# 3 次方程式の解とカルダノの方法の計算プログラム

2016.7.19　　鈴木　実

## 1　カルダノの方法による 3 次方程式の解

3 次方程式を

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \tag{1}$$

とする．3 次方程式では $a_3 \neq 0$ であるので，両辺を $a_3$ で割っておき，あらためて，

$$x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \tag{2}$$

とする．$a_3 = 1$ としても同じである．$x^2$ の係数を 0 とするため，

$$x = y - \frac{a_2}{3} \tag{3}$$

とおくと，

$$y^3 + py + q = 0 \tag{4}$$

となる．ただし，

$$p = a_1 - \frac{1}{3}a_2^2 \tag{5}$$

$$q = a_0 - \frac{1}{3}a_1a_2 + \frac{2}{27}a_2^3 \tag{6}$$

である．ここで，

$$y = u + v \tag{7}$$

として，新しい媒介変数 $u$，$v$ を導入する．これを式 (4) に代入すると，

$$u^3 + v^3 + q + (3uv + p)(u + v) = 0 \tag{8}$$

となる．$y$ を解くことは式 (8) を解くことと同等である．変数が 1 個増えたことになるから，式 (8) を解くことは次の連立方程式の $u$，$v$ を解くことと同じである．すなわち，

$$u^3 + v^3 + q = 0 \tag{9}$$

$$3uv + p = 0 \tag{10}$$

を解けばよい．式 (10) の $v$ を式 (11) に代入すると，

$$u^3 - \frac{p^3}{(3u)^3} + q = 0 \tag{11}$$

となる．したがって，

$$u^6 + qu^3 - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0 \tag{12}$$

となり，これは $u^3$ に関する 2 次方程式であるから，

$$u^3 = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \tag{13}$$

1 の 3 重根を $\omega(\omega = 1, (-1 \pm \sqrt{3}\mathrm{i})/2)$ とすると，

$$u = \omega \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \tag{14}$$

である．これから $v$ は

$$v = -\frac{p}{3u} = -\frac{p}{3\omega} \frac{\sqrt[3]{-\frac{q}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}}{\sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2}\right)^2 - \left\{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3\right\}}} = \omega^2 \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \tag{15}$$

と求められる．結局，解は

$$\begin{aligned} x &= -\frac{a_2}{3} + y \\ &= \omega \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \omega^2 \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \end{aligned} \tag{16}$$

である．

ここで判別式 $D$ を次のように定義する．

$$D = -\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3 \tag{17}$$

そうすると，$\overline{\omega} = \omega^2$ であるから，

$$x = -\frac{a_2}{3} + \omega \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{-D}} + \overline{\omega} \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \mp \sqrt{-D}} \tag{18}$$

である．これから，

(i) $D = 0$，$q = 0$ の場合（3 重根）

$$x = -\frac{a_2}{3} \tag{19}$$

(ii) $D = 0$，$q \neq 0$ の場合（2 重根）

$\omega = 1$ のとき，

$$x = -\frac{a_2}{3} - 2\sqrt[3]{\frac{q}{2}} \tag{20}$$

$\omega = (-1 \pm \sqrt{3}\mathrm{i})/2$ のとき，

$$x = -\frac{a_2}{3} + \sqrt[3]{\frac{q}{2}} \tag{21}$$

(iii) $D > 0$ の場合

$$x = -\frac{a_2}{3} + \omega \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \mathrm{i}\sqrt{D}} + \overline{\omega} \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \mathrm{i}\sqrt{D}} = -\frac{a_2}{3} + \omega(R + \mathrm{i}Q) + \overline{\omega}(R - \mathrm{i}Q) \tag{22}$$

$$R = \left[\left(\frac{q}{2}\right)^2 + D\right]^{1/6} \cos\frac{\theta}{3}, \tag{23}$$

$$Q = \left[\left(\frac{q}{2}\right)^2 + D\right]^{1/6} \sin\frac{\theta}{3}, \tag{24}$$

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{D}}{-q/2} \tag{25}$$

$\omega = 1$ のとき,

$$x = -\frac{a_2}{3} + 2R \tag{26}$$

$\omega = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3}\mathrm{i})$ のとき,

$$x = -\frac{a_2}{3} - R - \sqrt{3}Q \tag{27}$$

$\omega = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{3}\mathrm{i})$ のとき,

$$x = -\frac{a_2}{3} - R + \sqrt{3}Q \tag{28}$$

(iv) $D < 0$ の場合

$$x = -\frac{a_2}{3} + \omega\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{-D}} + \overline{\omega}\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{-D}} = -\frac{a_2}{3} + \omega S + \overline{\omega}T \tag{29}$$

$$S = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{-D}}, \tag{30}$$

$$T = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{-D}} \tag{31}$$

$\omega = 1$ のとき,

$$x = -\frac{a_2}{3} + S + T \tag{32}$$

$\omega = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3}\mathrm{i})$ のとき,

$$x = -\frac{a_2}{3} - \frac{1}{2}(S + T) + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}(S - T) \tag{33}$$

$\omega = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{3}\mathrm{i})$ のとき,

$$x = -\frac{a_2}{3} - \frac{1}{2}(S + T) - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}(S - T) \tag{34}$$

# プログラムソース

```
/* solve_cubic_eq.c  -o  solve_cubic_eq */
/* 2016.7.13 by M. Suzuki */

#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>

double cube_root(double x)
{
    double z;
    z=pow(fabs(x), 1.0/3.0);
    if(x<0) return -z;
    else return z;
}

/*                                                                       */
/*  Solve the cubic equation by Cardano's method.                        */
/*                                                                       */
int cubic_equation(double a2, double a1, double a0, double *solution)
{
```

```
    int i;
    double u, v, x, y;
    double p, q, theta;
    double A, B, C, D, F, R, Q, S, T;

    p=3*a1-a2*a2;
    q=27*a0-9*a1*a2+2*a2*a2*a2;
    D=q*q+4*p*p*p;
    D/=(54*54);
    D*=-1;
    p/=3;
    q/=27;
    A=-a2/3;
    B=-q/2;
    C=sqrt(fabs(D));
    for(i=0;i<5;i++) solution[i]=0;

    if(D==0.0)
    {
        if(q==0)
        {
            for(i=0;i<3;i++) solution[i]=A;
        }
        else
        {
            F=cube_root(B);
            solution[0]=A+2*F;
            solution[1]=solution[2]=A-F;
        }
    }
    else if(D>0)
    {
        x=B*B+D;
        y=pow(x, 1.0/6.0);
        theta=atan2(C, B);
        theta/=3;
        R=y*cos(theta);
        Q=y*sin(theta)*sqrt(3);
        solution[0]=A+2*R;
        solution[1]=A-R-Q;
        solution[2]=A-R+Q;
    }
    else
    {
        S=cube_root(B+C);
        T=cube_root(B-C);
        solution[0]=A+S+T;
        solution[1]=solution[2]=A-(S+T)/2;
        y=sqrt(3)/2;
        solution[3]=solution[4]=(S-T)*y;
        solution[4]*=-1;
    }
    return 0;
}

int main(int argc, char *argv[])
{
```

```
    int i;
    double a2, a1, a0, x, y;
    double solution[5];

    a2=atof(argv[1]);
    a1=atof(argv[2]);
    a0=atof(argv[3]);

    printf("a2 %lf\t a1 %lf\t a0 %lf\n", a2, a1, a0);

    i=cubic_equation(a2, a1, a0, solution);

    printf("%lf\n", solution[0]);
    printf("%lf\t%lf\n", solution[1], solution[3]);
    printf("%lf\t%lf\n", solution[2], solution[4]);
}
```