曲線座標系のベクトル解析

2019.7.8　　鈴木　実

1　はじめに

ベクトル解析で曲線座標が出てくると，いきなり複雑になり，確信を持てないままに公式を引き写しては若干の不安を抱いたことがある人は多いと思う．この部分を明解に説明する良書はないのだろうか，と常々思っていた [1].

最近，J. A. Stratton の “The Electromagnetic Theory” [2] に目を通す機会があり，その中に，曲線座標系におけるベクトル解析が限られたスペースの中に明解にまとめられているのを知った．これは，大変理解しやすく，有用と考えられるので，ここに，必要な説明を補いながらまとめておくことにしよう．

2　座標系

2.1　単位ベクトルおよび逆ベクトル（Unitary vectors and Reciprocal vectors）

3 次元空間を考える．デカルト座標を (x, y, z) とし，その座標軸を x 軸，y 軸，z 軸とする．

いま，$f_i(x, y, z)\ \ (i = 1, 2, 3)$ が連続で微分可能な 1 価関数で，

$$u^1 = f_1(x, y, z), \quad u^2 = f_2(x, y, z), \quad u^3 = f_3(x, y, z), \tag{1}$$

が成り立つとする[1]．この関係式を解いて，

$$x = \varphi_1(u^1, u^2, u^3), \quad y = \varphi_2(u^1, u^2, u^3), \quad z = \varphi_3(u^1, u^2, u^3), \tag{2}$$

という関係式が得られる．φ_1, φ_2, φ_3, も一定の範囲で 1 価連続微分可能な関数である．これから，空間の 1 点 $\mathrm{P}(x, y, z)$ は $\mathrm{P}(u^1, u^2, u^3)$ と表すことができる．そのとき，u^1, u^2, u^3 は一般に曲線座標 (curvilinear coordinates) という．

点 P を通って次の 3 つの面が存在する．

$$u^1 = \mathrm{const}, \quad u^2 = \mathrm{const}, \quad u^3 = \mathrm{const}, \tag{3}$$

この 3 つの面は座標面 (coordinate surfaces) という．具体的に特定するときは，u^1 面，u^2 面，u^3 面という．それぞれの座標面では，1 つの座標は一定で他の 2 つの座標は変化する．2 つの座標面は 1 本の曲線で交差する．この曲線は点 P を通る座標軸という．具体的に特定するときは，u^1 軸，u^2 軸，u^3 軸という．座標軸上では 2 つの座標は一定で，1 つの座標は変化する．座標軸は座標関数 (2) で表される．

点 $\mathrm{P}(x, y, z)$ を表すベクトルを $\mathbf{r}$ とする．$\mathbf{r}$ を曲線座標 u^1, u^2, u^3 の関数として表すことができる．すなわち，

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2, u^3) \tag{4}$$

である．

[1] ここで，u^1, u^2, u^3 はの上付き添字は冪乗ではなく，後で出てくる反変基底，共変基底に合わせた反変を意味する添字である．

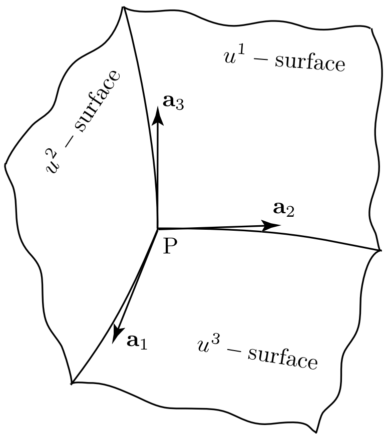

図 1: 曲線座標系の u^1 面，u^2 面，u^3 面，および u^1 軸，u^2 軸，u^3 軸

$\mathbf{r}$ の微分 $\mathrm{d}\mathbf{r}$ は各曲線座標軸の成分に分けて

$$\mathrm{d}\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^1}\,\mathrm{d}u^1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^2}\,\mathrm{d}u^2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^3}\,\mathrm{d}u^3 \tag{5}$$

と表される．$\mathbf{r}$ が点 P から u^1 軸を微少移動すると $\mathrm{d}\mathbf{r}$ は点 P における u^1 軸への接ベクトルになる．u^1 軸，u^1 軸方向でも同様である．これから，

$$\mathbf{a}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^1}, \quad \mathbf{a}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^2}, \quad \mathbf{a}_3 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^3}, \tag{6}$$

はそれぞれ点 P における u^1 軸，u^2 軸，u^3 軸への接ベクトルである．$\mathbf{a}_1$，$\mathbf{a}_2$，$\mathbf{a}_3$ は点 P における単位ベクトル (unitary vectors) と呼ばれる．その点における基底となる．単位ベクトルという名前ではあるが，その長さは必ずしも単位長ではない．$\mathbf{a}_1$，$\mathbf{a}_2$，$\mathbf{a}_3$ を用いると，式 (5) は

$$\mathrm{d}\mathbf{r} = \mathbf{a}_1\,\mathrm{d}u^1 + \mathbf{a}_2\,\mathrm{d}u^2 + \mathbf{a}_3\,\mathrm{d}u^3 \tag{7}$$

と表される．$\mathbf{a}_1$，$\mathbf{a}_2$，$\mathbf{a}_3$ は共変基底ベクトルである．

* * * * *

$\mathbf{a}_1$，$\mathbf{a}_2$，$\mathbf{a}_3$ を用いてを逆単位ベクトル (reciprocal unitary vectors) を作ることができる．まず次の関係に注意しよう．

$$V = \mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3) = \mathbf{a}_2 \cdot (\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1) = \mathbf{a}_3 \cdot (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \tag{8}$$

V は $\mathbf{a}_1$，$\mathbf{a}_2$，$\mathbf{a}_3$ で作られる平行 6 面体の体積である．そうすると，次式で定義される $\mathbf{a}^1$，$\mathbf{a}^2$，$\mathbf{a}^3$ は逆単位ベクトルになることがわかる．

$$\mathbf{a}^1 = \frac{1}{V}(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3), \quad \mathbf{a}^2 = \frac{1}{V}(\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1), \quad \mathbf{a}^3 = \frac{1}{V}(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2), \tag{9}$$

実際，式 (8) と式 (9) から

$$\mathbf{a}^i \cdot \mathbf{a}_j = \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{a}^i = \delta_{ij} \tag{10}$$

成り立つことがわかる．δ_{ij} はクロネッカーのデルタである．

式 (9) と類似の関係式により，$\mathbf{a}_1$，$\mathbf{a}_2$，$\mathbf{a}_3$ は $\mathbf{a}^1$，$\mathbf{a}^2$，$\mathbf{a}^3$ を用いて表すことができる．実際，

$$\mathbf{a}_1 = V(\mathbf{a}^2 \times \mathbf{a}^3), \quad \mathbf{a}_2 = V(\mathbf{a}^3 \times \mathbf{a}^1), \quad \mathbf{a}_3 = V(\mathbf{a}^1 \times \mathbf{a}^2), \tag{11}$$

という関係式が成り立つ[2]．この $\mathbf{a}^1$，$\mathbf{a}^2$，$\mathbf{a}^3$ は反変基底ベクトル (contravariant base vectors) を構成する．

式 (7) と同じように，$\mathrm{d}\mathbf{r}$ を逆単位ベクトル $\mathbf{a}^1$，$\mathbf{a}^2$，$\mathbf{a}^3$ を用いて次のように表すことができる．

$$\mathrm{d}\mathbf{r} = \mathbf{a}^1\,\mathrm{d}u_1 + \mathbf{a}^2\,\mathrm{d}u_2 + \mathbf{a}^3\,\mathrm{d}u_3 \tag{12}$$

