) を足し合わせると，式 (47) の総和と符号を除いた部分は

$$(A_{\beta_1,\gamma_1,h+3}\, A_{\alpha_1,h+1,h+2} - A_{\alpha_1,\gamma_1,h+3}\, A_{\beta_1,h+1,h+2} + A_{\alpha_1,\beta_1,h+3}\, A_{\gamma_1,h+1,h+2}) \begin{vmatrix} a_{\alpha_1,h+1} & a_{\alpha_1,h+2} & a_{\alpha_1,h+3} \\ a_{\beta_1,h+1} & a_{\beta_1,h+2} & a_{\beta_1,h+3} \\ a_{\gamma_1,h+1} & a_{\gamma_1,h+2} & a_{\gamma_1,h+3} \end{vmatrix} \tag{49}$$

となる．一方,「行列式の積に関する定理」[4] から,

$$A_{i_2,i_3,j_3}\, A_{i_1,j,j_2} - A_{i_1,i_3,j_3}\, A_{i_2,j_1,j_2} + A_{i_1,i_2,j_3}\, A_{i_3,j_1,j_2} = A_{i_1,i_2,i_3}\, A_{j_1,j_2,j_3} \tag{50}$$

が成り立つので，これを式 (49) に適用すると次式を得る．

$$A_{\alpha_1,\beta_1,\gamma_1}\, A_h \begin{vmatrix} a_{\alpha_1,h+1} & a_{\alpha_1,h+2} & a_{\alpha_1,h+3} \\ a_{\beta_1,h+1} & a_{\beta_1,h+2} & a_{\beta_1,h+3} \\ a_{\gamma_1,h+1} & a_{\gamma_1,h+2} & a_{\gamma_1,h+3} \end{vmatrix} \tag{51}$$

ここで，$A_{h+1,h+2,h+3} = A_h$ の関係を用いた．したがって，式 (47) の総和部分と符号部分を除いた式は，$\alpha, \beta, \gamma \leq h$ の場合には式 (51) の形に変形できることがわかった．

一方，α, β, γ のうち少なくとも 1 つが h よりも大きい場合においても式 (47) の行列式の積の部分が式 (51) の形に変形できることを以下に示す．ただし，式 (51) の行列式の部分は以下の計算において共通項になるので省略する．

(2) α_1，β_1，γ_1 のうち 1 つが h よりも大きい場合

この場合は，$\alpha_1 < \beta_1 < \gamma_1$ であるから，γ_1 のみが h よりも大きい．

(i)　$\gamma_1 = h+3$ なら，式 (47) の α，β，γ に関する制限から，α のみがこの値を取り得て，表 (48) の Case 3 のみが該当する．このとき，式 (47) の $A_{\alpha;h+1,h+2}$ は A_h となり，$A_{\beta,\gamma,h+3}$ は $A_{\alpha_1,\beta_1,\gamma_1}$ となるので、式 (47) の該当部分は式 (51) の形になる．

(ii)　$\gamma_1 = h+2$ の場合，α 以外がこの値を取ることができる．一方，$\beta < \gamma$ であるから $\gamma = \gamma_1$ でなけらばならない．したがって，表 (48) の中の Case $1(\alpha = \alpha_1, \beta = \beta_1)$ と Case $2(\alpha = \beta_1, \beta = \alpha_1)$ の場合が可能である．この 2 つの場合について式 (47) を加え合わせると，次式の左辺になる．ただし，Case 2 の場合は式 (47) の行列式部分で α_1 の行と β_1 の行を互換したので符号が反転している．これに式 (27) を用いると，次式右辺になる．

$$\begin{aligned} A_{\beta_1,h+2,h+3}\,A_{\alpha_1,h+1,h+2} - A_{\alpha_1,h+2,h+3}\,A_{\beta_1,h+1,h+2} &= A_{\alpha_1,\beta_1,h+2}\,A_{h+1,h+2,h+3} \\ &= A_{\alpha_1,\beta_1,\gamma_1}\,A_h \end{aligned} \tag{52}$$

したがって，$\gamma_1 = h+2$ の場合も，式 (47) は式 (51) の形に変形できることがわかる．ただし上の式で，式 (27) を用いることができるのは，引数の $h+2$ が行列式因子の両方に共通しているので無視しても構わないからである．

(iii)　$\gamma_1 = h+1$ の場合，(ii) と同様にして，$\gamma = \gamma_1$ でなければならない．したがって，表 (48) の中の Case 1 と Case 2 の場合が可能である．後は同様にして，

$$\begin{aligned} A_{\beta_1,h+1,h+3}\,A_{\alpha_1,h+1,h+2} - A_{\alpha_1,h+1,h+3}\,A_{\beta_1,h+1,h+2} &= A_{\alpha_1,\beta_1,h+1}\,A_{h+1,h+2,h+3} \\ &= A_{\alpha_1,\beta_1,\gamma_1}\,A_h \end{aligned} \tag{53}$$