ただし，u_1，u_2，u_3 は u^1，u^2，u^3 の関数である．$\mathrm{d}u_1$，$\mathrm{d}u_2$，$\mathrm{d}u_3$ は必ずしも完全微分ではない．むしろ，$\mathrm{d}u^1$，$\mathrm{d}u^2$，$\mathrm{d}u^3$ の連立 1 次方程式になり一般には求積できない．

* * * * *

式 (7) と式 (12) から，

$$\mathrm{d}\mathbf{r} = \sum_{i=1}^{3}\mathbf{a}_i\,\mathrm{d}u^i = \sum_{i=1}^{3} = \mathbf{a}^i\,\mathrm{d}u_i \tag{13}$$

が成り立つ．これに $\mathbf{a}_j$ または $\mathbf{a}^i$ とのスカラー積をとると，

$$\mathrm{d}u_j = \sum_{i=1}^{3}\mathbf{a}_j\cdot\mathbf{a}_i\,\mathrm{d}u^i, \quad \mathrm{d}u^i = \sum_{j=1}^{3}\mathbf{a}^i\cdot\mathbf{a}^j\,\mathrm{d}u_j, \tag{14}$$

となる．単位ベクトル間のスカラー積，および逆単位ベクトル間のスカラー積は慣例的に g_{ij} あるいは g^{ij} という記号を用いて次のように表される．

$$g_{ij} = \mathbf{a}_i\cdot\mathbf{a}_j = g_{ji} \tag{15}$$

$$g^{ij} = \mathbf{a}^i\cdot\mathbf{a}^j = g^{ji} \tag{16}$$

そうすると，式 (14) は

$$\mathrm{d}u_j = \sum_{i=1}^{3} g_{ij}\,\mathrm{d}u^i, \quad \mathrm{d}u^i = \sum_{j=1}^{3} g^{ij}\,\mathrm{d}u_j, \tag{17}$$

* * * * *

ベクトル場において，点 P における定ベクトル $\mathbf{F}$ は単位ベクトル $\mathbf{a}_1$，$\mathbf{a}_2$，$\mathbf{a}_3$，または逆単位ベクトル $\mathbf{a}^1$，$\mathbf{a}^2$，$\mathbf{a}^3$ を用いて次のように展開することができる．

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^{3} f^i\mathbf{a}_i = \sum_{i=1}^{3} = f_i\mathbf{a}^i \tag{18}$$

このとき，$\mathbf{F}$ の単位ベクトル系成分（共変成分）および $\mathbf{F}$ の逆単位ベクトル系成分（反変成分）は

$$f_j = \sum_{i=1}^{3} g_{ji}f^i, \quad f^i = \sum_{j=1}^{3} g^{ij}f_j, \tag{19}$$

---

[2]原著ではこの式に誤植がある．これが成り立つことは，$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}$ という公式を利用すると，

$$\begin{aligned}\mathbf{a}^2\times\mathbf{a}^3 &= \frac{1}{V^2}(\mathbf{a}_3\times\mathbf{a}_1)\times(\mathbf{a}_1\times\mathbf{a}_2)\\ &= \frac{1}{V^2}[\{(\mathbf{a}_3\times\mathbf{a}_1)\cdot\mathbf{a}_2\}\mathbf{a}_1 - \{(\mathbf{a}_3\times\mathbf{a}_1)\cdot\mathbf{a}_1\}\mathbf{a}_2]\\ &= \frac{1}{V}\mathbf{a}_1\end{aligned}$$

となることから確かめることができる．Stratton の式 (11) はミスプリントである．ついでに，

$$\frac{1}{V} = \mathbf{a}^1\cdot(\mathbf{a}^2\times\mathbf{a}^3) = \mathbf{a}^2\cdot(\mathbf{a}^3\times\mathbf{a}^1) = \mathbf{a}^3\cdot(\mathbf{a}^1\times\mathbf{a}^2)$$

という関係が成り立つ．

と表される．以下，共変と反変という表現を用いる．

式 (18) と $\mathbf{a}^i$ または $\mathbf{a}_j$ のスカラー積をとると，

$$f^i = \mathbf{F}\cdot\mathbf{a}^i, \quad f_j = \mathbf{F}\cdot\mathbf{a}_j, \tag{20}$$

と表される．したがって，式 (18) は

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^{3}(\mathbf{F}\cdot\mathbf{a}^i)\mathbf{a}_i = \sum_{i=1}^{3} = (\mathbf{F}\cdot\mathbf{a}_i)\mathbf{a}^i \tag{21}$$

と表すことができる．

f^i は $\mathbf{F}$ の反変成分 (contravariant component) といい，f_i は $\mathbf{F}$ の共変成分 (covariant component) という．それぞれ，反変基底 $\{\mathbf{a}^i\}$，あるいは共変基底 $\{\mathbf{a}_i\}$ を用いて $\mathbf{F}$ を展開したときの係数である．

反変基底 $\{\mathbf{a}^i\}$ と共変基底 $\{\mathbf{a}_i\}$ は一般に単位長さではない．ここで $\{\mathbf{a}^i\}$ と $\{\mathbf{a}_i\}$ を正規化して単位長さに変換する．点 P における u^i 曲線軸への接ベクトルは $\mathbf{a}_i$ である．これを単位長にした接ベクトルを $\mathbf{i}_i$ とすると，$\mathbf{a}_i$ の長さは $\sqrt{\mathbf{a}_i\cdot\mathbf{a}_i}$ であるから，

$$\mathbf{i}_1 = \frac{\mathbf{a}_1}{\sqrt{\mathbf{a}_i\cdot\mathbf{a}_1}} = \frac{\mathbf{a}_1}{\sqrt{g_{11}}}, \quad \mathbf{i}_2 = \frac{\mathbf{a}_2}{\sqrt{\mathbf{a}_2\cdot\mathbf{a}_2}} = \frac{\mathbf{a}_2}{\sqrt{g_{22}}}, \quad \mathbf{i}_3 = \frac{\mathbf{a}_3}{\sqrt{\mathbf{a}_3\cdot\mathbf{a}_3}} = \frac{\mathbf{a}_3}{\sqrt{g_{33}}}, \tag{22}$$

となる．これから，

$$\mathbf{F} = F_1\mathbf{i}_1 + F_2\mathbf{i}_2 + F_3\mathbf{i}_3 = F_1\frac{\mathbf{a}_1}{\sqrt{g_{11}}} + F_2\frac{\mathbf{a}_2}{\sqrt{g_{22}}} + F_3\frac{\mathbf{a}_3}{\sqrt{g_{33}}} \tag{23}$$

となる．基底が単位長の場合にはその展開係数を大文字で表すことにする．ここでは，例えば，$\mathbf{a}_i$ で展開した場合は展開係数 f^i であるが，$\mathbf{i}_i$ で展開した場合の展開係数 F^i となる．

F_i と f^i との間の関係は，式 (18) と比較することにより，

$$F_i = \sqrt{g_{ii}}\, f^i \tag{24}$$

という関係式が成り立つ．$\mathbf{i}_i$ の定義から，$\mathbf{F}$ と F_i の次元は同じである．

* * * * *

計量係数（`metrical coefficients`）

$\mathrm{d}\mathbf{r}$ を点 $\mathrm{P}(u^1, u^2, u^3)$ から $(u^1+\mathrm{d}u^1, u^2+\mathrm{d}u^2, u^3+\mathrm{d}u^3)$ への変位とする．この変位の大きさを $\mathrm{d}s$ とする．そうすると，