となり，(ii) と同じように式 (47) はｓ式 (51) の形に変形できることがわかる．

(3) α，β，γ のうち 2 つが h よりも大きい場合

この場合，その 2 つは β_1 と γ_1 でなければならず，(i) $\gamma_1 = h+3, \beta_1 = h+2$，(ii) $\gamma_1 = h+3, \beta_1 = h+1$，および (iii) $\gamma_1 = h+2, \beta_1 = h+1$ の 3 つの場合が該当する．

(i) の場合，$h+3$ をとれるのは α に限られるので式 (48) から $\alpha = \gamma_1 = h+3$，$\gamma = \beta_1 = h+2$ である．このとき，式 (47) の行列式の積は

$$A_{\alpha_1,\beta_1,h+3}\,A_{\gamma_1,h+1,h+2} = A_{\alpha_1,h+2,h+3}\,A_{h+1,h+2,h+3} = A_{\alpha_1,\beta_1,\gamma_1}\,A_h \tag{54}$$

となり，式 (51) の形になる．

(ii) の場合も上と同様に $\alpha = h+3 = \gamma_1$ でなければならず，そのときは $\gamma = \beta_1 = h+1$，$\beta = \alpha_1$ とすればよく，式 (47) の行列式の積は

$$A_{\alpha_1,\beta_1,h+3}\,A_{\gamma_1,h+1,h+2} = A_{\alpha_1,h+1,h+3}\,A_{h+1,h+2,h+3} = A_{\alpha_1,\beta_1,\gamma_1}\,A_h \tag{55}$$

となり，これも式 (51) の形になる．

(iii) の場合は，$\gamma = \gamma_1 = h+2, \beta = \beta_1 = h+1$ でなければならず，したがって，$\alpha = \alpha_1$ となり，式 (47) の行列式の積は

$$A_{\beta_1,\gamma_1,h+3}\,A_{\alpha_1,h+1,h+2} = A_{\alpha_1,h+1,h+2}\,A_{h+1,h+2,h+3} = A_{\alpha_1,\beta_1,\gamma_1}\,A_h \tag{56}$$

となり，これも式 (51) の形になっている．

(4) α，β，γ の 3 つとも h よりも大きい場合

式 (47) の Case 3 に限られ，$\alpha = \gamma_1 = h+3, \beta = \alpha_1 = h+1, \gamma = \beta_1 = h+2$ でなければならない．このとき，式 (47) の行列式の積は

$$A_{\alpha_1,\beta_1,h+3}\,A_{\gamma_1,h+1,h+2} = A_{h+1,h+2,h+3}\,A_{h+1,h+2,h+3} = A_h^2 = A_{\alpha_1,\beta_1,\gamma_1}\,A_h \tag{57}$$

となり，これも式 (51) の特別な場合である．

以上の計算において，α_1，β_1，γ_1 のうち少なくとも 1 つが h よりも大きい場合は全て，式 (47) において総和を α，β，γ から相異なる α_1，β_1，γ_1 に関するものとし，その総和の上限を $h+3$ にした場合に含まれ，かつ，ここであげた (1) から (4) の全ての場合は式 (47) で少なくとも 1 つが h よりも大きいという条件を網羅している．

したがって，以上の計算から，上限を $h+3$ にした $\alpha_1 < \beta_1 < \gamma_1$ となる 3 つの異なる α_1，β_1，γ_1 を選び，これを α，β，γ に割り振ることが可能な全ての場合について式 (47) の和を取れば，その結果は全て式 (51) の形になることがわかった．かつ，このような場合分けは式 (47) の総和の全ての場合を網羅している．したがって，このことは，式 (47) の総和される数式部分を符号を除いて式 (51) で置き換えて，総和を 1 から $h+3$ の範囲で $\alpha_1 < \beta_1 < \gamma_1$ を満たす α_1，β_1，γ_1 に関する総和で置き換えることができることを示す．そこで，式 (47) において，総和と符号部分を除いた数式部分を式 (51) で置き換え，α_1，β_1，γ_1 を改めて α，β，γ と書き換えて，総和の条件を 1 から $h+3$ までの $\alpha < \beta < \gamma$ を満たす 3 つの整数とする．

符号の部分に関しては，もともと α，β，γ に関して対称であることと，α_1，β_1，γ_1 は α，β，γ の置換であることから，ここは α，β，γ のままで構わない．

符号の部分は，さらに次のように変形することができる．

$$(-1)^{\alpha+\beta+\gamma+h} = (-1)^{[(\alpha-1)+(\beta-2)+(\gamma-3)]+[(h+1)-1+(h+2)-2+(h+3)-3]} \tag{58}$$

以上のことを全て合わせると式 (47) は次のように表すことができる．

$$M_1^{(3)} = A_h^2 \sum_{\alpha<\beta<\gamma}^{h+3} A_{\alpha,\beta,\gamma} \begin{vmatrix} a_{\alpha,h+1} & a_{\alpha,h+2} & a_{\alpha,h+3} \\ a_{\beta,h+1} & a_{\beta,h+2} & a_{\beta,h+3} \\ a_{\gamma,h+1} & a_{\gamma,h+2} & a_{\gamma,h+3} \end{vmatrix} (-1)^{(\alpha-1)+(\beta-2)+(\gamma-3)+(h+1)-1+(h+2)-2+(h+3)-3} \tag{59}$$

となる．この式で A_h^2 を除いた部分は A の第 $h+1$ 列から第 $h+3$ 列による展開式である [3]．したがって，

$$M_1^{(3)} = A_h^2 A \tag{60}$$

が成り立つ．これは式 (4) の $n=3$，$m=1$ の場合である．

5.4　$m=1$ の場合の一般式

$m=1$ の場合の一般式においても，$n=3$ と同じ方法で証明することができる．ここでは数学的帰納法を用いる．すでに $n=1$ の場合は最初から幅 1 の縁がついている行列式そのものであるから，式 (4) は $M_1^{(1)} = A$ となり，そのまま成り立つ．$n=2$ と $n=3$ の場合は前節と前前節ですでに示された．以下では，$n-1$ の場合が成り立つと仮定して，n の場合の式を導出する．

まず，計算する式を以下に示す．

$$M_1^{(n)} = \begin{vmatrix} t_{11} & \cdots & t_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1} & \cdots & t_{nn} \end{vmatrix}, \tag{61}$$

$$
t_{ij}=\left|\begin{array}{ccc:c:c:c:c:c}
 & & & 0 & 0 & a_{1,h+i} & 0 & 0\\
 & A_h & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
 & & & 0 & 0 & a_{h,h+i} & 0 & 0\\ \hdashline
a_{h+1,1} & \cdots & a_{h+1,h} & 1 & 0 & a_{h+1,h+i} & 0 & 0\\ \hdashline
\vdots & \cdots & \vdots & 0 & 1 & \vdots & 0 & 0\\ \hdashline
a_{h+j,1} & \cdots & a_{h+1,h} & 0 & 0 & a_{h+j,h+i} & 0 & 0\\ \hdashline
\vdots & \cdots & \vdots & 0 & 0 & \vdots & 1 & 0\\ \hdashline
a_{h+n,1} & \cdots & a_{h+n,h} & 0 & 0 & a_{h+n,h+i} & 0 & 1
\end{array}\right|, \tag{62}
$$

式 (62) は，$h+1$ 列以降の単位列ベクトルで展開すれば式 (5) の c_{ik} と一致する．

式 (61) の第 i 行と第 n 列を除いた $n-1$ 次複合行列式を T_i とする．すなわち，

$$
T_i=\left|\begin{array}{ccc}
t_{11} & \cdots & t_{1,n-1}\\
\vdots & \ddots & \vdots\\
t_{i-1,1} & \cdots & t_{i-1,n-1}\\
t_{i+1,1} & \cdots & t_{i+1,n-1}\\
\vdots & \ddots & \vdots\\
t_{n,1} & \cdots & t_{n,n-1}
\end{array}\right|, \text{である．} \tag{63}
$$

このとき，式 (61) の $M_1^{(n)}$ を第 n 列で展開し，T_i を用いて表すと，

$$
M_1^{(n)}=\sum_{i=1}^{n} T_i t_{in}\,(-1)^{n-i} \tag{64}
$$

となる．T_i は $n-1$ 次の複合行列式で，その成分には $t_{ik}\ (k=1,2,\cdots,n)$ と $t_{jn}\ (j=1,2,\cdots,n)$ がない．今の場合，$m=1$ であるから，n から 1 個を選ぶ組み合わせを，自然に考えて，i 番目の組み合わせを i としても構わないから，そうすると，t_{ik} の k は置き換えられる列番号であり，$k=n$ の場合は第 n 列が A の第 i 列で置き換えられることになる．したがって，T_i に残った全ての t_{jk} では $k<n$ であるから第 n 列は置き換えられておらず，これらの t_{jk} は，$h+n$ 次の行列式で，$a_{j,h+n}=0,(j=1,\cdots,h+n-1)$ および $a_{h+n,h+n}=1$ である．したがって，t_{jk} を第 $h+n$ 列で展開すると，t_{jk} から第 $h+n$ 行と第 $h+n$ 列を除いた $h+n-1$ 次小行列式が残る．このことは，t_{jk} が，A から第 $h+n$ 行と第 $h+n$ 列を除いた $h+n-1$ 次小行列式から作られる小行列式であることを意味する．つまり，それは A_h に付加された幅 1 の縁付き行列式であり，その縁は，残された $h+n-1$ 行列式の A_h 以外の行および列からなる．すなわち，T_i はそのような全ての小行列式を成分とする $n-1$ 次の複合行列式である．したがって，式 (4) より，帰納法の仮定から