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\mathbf{r}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\mathbf{a}_i\cdot\mathbf{a}_j\,\mathrm{d}u^i\,\mathrm{d}u^j = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\mathbf{a}^i\cdot\mathbf{a}^j\,\mathrm{d}u_i\,\mathrm{d}u_j \tag{25}$$

である．あるいは，式 (15) と式 (16) の表記を用いると，

$$\mathrm{d}s^2 = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}g_{ij}\,\mathrm{d}u^i\,\mathrm{d}u^j = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}g^{ij}\,\mathrm{d}u_i\,\mathrm{d}u_j \tag{26}$$

と表すこともできる．g_{ij} と g^{ij} は計量係数 (metrical coefficients) という．反変曲線座標 u^i の微分 $\mathrm{d}u^i$ の 2 次形式の係数，あるいは，共変曲線座標 u_i の微分 $\mathrm{d}u_i$ の 2 次形式の係数として現れる．この計量係数を用いると，曲線座標空間の弧，面積，体積の微小要素を簡単に表すことができる．

* * * * *

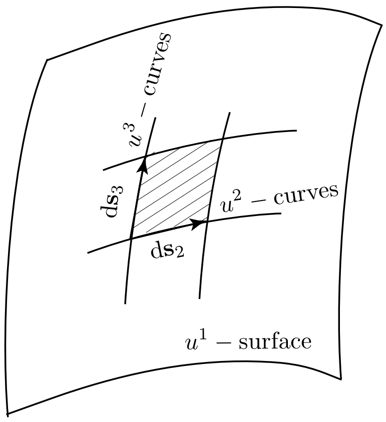

図 2: u^1 面の面積要素

微小弧

$\mathrm{d}\mathbf{s}_1$ を点 P から曲線座標軸 u^1 方向に微小量だけ移動したときの $\mathbf{r}$ の変化したときの変位，すなわち $\mathbf{r}$ の増分を $\mathrm{d}\mathbf{s}^1$ とすると，

$$\mathrm{d}\mathbf{s}_1 = \mathbf{a}_1\,\mathrm{d}u^1, \quad \mathrm{d}s_1 = |\,\mathrm{d}\mathbf{s}_1| = \sqrt{\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1}\,\mathrm{d}u^1 = \sqrt{g_{11}}\,\mathrm{d}u^1 \tag{27}$$

である．$\mathrm{d}\mathbf{s}^1$ は $\mathrm{d}\mathbf{r}$ の u^1 方向の成分である．同様にして，

$$\mathrm{d}\mathbf{s}_2 = \sqrt{g_{22}}\,\mathrm{d}u^2 \quad \mathrm{d}\mathbf{s}_3 = \sqrt{g_{33}}\,\mathrm{d}u^3 \tag{28}$$

となる．

＊　＊　＊　＊　＊

面積要素

図 2 のような，u^1 曲面上において u^2 曲線と u^3 曲線で囲まれる平行四辺形を考える．平行四辺形の 1 辺は $\mathrm{d}\mathbf{s}_2$，もう 1 つの辺は $\mathrm{d}\mathbf{s}_3$ である．この微小平行四辺形の面積 $\mathrm{d}a_1$ は，

$$\begin{aligned}\mathrm{d}a_1 &= |\,\mathrm{d}\mathbf{s}_2 \times \mathrm{d}\mathbf{s}_3| = |\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3|\,\mathrm{d}u^2\,\mathrm{d}u^3 \\ &= \sqrt{(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3) \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)}\,\mathrm{d}u^2\,\mathrm{d}u^3\end{aligned} \tag{29}$$

である．ここで，ベクトルの公式

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \tag{30}$$

を用いて，

$$(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3) \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3) = (\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_2)(\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_3) - (\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_3)(\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_3) = g_{22}g_{33} - g_{23}^2 \tag{31}$$

となるから，u^1 面上の微小面積要素は

$$\mathrm{d}a_1 = \sqrt{g_{22}g_{33} - g_{23}^2}\,\mathrm{d}u^2\,\mathrm{d}u^3 \tag{32}$$

と表される．他の面上の面積要素についても，

$$\begin{aligned}\mathrm{d}a_2 &= \sqrt{g_{33}g_{11} - g_{31}^2}\,\mathrm{d}u^3\,\mathrm{d}u^1 \\ \mathrm{d}a_3 &= \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}\,\mathrm{d}u^1\,\mathrm{d}u^2\end{aligned} \tag{33}$$

となる．

＊　＊　＊　＊　＊

体積要素

曲線座標系の微小体積要素 $\mathrm{d}v$ は，3 つの方向の相異なるベクトルが作る平行 6 面体の体積から，

$$\mathrm{d}v = \mathrm{d}\mathbf{s}_1 \cdot (\mathrm{d}\mathbf{s}_2 \times \mathrm{d}\mathbf{s}_3) = \mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)\,\mathrm{d}u^1\,\mathrm{d}u^2\,\mathrm{d}u^3 \tag{34}$$

となる．式 (21) を用いて，$\mathrm{d}\mathbf{s}_2 \times \mathrm{d}\mathbf{s}_3$ を共変基底ベクトルで展開すると，

$$\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3 = \{\mathbf{a}^1 \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)\}\mathbf{a}_1 + \{\mathbf{a}^2 \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)\}\mathbf{a}_2 + \{\mathbf{a}^3 \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)\}\mathbf{a}_3 \tag{35}$$

となる．この式の反変基底ベクトル $\mathbf{a}^i$ に式 (9) を用いてから $\mathbf{a_1}$ と両辺のスカラー積をとると，

$$\begin{aligned}&\mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)\\ =&\frac{1}{V}\{(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)\cdot(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)\}(\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1) + \frac{1}{V}\{(\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1)\cdot(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)\}(\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2) + \frac{1}{V}\{(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2)\cdot(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)\}(\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_3)\end{aligned} \tag{36}$$

となる．これに式 (31) を適用し，両辺に V を掛けてから $V = \mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{s}_2 \times \mathbf{s}_3)$ を代入すると，

$$\begin{aligned}&[\mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{s}_2 \times \mathbf{s}_3)]^2\\ =&\{(\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_2)(\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_3) - (\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_3)(\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_2)\}(\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1) + \{(\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_2)(\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_3) - (\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_3)(\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2)\}(\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2)\\ &+ \{(\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2)(\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_3) - (\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_3)(\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_2)\}(\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_3)\\ =&(g_{22}g_{33} - g_{23}g_{32})g_{11} + (g_{32}g_{13} - g_{33}g_{12})g_{12} + (g_{12}g_{23} - g_{13}g_{22})g_{13}\\ =&(g_{22}g_{33}g_{11} - g_{23}g_{32}g_{11}) + (g_{32}g_{13}g_{21} - g_{33}g_{12}g_{21}) + (g_{12}g_{23}g_{31} - g_{13}g_{22}g_{31})\\ &= g\end{aligned} \tag{37}$$

となる．したがって，式 (34) は，

$$\mathrm{d}v = \sqrt{g}\,\mathrm{d}u^1\,\mathrm{d}u^2\,\mathrm{d}u^3 \tag{38}$$

となる．ただし，g は次の行列式である．

$$g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} \tag{39}$$

微小弧の式 (27)，(28)，面積要素の式 (32)，(33)，体積要素の式 (38) を共変曲線座標系での反変計量テンソルを用いて表す式もほぼ同様に導くことができて，結果は，g_{ij} を g^{ij} に置き換えるのみである．その関係式はこの後で使用しない．

＊　＊　＊　＊　＊

デカルト座標

統一性を考え，点 P における直交座標 x，y，z を x^1，x^2，x^3 と表す．そうすると，

$$\mathrm{d}s^2 = (\mathrm{d}x^1)^2 + (\mathrm{d}x^2)^2 + (\mathrm{d}x^3)^2, \tag{40}$$

$$g_{ij} = \delta_{ij} \tag{41}$$

である．単位ベクトルと逆単位ベクトルは同一になり，長さは単位長になる．慣用的に，これらの基底ベクトルを以下では **i**，**j**，**k** で表す．

この直交座標と一般の座標系 u^i との関係は，

$$x^1 = x^1(u^1, u^2, u^3), \quad x^2 = x^2(u^1, u^2, u^3), \quad x^3 = x^3(u^1, u^2, u^3), \tag{42}$$

と表す．これを微分することにより，微分 $\mathrm{d}x^i$ は微分 $\mathrm{d}u^i$ の線形結合で表され，

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}x^1 &= \frac{\partial x^1}{\partial u^1}\,\mathrm{d}u^1 + \frac{\partial x^1}{\partial u^2}\,\mathrm{d}u^2 + \frac{\partial x^1}{\partial u^3}\,\mathrm{d}u^3, \\
\mathrm{d}x^2 &= \frac{\partial x^2}{\partial u^1}\,\mathrm{d}u^1 + \frac{\partial x^2}{\partial u^2}\,\mathrm{d}u^2 + \frac{\partial x^2}{\partial u^3}\,\mathrm{d}u^3, \\
\mathrm{d}x^3 &= \frac{\partial x^3}{\partial u^1}\,\mathrm{d}u^1 + \frac{\partial x^3}{\partial u^2}\,\mathrm{d}u^2 + \frac{\partial x^3}{\partial u^3}\,\mathrm{d}u^3,
\end{aligned} \tag{43}$$

となる．式 (26) と式 (40) から，

$$\mathrm{d}s^2 = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} g_{ij}\,\mathrm{d}u^i\,\mathrm{d}u^j = \sum_{k=1}^{3}(\,\mathrm{d}x^k)^2 \tag{44}$$

であるから，これに式 (43) を代入し，$\mathrm{d}u^i\,\mathrm{d}u^j$ の係数を比較することにより，

$$g_{ij} = \frac{\partial x^1}{\partial u^i}\frac{\partial x^1}{\partial u^j} + \frac{\partial x^2}{\partial u^i}\frac{\partial x^2}{\partial u^j} + \frac{\partial x^3}{\partial u^i}\frac{\partial x^3}{\partial u^j} \tag{45}$$

という関係式が得られる．この関係は式 (15) と一致する．

* * * * *

2.2 微分作用素（The Differential Operators）

この節では微分作用素としての grad，rot , div を曲線座標系において一般的に表す．スカラーに対する微分作用素が grad であり，ベクトルに対する微分作用素が rot , あるいは div である．

勾配

スカラー関数 $\phi(u^1, u^2, u^3)$ の勾配 grad は，ϕ の勾配が最大となる方向とその最大値を大きさに持つベクトルである[3]．

[3]実際そうであることは，デカルト座標で示すことができれば十分である．点 $\mathrm{P}(x^1, x^2, x^3)$ とその近傍の点 $\mathrm{Q}(x^1 + \mathrm{d}x^1, x^2 + \mathrm{d}x^2, x^3 + \mathrm{d}x^3)$ において，ϕ は s および $s + \mathrm{d}s$ とする．s 一定の面と $s + \mathrm{d}s$ 一定の面は十分近いので 2 つの平行平面である．したがって，点 P から $s + \mathrm{d}s$ 一定の面へ下ろした垂線の方向が最も距離が近い．その距離を $\mathrm{d}x$ とすると，$\mathrm{d}s/\mathrm{d}x$ が最大勾配である．一方，P を原点と考えたときの x^1 軸，x^2 軸，x^3 軸と $s + \mathrm{d}s$ 面との交点は，それぞれ，$\mathrm{d}x^1$，$\mathrm{d}x^2$，$\mathrm{d}x^3$ である．垂線の方向余弦を α，β，γ とすると，

$$\mathrm{d}x^1\cos\alpha = \mathrm{d}x^2\cos\beta = \mathrm{d}x^3\cos\gamma = \mathrm{d}x$$

は全て垂線の長さ，つまり平行な面の間隔を与える．この式は

$$\cos\alpha : \cos\alpha : \cos\gamma = \frac{1}{\mathrm{d}x^1} : \frac{1}{\mathrm{d}x^2} : \frac{1}{\mathrm{d}x^3}$$

を意味する．したがって，

$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x^1} : \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x^2} : \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x^3} = \frac{\partial\phi}{\partial x^1} : \frac{\partial\phi}{\partial x^2} : \frac{\partial\phi}{\partial x^3}$$

である．方向余弦 $(\cos\alpha, \cos\alpha, \cos\gamma)$ は垂線の方向であるから，これから $\mathrm{grad}\,\phi$ は最大勾配の方向であることがわかる．また，$\mathrm{grad}\,\phi$ の大きさは

$$|\mathrm{grad}\,\phi|^2 = \frac{\mathrm{d}s^2}{(\,\mathrm{d}x^1)^2} + \frac{\mathrm{d}s^2}{(\,\mathrm{d}x^2)^2} + \frac{\mathrm{d}s^2}{(\,\mathrm{d}x^3)^2} = \frac{\mathrm{d}s^2}{(\,\mathrm{d}x)^2}(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) = \frac{\mathrm{d}s^2}{(\,\mathrm{d}x)^2}$$

であるから，最大勾配に等しい．

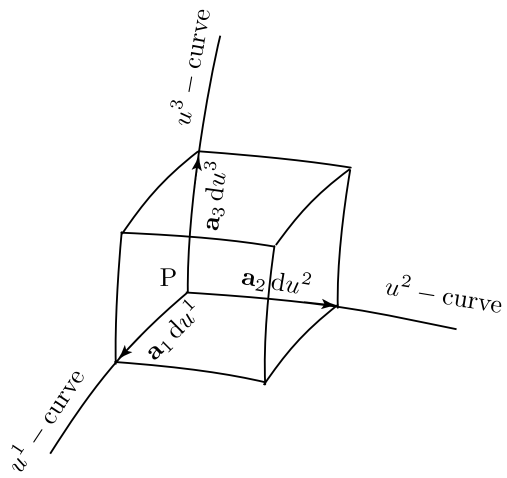

図 3: 点 P における体積要素

いま，微小変位 $\mathrm{d}\mathbf{r}$ に対する ϕ の微分を $\mathrm{d}\phi$ とすると，

$$\mathrm{d}\phi = \nabla\phi\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\phi}{\partial u^i}\,\mathrm{d}u^i \tag{46}$$

である．$\mathrm{d}u^i$ は $\mathrm{d}\mathbf{r}$ の反変成分であるから，

$$\mathrm{d}u^i = \mathbf{a}^i\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} \tag{47}$$

である（式 (12) と (14) 参照）．これを式 (46) に代入して，

$$\left(\nabla\phi - \sum_{i=1}^{3}\mathbf{a}^i\frac{\partial\phi}{\partial u^i}\right)\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = 0 \tag{48}$$

となる．$\mathrm{d}\mathbf{r}$ は任意であるから，曲線座標系のスカラー関数の勾配は次式で与えられる．

$$\nabla\phi = \sum_{i=1}^{3}\mathbf{a}^i\frac{\partial\phi}{\partial u^i} \tag{49}$$

この式では逆単位ベクトルで表されているが，単位ベクトルで表現するには

$$\mathbf{a}^i = \sum_{j=1}^{3}g^{ij}\mathbf{a}_j \tag{50}$$

によって変換すればよいので，

$$\nabla\phi = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial\phi}{\partial u^i}g^{ij}\mathbf{a}_j$$