$$
T_i=A_h^{n-1}\left|\begin{array}{ccc|c:c:c:c:c:c}
 & & & a_{1,h+1} & \cdots & a_{1,h+i-1} & a_{1,h+i+1} & \cdots & a_{1,h+n}\\
 & A_h & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
 & & & a_{h,h+1} & \cdots & a_{h,h+i-1} & a_{h,h+i+1} & \cdots & a_{h,h+n}\\ \hline
a_{h+1,1} & \cdots & a_{h+1,h} & a_{h+1,h+1} & \cdots & a_{h+1,h+i-1} & a_{h+1,h+i+1} & \cdots & a_{h+1,h+n}\\ \hdashline
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \hdashline
a_{h+n-1,1} & \cdots & a_{h+n-1,h} & a_{h+n-1,h+1} & \cdots & a_{h+n-1,h+i-1} & a_{h+n-1,h+i+1} & \cdots & a_{h+n-1,h+n}
\end{array}\right| \tag{65}
$$

とすることができる．T_i には t_{ik} が抜けているので，A の第 $h+i$ 列成分がない．t_{ik} で k は n をとれないが，i は n をとることができる．したがって，A の第 $h+n$ 列成分を含むことはあるが，A の第 $h+n$ 行を含むこ

とはない．この行列式 T_i を第 $h+1$ 列から第 $h+n$ 列の $n-1$ 列を用いて展開すると，

$$T_i = A_h^{n-2} \sum_{\beta<\gamma<\cdots<\mu}^{h+n-1} A_{\beta,\gamma,\cdots,\mu,h+n} \begin{vmatrix} a_{\beta,h+1} & \cdots & a_{\beta,h+i-1} & a_{\beta,h+i+1} & \cdots & a_{\beta,h+n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & & & \\ a_{\mu,h+1} & \cdots & a_{\mu,h+i-1} & a_{\mu,h+i+1} & \cdots & a_{\mu,h+n} \end{vmatrix}$$
$$\times (-1)^{[(h+n-1)-\mu]+\cdots+[(h+n-1)-(\gamma-n+3)]+[(h+n-1)-(\beta-n+2)} \tag{66}$$

となる．ただし，$\beta,\gamma,\cdots,\mu$ は $1,\cdots,h+n$ において i を除いた $h+n-1$ 個の整数の集合から選んだ $\beta<\gamma<\cdots<\mu$ を満足する $n-1$ 個の異なる整数の組である．符号の決め方は「行列式展開の一般式」[3] に記載されている．$A_{\beta,\gamma,\cdots,\mu,h+n}$ は式 (8) の A_h において，第 h+1 列から第 $h+n$ 列までを取り除き，さらにそこから $\beta,\gamma,\cdots,\mu$ の各行と第 $h+n$ 行を取り除いた h 次行列式である．

次に，式 (64) の t_{in} を展開する．t_{in} の第 $h+1$ 列から第 $h+n-1$ 列までは対角成分のみが 1 でそれ以外は 0 である．また，第 $h+n$ 列には A の $h+i$ 列が入っている．したがって，第 $h+1$ 列から第 $h+n-1$ 列まで各列による行列式の展開を順次進めていくと，対角成分の 1 がある行と列が順次取り除かれて，最後に A_h と第 $h+n$ 列および第 $h+n$ 行が残る．これは，A_h に幅 1 の縁を付けた $h+1$ 次縁付き行列式である．したがって，これを展開すると，

$$t_{in} = \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha\neq h+1,h+2,\cdots,h+n-1}}^{h+n} a_{\alpha,h+i} A_{\alpha,h+1,h+2,\cdots,h+n-1} (-1)^{(h+1)-\alpha} \tag{67}$$

となる．

式 (66) と式 (67) を式 (64) に代入すると，

$$M_1^{(n)} = A_h^{n-2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{\beta<\gamma<\cdots<\mu}^{h+n-1} \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha\neq h+1,h+2,\cdots,h+n-1}}^{h+n} A_{\beta,\gamma,\cdots,\mu,h+n} A_{\alpha,h+1,h+2,\cdots,h+n-1}$$
$$\times a_{\alpha,h+i} \begin{vmatrix} a_{\beta,h+1} & \cdots & a_{\beta,h+i-1} & a_{\beta,h+i+1} & \cdots & a_{\beta,h+n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{\mu,h+1} & \cdots & a_{\mu,h+i-1} & a_{\mu,h+i+1} & \cdots & a_{\mu,h+n} \end{vmatrix}$$
$$\times (-1)^{n-i} (-1)^{[(h+n-1)-\mu]+\cdots+[(h+n-1)-(\gamma-n+3)]+[(h+n-1)-(\beta-n+2)} (-1)^{(h+1)-\alpha} \tag{68}$$