となる．

* * * * *

発散

空間中の体積 V 中で $A(x,y,z)$ とその微分係数が連続であり，V の境界が正則[4]であるとき，

$$\int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}a = \int_V \nabla\cdot\mathbf{F}\,\mathrm{d}v$$

が成り立つ．点 P における発散 $\mathrm{div}\,\mathbf{A}$ は点 P を囲む体積を十分小さくする極限において，

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \lim_{S\to 0}\frac{1}{V}\int_S \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}a \tag{A}$$

と定義される．

上の定義により，ベクトル関数 $\mathbf{F}(u^2,u^2,u^3)$ の発散を考えよう．図 3 のように，P を頂点とする平行 6 面体を考えると，$\mathbf{F}$ の表面積分を考えればよい．まず最初に，u^2 面と $u^2+\mathrm{d}u^2$ 面を考える．法線は外向きにとる．u^2 面の面積は $\mathbf{a}_1\,\mathrm{d}u^1\times\mathbf{a}_3\,\mathrm{d}u^3 = (\mathbf{a}_1\times\mathbf{a}_3)\,\mathrm{d}u^1\,\mathrm{d}u^3$ である．$u^2+\mathrm{d}u^2$ 面では，$(\mathbf{a}_3\times\mathbf{a}_1)\,\mathrm{d}u^1\,\mathrm{d}u^3$ となる．この 2 つの面からの面積分への寄与は

$$[\mathbf{F}\cdot(\mathbf{a}_3\times\mathbf{a}_1)\,\mathrm{d}u^1\,\mathrm{d}u^3]_{u^2+\,\mathrm{d}u^2} + [\mathbf{F}\cdot(\mathbf{a}_1\times\mathbf{a}_3)\,\mathrm{d}u^1\,\mathrm{d}u^3]_{u^2} \tag{51}$$

となる．$\mathrm{d}u^2$ が十分小さいとき式 (51) をテーラー展開して 1 次の項までとると，

$$\frac{\partial}{\partial u^2}[\mathbf{F}\cdot(\mathbf{a}_3\times\mathbf{a}_1)\,\mathrm{d}u^1\,\mathrm{d}u^3]\,\mathrm{d}u^2 = \frac{\partial}{\partial u^2}[\mathbf{F}\cdot(\mathbf{a}_3\times\mathbf{a}_1)]\,\mathrm{d}u^1\,\mathrm{d}u^2\,\mathrm{d}u^3 \tag{52}$$

となる．さらに，右辺の $\mathbf{F}$ に式 (21) を代入し，式 (20) の $\mathbf{F}\cdot\mathbf{a}^2 = f^2$ と式 (37) の $\mathbf{a}_2\cdot(\mathbf{a}_3\times\mathbf{a}_1) = \sqrt{g}$ を代入すると，

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial u^2}[\{\sum_{i=1}^{3}(\mathbf{F}\cdot\mathbf{a}^i)\mathbf{a}_i\}\cdot(\mathbf{a}_3\times\mathbf{a}_1)]\,\mathrm{d}u^1\,\mathrm{d}u^2\,\mathrm{d}u^3\\
&= \frac{\partial}{\partial u^2}[(\mathbf{F}\cdot\mathbf{a}^2)\mathbf{a}_2\cdot(\mathbf{a}_3\times\mathbf{a}_1)]\,\mathrm{d}u^1\,\mathrm{d}u^2\,\mathrm{d}u^3\\
&= \frac{\partial}{\partial u^2}(f^2\sqrt{g})\,\mathrm{d}u^1\,\mathrm{d}u^2\,\mathrm{d}u^3
\end{aligned} \tag{53}$$

となる．他の 2 つの u^3 軸および u^1 軸方向の面積分を加えると平行 6 面体の面積分は，

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial u^i}(f^i\sqrt{g})\,\mathrm{d}u^1\,\mathrm{d}u^2\,\mathrm{d}u^3 \tag{54}$$

となる．式 (A) の右辺の V は式 (38) の $\mathrm{d}v = \sqrt{g}\,\mathrm{d}u^1\,\mathrm{d}u^2\,\mathrm{d}u^3$ であるから，

$$\mathrm{div}\,\mathbf{F} = \frac{1}{\sqrt{g}}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial u^i}(f^i\sqrt{g}) \tag{55}$$

となる．

* * * * *

回転 `rot`

ストークスの定理から，

$$\int_C \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{s} = \int_S \mathrm{rot}\,\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}a \tag{B}$$

[4]閉曲面が複数の正則な曲面要素から構成されるとき正則であるという．正則な曲面要素とは，その曲面が適当な面方向を有する平面上に射影されたときに，正則な閉曲線の内部になっていることである．正則な閉曲線とは，端同士で接続されている複数の正則な弧から構成され，それ自身と交差しない閉曲線をいう．正則な弧とは，その上の点の座標 $x(t)$，$y(t)$，$z(t)$ がパラメータ t の 1 価連続微分可能な関数であり，t の有限な範囲 $a\le t\le b$ で表されることである．

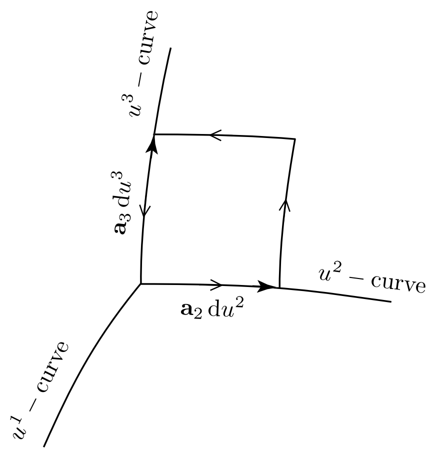

図 4: u^1 面の面積要素境界の線積分経路

である．ここで，線積分の経路 C は正則か，あるいは複数の正則な弧から構成された閉じた経路であり，S は C を境界とする閉曲面である．法線 $\mathbf{n}$ は，曲面を左に見る方向に運動した時に上の方向である．経路を十分に小さくとる極限において，回転 (rot) の定義は

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{F}\cdot\mathbf{n} = \lim_{C\to 0}\frac{1}{S}\int_C \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{s} \tag{56}$$

となる．この式の右辺の線積分を図 4 に示す経路で考えよう．四角形の 2 つの辺はベクトルで $\mathbf{a}_3\,\mathrm{d}u^3$ および $\mathbf{a}_2\,\mathrm{d}u^2$ である．線積分の方向は，回転の方向が u^1 軸方向になるように，図中の矢印の方向にとる．u^3 軸方向の辺からの線積分への寄与は，

$$(\mathbf{F}\cdot\mathbf{a}_3\,\mathrm{d}u^3)_{u^2+\,\mathrm{d}u^2} - (\mathbf{F}\cdot\mathbf{a}_3\,\mathrm{d}u^3)_{u^2}$$

となる．一方，u^2 軸方向の辺からの線積分への寄与は，

$$-(\mathbf{F}\cdot\mathbf{a}_2\,\mathrm{d}u^2)_{u^3+\,\mathrm{d}u^3} + (\mathbf{F}\cdot\mathbf{a}_2\,\mathrm{d}u^2)_{u^3}$$

となる．これをテーラー展開して 1 次の項までとると線積分の部分は，

$$\left[\frac{\partial}{\partial u^2}(\mathbf{F}\cdot\mathbf{a}_3) - \frac{\partial}{\partial u^3}(\mathbf{F}\cdot\mathbf{a}_2)\right]\mathrm{d}u^2\,\mathrm{d}u^3 \tag{57}$$

となる．これを四角形の面積 S で割る必要がある．この面積は図 4 より，$\sqrt{(\mathbf{a}_2\times\mathbf{a}_3)\cdot(\mathbf{a}_2\times\mathbf{a}_3)}\,\mathrm{d}u^2\,\mathrm{d}u^3$ であることがわかる．一方，四角形の面積分の法線 $\mathbf{n}$ は

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{a}^1}{\sqrt{\mathbf{a}^1\cdot\mathbf{a}^1}} \tag{58}$$

である．式 (57)，(58) を式 (56) に代入すると，

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{F}\cdot\frac{\mathbf{a}^1}{\sqrt{\mathbf{a}^1\cdot\mathbf{a}^1}} = \frac{1}{\sqrt{(\mathbf{a}_2\times\mathbf{a}_3)\cdot(\mathbf{a}_2\times\mathbf{a}_3)}}\left[\frac{\partial}{\partial u^2}(\mathbf{F}\cdot\mathbf{a}_3) - \frac{\partial}{\partial u^3}(\mathbf{F}\cdot\mathbf{a}_2)\right]\mathrm{d}u^2\,\mathrm{d}u^3 \tag{59}$$

となる．これに，式 (9) と式 (37) から

$$\mathbf{a}_2\times\mathbf{a}_3 = [\mathbf{a}^1\cdot(\mathbf{a}_2\times\mathbf{a}_3)]\mathbf{a}^1 = \sqrt{g}\mathbf{a}^1 \tag{60}$$

となるので，これを代入し，$\mathbf{F} = f_1\mathbf{a}^1 + f_2\mathbf{a}^2 + f_3\mathbf{a}^3$ であることを使うと，

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{F}\cdot\mathbf{a}^1 = \frac{1}{\sqrt{g}}\left[\frac{\partial}{\partial u^2}(\mathbf{F}\cdot\mathbf{a}_3) - \frac{\partial}{\partial u^3}(\mathbf{F}\cdot\mathbf{a}_2)\right] = \frac{1}{\sqrt{g}}\left(\frac{\partial f_3}{\partial u^2} - \frac{\partial f_2}{\partial u^3}\right) \tag{61}$$

となる．同様にして，

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{F}\cdot\mathbf{a}^2 = \frac{1}{\sqrt{g}}\left[\frac{\partial}{\partial u^3}(\mathbf{F}\cdot\mathbf{a}_1) - \frac{\partial}{\partial u^1}(\mathbf{F}\cdot\mathbf{a}_3)\right] = \frac{1}{\sqrt{g}}\left(\frac{\partial f_1}{\partial u^3} - \frac{\partial f_3}{\partial u^1}\right)$$

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{F}\cdot\mathbf{a}^3 = \frac{1}{\sqrt{g}}\left[\frac{\partial}{\partial u^1}(\mathbf{F}\cdot\mathbf{a}_2) - \frac{\partial}{\partial u^2}(\mathbf{F}\cdot\mathbf{a}_1)\right] = \frac{1}{\sqrt{g}}\left(\frac{\partial f_2}{\partial u^1} - \frac{\partial f_1}{\partial u^2}\right)$$

である．一般に，$\mathbf{A} = \sum(\mathbf{A}\cdot\mathbf{a}^i)\mathbf{a}_i$ と表すことができるから，

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{F} = \sum_{i=1}^{3}(\mathrm{rot}\,\mathbf{F}\cdot\mathbf{a}^i)\mathbf{a}_i \tag{62}$$

となるので，式 (61) 以下の 3 式にそれぞれ $\mathbf{a}_1$，$\mathbf{a}_2$，$\mathbf{a}_3$ を掛けて加えると，

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{F} = \frac{1}{\sqrt{g}}\left[\left(\frac{\partial f_3}{\partial u^2} - \frac{\partial f_2}{\partial u^3}\right)\mathbf{a}_1 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial u^3} - \frac{\partial f_3}{\partial u^1}\right)\mathbf{a}_2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial u^1} - \frac{\partial f_1}{\partial u^2}\right)\mathbf{a}_3\right] \tag{63}$$

という関係式が得られる．

* * * * *

ラプラシアン

$\mathbf{F} = \nabla\phi$ とおいて，ラプラシアン Δ を

$$\Delta\phi = \nabla^2\phi = \nabla\cdot(\nabla\phi) = \mathrm{div}\,\mathbf{F} \tag{C}$$

とする．$\mathbf{F}$ の反変成分は，

$$f^i = \mathbf{F}\cdot\mathbf{a}^i = \sum_{j=1}^{3}\mathbf{a}^i\cdot\mathbf{a}^j\frac{\partial\phi}{\partial u^j} = \sum_{j=1}^{3} g^{ij}\frac{\partial\phi}{\partial u^j} \tag{64}$$

であるので，式 (C) と式 (55) から，

$$\begin{aligned}\nabla^2\phi = \mathrm{div}\,\mathbf{F} &= \frac{1}{\sqrt{g}}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial u^i}(f^i\sqrt{g}) = \frac{1}{\sqrt{g}}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial u^i}(\sum_{j=1}^{3}g^{ij}\frac{\partial\phi}{\partial u^j}\sqrt{g}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial u^i}\left(g^{ij}\sqrt{g}\frac{\partial\phi}{\partial u^j}\right)\end{aligned} \tag{65}$$

という関係式を得る．

* * * * *

2.3 直交座標系（Orthogonal Systems）

これまでの曲線座標系では，3 つの基底ベクトルが同一平面上になりことが唯一の制約で，それ以外に制約はない．したがって，これまでの微分演算子に関する関係式は一般的に任意の曲線座標系に当てはまる．

一方，実際に使われる座標系は直交座標系であって，その場合には上記の関係式は著しく簡略化される．斜交座標系も有用であるが，結果的に連立した偏微分方程式を扱うことになり，十分に使いやすくはならない．

ここでは，直交座標系において簡略化された関係式を導く．

直交座標系では，単位ベクトル $\mathbf{a}_1$，$\mathbf{a}_2$，$\mathbf{a}_3$ は互いに直交する．したがって，逆単位ベクトル $\mathbf{a}^i$ は単位ベクトル $\mathbf{a}_i$ に平行であるから，

$$\mathbf{a}^i = \frac{1}{\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_i}\mathbf{a}_i = \frac{1}{g_{ii}}\mathbf{a}_i \tag{66}$$

である．さらに，

$$\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_1 = 0 \tag{67}$$

であるから，$g_{ij} = 0 (i \neq j)$ である．直交座標系では慣用として以下の表記が用いられる．

$$h_1 = \sqrt{g_{11}}, \quad h_2 = \sqrt{g_{22}}, \quad h_3 = \sqrt{g_{33}} \tag{68}$$

$$g^{ii} = \frac{1}{g_{ii}} = \frac{1}{h_i^2} \tag{69}$$

h_i は次の公式から計算することができる．

$$h_i^2 = g_{ii} = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_i = \left(\frac{\partial x^1}{\partial u^i}\right)^2 + \left(\frac{\partial x^2}{\partial u^i}\right)^2 + \left(\frac{\partial x^3}{\partial u^i}\right)^2 \tag{70}$$

この値はしばしば通常座標系の幾何学的な形から明らかである．

曲線座標系の面積要素と体積要素も，それぞれ長方形と直方体となり，その一辺は，

$$\mathrm{d}s_1 = h_1\,\mathrm{d}u^1, \quad \mathrm{d}s_2 = h_2\,\mathrm{d}u^2, \quad \mathrm{d}s_3 = h_3\,\mathrm{d}u^3 \tag{71}$$