となる．ここで，式 (68) の i の総和に関する下記の部分をに注目する．

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} a_{\alpha,h+i} \begin{vmatrix} a_{\beta,h+1} & \cdots & a_{\beta,h+i-1} & a_{\beta,h+i+1} & \cdots & a_{\beta,h+n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{\mu,h+1} & \cdots & a_{\mu,h+i-1} & a_{\mu,h+i+1} & \cdots & a_{\mu,h+n} \end{vmatrix} \equiv D \tag{68a}$$

これは形式上，n 次行列式を第 α 行で展開している式であることがわかる．ただし，符号は第 α 行を第 1 行においた場合である．もし，α が β から μ のうちのいずれかに等しい場合は，2 つの行が等しくなるのでこの行列式は 0 になる．したがって，α から μ までは全て異なるとしてよい．展開される前の行列式を D とおくと，D は次の n 次行列式に等しい．

$$D = \begin{vmatrix} a_{\alpha,h+1} & \cdots & a_{\alpha,h+n} \\ a_{\beta,h+1} & \cdots & a_{\beta,h+n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{\mu,h+1} & \cdots & a_{\mu,h+n} \end{vmatrix} \tag{69}$$

したがって，式 (68) は，

$$M_1^{(n)} = A_h^{n-2} \sum_{\beta<\gamma<\cdots<\mu}^{h+n-1} \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha\neq h+1,h+2,\cdots,h+n-1}}^{h+n} A_{\beta,\gamma,\cdots,\mu,h+n} A_{\alpha,h+1,h+2,\cdots,h+n-1} \begin{vmatrix} a_{\alpha,h+1} & \cdots & a_{\alpha,h+n} \\ a_{\beta,h+1} & \cdots & a_{\beta,h+n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{\mu,h+1} & \cdots & a_{\mu,h+n} \end{vmatrix}$$
$$\times (-1)^{[(h+n-1)-\mu]+\cdots+[(h+n-1)-(\gamma-n+3)]+[(h+n-1)-(\beta-n+2)}(-1)^{(h+1)-\alpha}(-1)^{n-1} \tag{70}$$

となる．

式 (70) の総和の取り方について，次のようにする．まず，α が $\beta,\gamma,\cdots,\mu$ のいずれかに等しい場合は総和から除いてよい．そこで，1 から $h+n$ までの間から相異なる n 個の整数を選び，それに α と $\beta,\gamma,\cdots,\mu$ を条件が満たされる範囲で割り当てる．割り当てる組み合わせの全ての場合について総和する．これを，全ての相異なる n 個の整数の選び方について総和すれば式 (70) の総和と一致する．

上のような総和をするために，まず，$1,\cdots,h+n$ から異なる n 個の $\alpha_1,\beta_1,\gamma_1,\cdots,\mu_1$ を選び，$\alpha_1<\beta_1<\gamma_1<\cdots<\mu_1$ とする．式 (70) の総和の条件では，α は h より大きい範囲では $h+n$ しかとれず，それ以外の $\beta,\gamma,\cdots,\mu$ は $h+n$ のみとれないので，以下においては，$\alpha_1,\beta_1,\gamma_1,\cdots,\mu_1$ が全て $1,\cdots,h$ の範囲にある場合と，$\alpha_1,\beta_1,\gamma_1,\cdots,\mu_1$ のうち少なくとも 1 つが h よりも大きい場合の 2 つの場合に分けて考えることにする．

最初に，$\alpha_1,\beta_1,\gamma_1,\cdots,\mu_1$ が $1,\cdots,h$ の範囲にある場合について考える．そうすると，$\beta,\gamma,\cdots,\mu$ は大きさの順序がすでに決まっているから，α が上の $n-1$ 個の $\alpha_1,\cdots,\mu_1$ のどこに入るかによって，次のように，Case 1 から Case n まで n 種類の選び方が存在する．ここで，Case i とは α が $\alpha_1,\beta_1,\gamma_1,\cdots,\mu_1$ のうち，小さい方から i 番目にある場合である．

	α_1	β_1	γ_1	δ_1	$\cdots$	ν_1	λ_1	μ_1
Case 1	α	β	γ	δ	$\cdots$	ν	λ	μ
Case 2	β	α	γ	δ	$\cdots$	ν	λ	μ
Case 3	β	γ	α	δ	$\cdots$	ν	λ	μ
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
Case $n-2$	β	γ	δ	$\cdots$	$\cdots$	α	λ	μ
Case $n-1$	β	γ	δ	$\cdots$	$\cdots$	λ	α	μ
Case n	β	γ	δ	$\cdots$	$\cdots$	λ	μ	α