である．また，$\{g_{ij}\}$ は対角行列となるので，$g = g_{11}g_{22}g_{33} = h_1^2h_2^2h_3^2$ より，

$$\mathrm{d}v = \mathrm{d}s_1\,\mathrm{d}s_2\,\mathrm{d}s_3 = h_1h_2h_3\,\mathrm{d}u^1\,\mathrm{d}u^2\,\mathrm{d}u^3 = \sqrt{g}\,\mathrm{d}u^1\,\mathrm{d}u^2\,\mathrm{d}u^3 \tag{72}$$

$$\sqrt{g} = h_1h_2h_3 \tag{73}$$

となる．

* * * * *

単位ベクトルの基底系 $\{\mathbf{a}_i\}$ と逆単位ベクトルの基底系 $\{\mathbf{a}^i\}$ を基に，ベクトルの反変成分と共変成分を区別することは，微分作用素や，ベクトルのスカラー積，ベクトル積が座標系によらず不変であることを理解する上で本質的で欠かすことができない．しかし，直交座標系のような特定の座標系では通常この区別は無視しても構わない．その場合は，ベクトルを直交座標系の単位長単位ベクトル $\{\mathbf{i}_i\}$ による成分で表すのが便利である．ベクトル $\mathbf{F}$ において，その成分を F_1，F_2，F_3 とする．式 (22)，(66) から，

$$\mathbf{a}_i = h_i\mathbf{i}_i, \qquad \mathbf{a}^i = \frac{1}{h_i}\mathbf{i}_i, \tag{74}$$

である．$\mathbf{F}$ の反変成分と共変成分を F_i で表すと，

$$f^i = \frac{1}{h_i}F_i, \qquad f_i = h_iF_i \tag{75}$$

である．したがって，また，

$$\mathbf{F} = F_1\mathbf{i}_1 + F_2\mathbf{i}_2 + F_3\mathbf{i}_3 \tag{76}$$

$$\mathbf{i}_j \cdot \mathbf{i}_k = \delta_{jk} \tag{77}$$

である．

以上から，直交座標系の勾配，発散，回転およびラプラシアンは前節の結果から直接導くことができる．

勾配は，式 (49) から，

$$\operatorname{grad}\phi = \sum_{j=1}^{3} \frac{1}{h_j}\frac{\partial \phi}{\partial u^j}\mathbf{i}_j \tag{78}$$

となる．

発散は，式 (55) から，

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u^1}(h_2h_3F_1) + \frac{\partial}{\partial u^2}(h_3h_1F_2) + \frac{\partial}{\partial u^3}(h_1h_2F_3)\right] \tag{79}$$

となる．

回転は，式 (63) から，

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = \frac{1}{h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u^2}(h_3F_3) - \frac{\partial}{\partial u^3}(h_2F_2)\right]\mathbf{i}_1 + \frac{1}{h_3h_1}\left[\frac{\partial}{\partial u^3}(h_1F_1) - \frac{\partial}{\partial u^1}(h_3F_3)\right]\mathbf{i}_2 + \frac{1}{h_1h_2}\left[\frac{\partial}{\partial u^1}(h_2F_2) - \frac{\partial}{\partial u^2}(h_1F_1)\right]\mathbf{i}_3 \tag{80}$$

となる．式 (80) は次の行列式の展開形である．

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix} h_1\mathbf{i}_1 & h_2\mathbf{i}_2 & h_3\mathbf{i}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial u^1} & \dfrac{\partial}{\partial u^2} & \dfrac{\partial}{\partial u^3} \\ h_1F_1 & h_2F_2 & h_3F_3 \end{vmatrix} \tag{81}$$

最後に，座標系によらない不変量 ϕ に関するラプラシアンは，

$$\Delta\phi = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u^1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial\phi}{\partial u^1}\right) + \frac{\partial}{\partial u^2}\left(\frac{h_3h_1}{h_2}\frac{\partial\phi}{\partial u^2}\right) + \frac{\partial}{\partial u^3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial\phi}{\partial u^3}\right)\right] \tag{82}$$

となる．

次の関係式もベクトル解析で頻繁に出てくる．

$$\nabla\times\nabla\times\mathbf{F} = \nabla\nabla\cdot\mathbf{F} - \nabla\cdot\nabla\mathbf{F} \tag{83}$$

あるいは，rot，grad と div を用いると，

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{F} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{F} - \Delta\mathbf{F}$$

となる．$\nabla\cdot\nabla\mathbf{F}$ は div や rot のようなベクトル解析の上での特別な意味はなく，単に $\mathbf{F}$ の成分ごとに微分作用素 $\nabla\cdot\nabla$ が働く．デカルト座標系 x^1，x^2，x^3 では，

$$\nabla\cdot\nabla\mathbf{F} = \nabla^2\mathbf{F} = \sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial^2F_j}{\partial(x^1)^2} + \frac{\partial^2F_j}{\partial(x^2)^2} + \frac{\partial^2F_j}{\partial(x^3)^2}\right)\mathbf{i}_j \tag{84}$$

となり，各成分にラプラシアンを作用させたものとなる．

一般の直交座標系では，$\nabla\times\nabla\times\mathbf{F}$ は式 (81) に式 (80) の成分を代入することにより，

$$\begin{aligned}&\nabla\times\nabla\times\mathbf{F}\\ &= \begin{vmatrix} \dfrac{1}{h_2h_3}\mathbf{i}_1 & \dfrac{1}{h_3h_1}\mathbf{i}_2 & \dfrac{1}{h_1h_2}\mathbf{i}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial u^1} & \dfrac{\partial}{\partial u^2} & \dfrac{\partial}{\partial u^3} \\ \dfrac{h_1}{h_2h_3}\left[\dfrac{\partial}{\partial u^2}(h_3F_3) - \dfrac{\partial}{\partial u^3}(h_2F_2)\right] & \dfrac{h_2}{h_3h_1}\left[\dfrac{\partial}{\partial u^3}(h_1F_1) - \dfrac{\partial}{\partial u^1}(h_3F_3)\right] & \dfrac{h_3}{h_1h_2}\left[\dfrac{\partial}{\partial u^1}(h_2F_2) - \dfrac{\partial}{\partial u^2}(h_1F_1)\right] \end{vmatrix}\end{aligned} \tag{85}$$

となる．これから，式 (83) により，$\nabla\cdot\nabla\mathbf{F}$ は $\nabla\nabla\cdot\mathbf{F}$ の展開式から式 (85) を差し引いて得られる．しかし，この場合はデカルト座標の場合と異なり，$\mathbf{F}$ の各成分にラプラシアンを作用させた結果とは異なる．

2.4 一般の直交座標系における場の方程式 (The Field Equatioins in General Orthogonal Coordinates)

省略

2.5 基本的な直交座標系における微分作用素 (Properties of Some Elementary Systems)

直交座標系では，計量係数 h_1，h_2，h_3 により完全に記述できる．これらのパラメータは個々の座標系で具体的に計算できる．

円筒座標 (Cyrindrical Coordinates)

デカルト座標空間の点を $\mathrm{P}(x, y, z)$ とすると，円筒座標系では，

$$u^1 = r, \quad u^2 = \theta, \quad u^3 = z \tag{86}$$

となり，両者の関係は，

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = z \tag{87}$$

である．これから，

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_1 &= \left(\frac{\partial x}{\partial r}, \frac{\partial y}{\partial r}, \frac{\partial z}{\partial r}\right) = (\cos\theta, \sin\theta, 0) \\
\mathbf{a}_2 &= \left(\frac{\partial x}{\partial \theta}, \frac{\partial y}{\partial \theta}, \frac{\partial z}{\partial \theta}\right) = (-r\sin\theta, r\cos\theta, 0) \\
\mathbf{a}_3 &= \left(\frac{\partial x}{\partial z}, \frac{\partial y}{\partial z}, \frac{\partial z}{\partial z}\right) = (0, 0, 1)
\end{aligned}$$