(71)

これに対応して，式 (70) の中の $A_{\beta,\gamma,\cdots,\mu,n}A_{\alpha,h+1,h+2,\cdots,h+n-1}$ の $\beta,\cdots,\mu$ と α は次のように Case 1 から Case n まで n 種類の選び方が存在する．

	β	γ	δ	$\cdots$	$\cdots$	λ	μ	α
Case 1	β_1	γ_1	δ_1	$\cdots$	$\cdots$	λ_1	μ_1	α_1
Case 2	α_1	γ_1	δ_1	$\cdots$	$\cdots$	λ_1	μ_1	β_1
Case 3	α_1	β_1	δ_1	$\cdots$	$\cdots$	λ_1	μ_1	γ_1
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
Case $n-2$	α_1	β_1	γ_1	δ_1	$\cdots$	λ_1	μ_1	ν_1
Case $n-1$	α_1	β_1	γ_1	δ_1	$\cdots$	ν_1	μ_1	λ_1
Case n	α_1	β_1	γ_1	δ_1	$\cdots$	ν_1	λ_1	μ_1

(72)

この選び方の違いにより，D において行の互換が起こる．それぞれの選び方における D から Case 1 の場合の D に変形する場合，行の互換を伴い，その偶奇により式 (70) の符号が変わる．例えば，Case 2 の場合は第 α_1 行 と第 β_1 行の互換が必要になり，この場合は互換が 1 回ですむから符号は反転する．Case 3 では 2 回の互換が必要になり，符号反転はおこらない．以下同様にして，符号反転が 1 つおきに起こる．$\alpha,\beta,\cdots,\mu$ の選び方

には Case 1 から Case n まであるので，式 (70) の α から μ に関する総和は行列式部分の n 項の和になる．第 2 項以降の $n-1$ 項全ての場合にこの互換操作を施すと，式 (70) の行列式の積の部分は次の形をとる．

$$\begin{aligned}&A_{\beta_1,\gamma_1,\cdots,\mu_1,h+n}A_{\alpha_1,h+1,h+2,\cdots,h+n-1}-A_{\alpha_1,\gamma_1,\cdots,\mu_1,h+n}A_{\beta_1,h+1,h+2,\cdots,h+n-1}\\&+A_{\alpha_1\beta_1,\cdots,\mu_1,h+n}A_{\gamma_1,h+1,h+2,\cdots,h+n-1}\cdots+(-1)^{n-1}A_{\alpha_1\beta_1,\cdots,\lambda_1,h+n}A_{\mu_1,h+1,h+2,\cdots,h+n-1}\end{aligned}\tag{73}$$

一方,「行列式の積に関する定理」[5] から

$$\begin{aligned}&A_{i_2,i_3,\cdots,i_n\,j_n}A_{i_1,j_1,j_2,\cdots,j_{n-1}}-A_{i_1,i_3\cdots,i_n\,j_n}A_{i_2,j_1,j_2,\cdots,j_{n-1}}+A_{i_1,i_2,i_4,\cdots,i_n\,j_n}A_{i_3,j_1,j_2,\cdots,j_{n-1}}\\&+\cdots(-1)^{n-1}A_{i_1,i_2,\cdots,i_{n-1}\,j_n}A_{i_n,j_1,j_2,\cdots,j_{n-1}}=A_{i_1,i_2,\cdots,i_n}A_{j_1,j_2,\cdots,j_n}\end{aligned}\tag{74}$$

が成り立つ．したがって，式 (73) は $A_{\alpha_1,\beta_1,\cdots,\mu_1}A_{h+1,h+2,\cdots,h+n}$ に等しい．これを式 (70) に代入すると，行列式の積の部分は，α から μ の選び方に関する総和の結果,

$$A_{\alpha_1,\beta_1,\cdots,\mu_1}A_h\begin{vmatrix}a_{\alpha_1,h+1}&\cdots&a_{\alpha_1,h+n}\\a_{\beta_1,h+1}&\cdots&a_{\beta_1,h+n}\\\vdots&\cdots&\vdots\\a_{\mu_1,h+1}&\cdots&a_{\mu_1,h+n}\end{vmatrix}\tag{75}$$

となる．ここで，$A_{h+1,h+2,\cdots,h+n}=A_h$ の関係を用いた．

式 (70) の行列式の部分は，$\alpha_1,\beta_1,\cdots,\mu_1\le h$ の場合に式 (75) の形に変形できることが示された．これを $\alpha_1,\beta_1,\cdots,\mu_1\le h+n$ の場合にも成り立つことを示したい．これを，$\alpha_1,\beta_1\cdots,\mu_1$ のうち少なくとも 1 つが h よりも大きい場合と考え，それをいくつかの場合に分けて考えよう．

(1) $\alpha_1,\beta_1\cdots,\mu_1$ のうち 1 つが h よりも大きい場合，つまり $\mu_1>h$ の場合

(i) $\mu_1=h+n$ の場合

この場合は $\alpha=\mu_1$ 以外の選択はない．したがって，β から μ までは α_1 から λ_1 までの 1 つの選択しかない．このとき，式 (70) の行列式の積は

$$A_{\alpha_1,\beta_1,\gamma_1,\cdots,\lambda_1,\mu_1}A_{\mu_1;h+1,h+2,\cdots,h+n-1}=A_{\alpha_1,\beta_1,\cdots,\mu_1}A_{h+1,h+2,\cdots,h+n}\tag{76}$$

となる．これは式 (75) の該当部分に一致する．

(ii) $\mu_1<h+n$ の場合

α は $h+1$ から $h+n-1$ までは取り得ないので，μ が μ_1 を取ることになる．これが可能な選択は式 (72) において Case 1 から Case $n-1$ まで全部で $n-1$ 種類ある．この選択は，α が α_1 から λ_1 まで取り得ることに対応している．このとき，式 (70) の行列式の積は式 (74) により，式 (73) と同様に

$$\begin{aligned}&A_{\beta_1,\gamma_1,\cdots,\mu_1;h+n}A_{\alpha_1;h+1,h+2,\cdots,h+n-1}-A_{\alpha_1,\gamma_1,\cdots,\mu_1;h+n}A_{\beta_1;h+1,h+2,\cdots,h+n-1}\\&\cdots+(-1)^{n-2}A_{\alpha_1\beta_1,\gamma_1,\cdots,\mu_1;h+n}A_{\lambda_1;h+1,h+2,\cdots,h+n-1}=A_{\alpha_1,\beta_1,\cdots,\mu_1}A_{h+1,h+2,\cdots,h+n}\end{aligned}\tag{77}$$

となる．この場合は式 (73) と比べて項の数が 1 つ少ないが，それは，$A_{\alpha_1,\beta_1,\gamma_1,\cdots,\lambda_1,\mu_1}$ の μ_1 が $A_{\mu_1;h+1,h+2,\cdots,h+n-1}$ の $h+1$ から $h+n-1$ のうちの 1 つと一致していて，添字に示されている除かれる行が 1 つ共通しているためである．その場合は，無視してもよいし，式 (7) で 1 行少ない場合に相当すると考えても良い．

以上で，$1,\cdots,h+n$ から n 個選ぶ組み合わせで，$\alpha_1,\beta_1\cdots,\mu_1$ のうち 1 つが h よりも大きい場合は全て網羅された．

(2) $\alpha_1,\beta_1\cdots,\mu_1$ のうち複数個が h よりも大きい場合

$\alpha_1,\beta_1\cdots,\mu_1$ のうち p 個が h 以下で，$n-p$ 個が h よりも大きいとする．

(i) $\mu_1 = h+n$ の場合

この場合は $\alpha = h+n$ が唯一の選択肢である．したがって，残りの $n-1$ 個は λ_1 以下の行番号から選ばれる．その結果は式 (76) と同じ形になる．

(ii) $\mu_1 < h+n$ の場合

α は h 以下になるので，式 (72) で Case $p+1$ から Case n までは選択できない．それ以外の Case 1 から Case p までが選択できる範囲になる．小さい方から p 番目の行番号を π_1，$p+1$ 番目の行番号を κ_1 とする．そのとき，$A_{\alpha_1,\beta_1,\gamma_1,\cdots,\lambda_1,\mu_1}$ の κ_1 から μ_1 まではそれぞれ $A_{\mu_1;h+1,h+2,\cdots,h+n-1}$ の $h+1$ から $h+n-1$ のうちの 1 つと必ず一致し，その行は両方から共通に除かれている行であるから無視してよい．あるいは，式 (8) で $n-p$ 行少ない場合と考えてもよい．結局，$\alpha_1, \beta_1 \cdots, \mu_1$ のうち h 以上に $n-p$ 個の行番号が存在する場合は Case 1 から Case p の場合である．これを全て加え合わせると，式 (77) と同様に

$$
\begin{aligned}
&A_{\beta_1,\gamma_1,\cdots,\mu_1;h+n}A_{\alpha_1;h+1,h+2,\cdots,h+n-1} - A_{\alpha_1,\gamma_1,\cdots,\mu_1;h+n}A_{\beta_1;h+1,h+2,\cdots,h+n-1} \\
&\cdots + (-1)^{p-1}A_{\alpha_1\beta_1,\gamma_1,\cdots,\mu_1;h+n}A_{\pi_1;h+1,h+2,\cdots,h+n-1} = A_{\alpha_1,\beta_1,\cdots,\mu_1}A_{h+1,h+2,\cdots,h+n}
\end{aligned} \tag{78}
$$