したがって，

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\mathbf{s}_1 &= \mathbf{a}_1\,\mathrm{d}r = (\cos\theta, \sin\theta, 0)\,\mathrm{d}r, \\
\mathrm{d}\mathbf{s}_2 &= \mathbf{a}_2\,\mathrm{d}\theta = (-r\sin\theta, r\cos\theta, 0)\,\mathrm{d}\theta, \\
\mathrm{d}\mathbf{s}_3 &= \mathbf{a}_3\,\mathrm{d}z = (0, 0, 1)\,\mathrm{d}z,
\end{aligned}$$

となり，

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\mathbf{s}_1^2 + \mathrm{d}\mathbf{s}_2^2 + \mathrm{d}\mathbf{s}_2^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2\,\mathrm{d}\theta^2 + \mathrm{d}z^2 \tag{88}$$

である．$\mathrm{d}\mathbf{s}_i^2 = \mathbf{a}_i^2(\mathrm{d}u^i)^2 = g_{ii}(\mathrm{d}u^i)^2 = h_i^2(\mathrm{d}u^i)^2$ より，

$$h_1 = 1, \quad h_2 = r, \quad h_3 = 1 \tag{89}$$

である．式 (78)，(79)，(80)，(82) より，以下の式が直接求められる．

$$
\begin{aligned}
\operatorname{grad}\phi &= \frac{\partial\phi}{\partial r}\mathbf{i}_1 + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\mathbf{i}_2 + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{i}_3 \\
\operatorname{div}\mathbf{F} &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rF_1) + \frac{1}{r}\frac{\partial F_2}{\partial\theta} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \\
\operatorname{rot}\mathbf{F} &= \left[\frac{1}{r}\frac{\partial F_3}{\partial\theta} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right]\mathbf{i}_1 + \left[\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial r}\right]\mathbf{i}_2 + \left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial z}(rF_2) - \frac{1}{r}\frac{\partial F_1}{\partial\theta}\right]\mathbf{i}_3 \\
\Delta\phi &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}
\end{aligned}
\tag{90}
$$

* * * * *

球座標 (`Spherical Coordinates`)

デカルト座標空間の点を $\mathrm{P}(x, y, z)$ とすると，球座標系では，

$$u^1 = r, \quad u^2 = \theta, \quad u^3 = \phi \tag{91}$$

となり，両者の関係は，

$$x = r\sin\theta\cos\phi, \quad y = r\sin\theta\sin\phi, \quad z = r\cos\theta \tag{92}$$

である．円筒座標の場合と同様に，これから，

$$
\begin{aligned}
\mathbf{a}_1 &= \left(\frac{\partial x}{\partial r}, \frac{\partial y}{\partial r}, \frac{\partial z}{\partial r}\right) = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta) \\
\mathbf{a}_2 &= \left(\frac{\partial x}{\partial\theta}, \frac{\partial y}{\partial\theta}, \frac{\partial z}{\partial\theta}\right) = (r\cos\theta\cos\phi, r\cos\theta\sin\phi, -r\sin\theta) \\
\mathbf{a}_3 &= \left(\frac{\partial x}{\partial z}, \frac{\partial y}{\partial z}, \frac{\partial z}{\partial z}\right) = (-r\sin\theta\sin\phi, r\sin\theta\cos\phi, 0)
\end{aligned}
$$

したがって，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\mathbf{s}_1 &= \mathbf{a}_1\,\mathrm{d}r = (\sin\theta\cos\phi,\ \sin\theta\sin\phi,\ 0)\,\mathrm{d}r, \\
\mathrm{d}\mathbf{s}_2 &= \mathbf{a}_2\,\mathrm{d}\theta = (r\cos\theta\cos\phi,\ r\cos\theta\sin\phi,\ -r\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta, \\
\mathrm{d}\mathbf{s}_3 &= \mathbf{a}_3\,\mathrm{d}z = (-r\sin\theta\sin\phi,\ r\sin\theta\cos\phi,\ 0)\,\mathrm{d}z,
\end{aligned}
$$

となり，

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\mathbf{s}_1^2 + \mathrm{d}\mathbf{s}_2^2 + \mathrm{d}\mathbf{s}_3^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2\,\mathrm{d}\theta^2 + r^2\sin^2\theta\,\mathrm{d}z^2 \tag{93}$$

である．$\mathrm{d}\mathbf{s}_i^2 = \mathbf{a}_i^2(\mathrm{d}u^i)^2 = g_{ii}(\mathrm{d}u^i)^2 = h_i^2(\mathrm{d}u^i)^2$ より，同じように，

$$h_1 = 1, \quad h_2 = r, \quad h_3 = r\sin\theta \tag{94}$$

である．円筒座標の場合と同じように，これを用いて，式 (78)，(79)，(80)，(82) より，以下の式が直接求められる．

$$
\begin{aligned}
\operatorname{grad}\psi &= \frac{\partial\psi}{\partial r}\mathbf{i}_1 + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\mathbf{i}_2 + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\mathbf{i}_3 \\
\operatorname{div}\mathbf{F} &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2F_1) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta F_2) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F_3}{\partial\phi} \\
\operatorname{rot}\mathbf{F} &= \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta F_3) - \frac{\partial F_2}{\partial\phi}\right]\mathbf{i}_1 + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial F_1}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial r}(rF_3)\right]\mathbf{i}_2 + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial\phi}(rF_2) - \frac{\partial F_1}{\partial\theta}\right]\mathbf{i}_3 \\
\Delta\psi &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\psi^2}
\end{aligned}
\tag{95}
$$

＊ ＊ ＊ ＊ ＊

参考文献

[1] たとえば，岩堀長慶,「ベクトル解析」（裳華房）

私は学生時代に岩堀長慶著「ベクトル解析」（裳華房）を購入してベクトル，テンソル，ベクトル解析を勉強しようとしたが，未消化に終わった．1 次形式を共変ベクトルの定義とするところから急に進めなくなったことを覚えている．問題の多い本だった．

「まえがき」には,「例えばテンソル概念は成分の変換則によってではなく，双一次形式や線形作用素の形で概念を導入し，後から成分の変換則を導いて定義が実は同等であることを述べるという方法 — 近来の数学の体系の中ではこのような方法が種々の利点を持っていることが認められている— をとった」と述べられている．これは，ベクトルやテンソルを体系化しようという試みを考えているということなのであろう．しかし，実際のところ，初学者には体系化よりも概念の理解のほうが重要である．この本では，簡単な概念を，より高位の概念で説明しようとしたが，それが必ずしも上手くいかずにわかりにくい説明と論理構成になってしまったのではないだろうか．

定義もなしにテンソルや，反変，共変が現れ，説明もない．唐突に外微分形式が出てきたかと思えば，ベクトルの微分演算の説明に外微分形式を用いるので，外微分代数を知らなければ消化不良になってしまう．こういうところは，定義と論理と美しさを大事にする数学者とは思われない書きぶりである．この本を名著と評価する人もいるらしいが，私は悪書だと思う．一体，誰に読んでもらうために書いた本なのだろうか．多くの学生はこの本を読もうとして往生しているか，あるいは放擲しているのではないだろうか．

[2] J. A. Stratton, “Electromagnetic Theory”, McGraw-Hill Book Company, New York, 1941.
`https://archive.org/details/electromagnetict031016mbp/page/n6`