となり，結局，この場合も式 (75) と同じ形になることがわかる．

ちなみに，$p=2$ の場合は，Case 1 と Case 2 のみが選択可能で，γ_1 から μ_1 は $h+2$ から $h+n-1$ までを占めて $A_{\beta_1,\gamma_1,\cdots,\mu_1,h}$ と $A_{\alpha_1;h+1,\cdots,h+n-1}$ の両方の共通の行になっている．この行を無視すれば式 (27) の関係式を用いて式 (75) と同じ形になる．つまり，h 以下の 2 つの行と $h+2$ から $h+n-1$ の行までの計 n 行が選ばれたことになる．

$p=1$ の場合は Case 1 のみが選択可能で $h+1$ から $h+n-1$ の $n-1$ 行が共通となる．$A_{\beta_1,\gamma_1,\cdots,\mu_1,h+n}$ は $A_{h+1,\cdots,h+n}$ となり，もう一方は $A_{\alpha_1;h+1,\cdots,h+n-1}$ となるから，$A_{h+1,\cdots,h+n}\ A_{\alpha_1;h+1,\cdots,h+n-1}$ である．これは式 (75) の形である．

$p=0$ の場合は単純に $A^2_{h+1,\cdots,h+n}$ となる．

以上で $\alpha_1,\cdots,\mu_1$ の 1 つ以上が h よりも大きい全ての場合において式 (70) の行列式の積は式 (75) の形に変形できることが示された．$\alpha_1,\cdots,\mu_1$ が全て h 以下の場合も合わせると，$\alpha_1,\cdots,\mu_1$ に $1,\cdots,h+n$ から異なる n 個を選んだ場合，その 1 つ 1 つの組み合わせに 1 つの式 (75) が対応することが示されたことになる．したがって，式 (70) の総和をこのように変更することにより式 (75) の総和に変形することができる．さらに，符号の部分は以下のように変形することができる．

$$
\begin{aligned}
&(-1)^{[(h+n-1)-\mu]+\cdots+[(h+n-1)-(\gamma-n+3)]+[(h+n-1)-(\beta-n+2)]}(-1)^{(h+1)-\alpha}(-1)^{n-1} \\
&= (-1)^{[(h+n)-\mu]+[(h+n)-(\lambda-1)]+\cdots+[(h+n)-(\gamma-n+3)]+[(h+n)-(\beta-n+2)]+[(h+n)-(\alpha-n+1)]}
\end{aligned} \tag{79}
$$

以上を合わせると式 (70) は次のように表される．

$$
\begin{aligned}
M_1^{(n)} = A_h^{n-1} &\sum_{\alpha_1<\beta_1<\gamma_1<\cdots<\mu_1}^{h+n} A_{\alpha_1,\beta_1,\cdots,\mu_1}
\begin{vmatrix}
a_{\alpha_1,h+1} & \cdots & a_{\alpha_1,h+n} \\
a_{\beta_1,h+1} & \cdots & a_{\beta_1,h+n} \\
\vdots & \cdots & \vdots \\
a_{\mu_1,h+1} & \cdots & a_{\mu_1,h+n}
\end{vmatrix} \\
&\times (-1)^{[(h+n)-\mu_1]+[(h+n)-(\lambda_1-1)]+\cdots+[(h+n)-(\gamma_1-n+3)]+[(h+n)-(\beta_1-n+2)]+[(h+n)-(\alpha_1-n+1)]}
\end{aligned} \tag{80}
$$

この式の総和記号以降の部分は A の第 $h+1$ 列から第 $h+n$ 列による展開式である．したがって，式 (78) は

$$
M_1^{(n)} = A_h^{n-1}A \tag{81}
$$

となる．この式は，式 (4) の $m=1$ の場合の一般式である．以上により数学的帰納法により $m=1$ の場合の一般式が示された．

参考文献

[1] R. F. Scott, “A Treatise on the Theory of Determinants and Their Applications in Analysis and Geometry”, Cambridge at the University Press, 1880, p. 64
http://www.totoha.net/archiv/scott1880.pdf

[2] 「1 つの行列から派生する行列式の積に関する定理」(2021/1/31 のエントリー).
http://totoha.web.fc2.com/det_prod_theory.pdf

[3] 「行列式展開の一般式」(2020/8/12 のエントリー).
http://totoha.web.fc2.com/determinant_expand.pdf

[4] 「1 つの行列から派生する行列式の積に関する定理　その 2」(2021/2/26 のエントリー).
http://totoha.web.fc2.com/det_prod_theory-2.pdf

[5] 「1 つの行列から派生する行列式の積に関する定理　その 3」(2021/2/26 のエントリー).
http://totoha.web.fc2.com/det_prod_theory-3.pdf