反変ベクトル，共変ベクトル，計量テンソルに関するメモ

2014.6.19　　鈴木　実

(1) 共変基底ベクトル，反変ベクトル

斜交座標軸に沿って基底ベクトルを定義する．これを $\mathbf{e}_1$，$\mathbf{e}_2$，$\mathbf{e}_3$ とし，共変基底ベクトルとする．ベクトル $\mathbf{A}$ を共変基底ベクトルを用いて表現すると、

$$\mathbf{A} = A^1\mathbf{e}_1 + A^2\mathbf{e}_2 + A^3\mathbf{e}_3 \tag{1}$$

とすることができる。この時、係数の A^1–A^3 は $\mathbf{A}$ の反変成分といい、上付きの添字で成分を表す．(A^1, A^2, A^3) を反変ベクトルという．通常の位置座標を表すベクトルは反変ベクトルである．方向と大きさが一定のベクトルに対し，基底を大きくすると，反変成分は逆に小さくなるので，反変 (contravariant) と呼ぶ．

(2) 双対基底

共変基底ベクトル $\mathbf{e}_j$ に対し、

$$\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_j = \delta^i_j \tag{2}$$

を満たす $\mathbf{e}^i$ $(i = 1, 2, 3)$ を共変基底 $\mathbf{e}_j$ に双対であるといい，反変基底ベクトルという．δ^i_j はクロネッカーの δ である．

(3) 共変ベクトル

ベクトル $\mathbf{A}$ を反変基底ベクトル $\mathbf{e}^i$ $(i = 1, 2, 3)$ で表示すると，

$$\mathbf{A} = A_1\mathbf{e}^1 + A_2\mathbf{e}^2 + A_3\mathbf{e}^3 \tag{3}$$

と表すことができる．この時，A_i を共変成分といい，この成分で表されるベクトル (A_1, A_2, A_3) を共変ベクトルという．(3) の両辺と $\mathbf{e}_i$ の内積をとると，

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{A} = A_i \tag{4}$$

となる．一定の $\mathbf{A}$ に対して，$\mathbf{e}_i$ が増加すると，A_i も増加する．これは A^i と反対で，これによって共変成分という．もう一つ，大事な点は，(4) の左辺は $\mathbf{A}$ の斜交座標軸への射影に基底の大きさを書けたものである．基底が単位ベクトルの場合は $\mathbf{A}$ の斜交座標軸への射影である．つまり，基底の大きさを乗じたベクトルの座標軸への射影は共変ベクトルの成分を表す．

以上から明らかなように，直交座標系で正規基底（単位ベクトル）の場合は，反変基底は共変基底と一致し，反変ベクトルも共変ベクトルと等しいため，両者は区別する必要がない．

(4) 内積，計量テンソル

反変ベクトルで表したベクトル $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ の内積は

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (A^1\mathbf{e}_1 + A^2\mathbf{e}_2 + A^3\mathbf{e}_3) \cdot (B^1\mathbf{e}_1 + B^2\mathbf{e}_2 + B^3\mathbf{e}_3) = \sum_{ij} g_{ij} A^i B^j \tag{5}$$

となる．ただし，g_{ij} は

$$g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j \tag{6}$$

である．この g_{ij} を計量テンソル (metric tensor) という．

共変ベクトル $\mathbf{A}$ と共変ベクトル $\mathbf{B}$ の内積は

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = (A_1\mathbf{e}^1 + A_2\mathbf{e}^2 + A_3\mathbf{e}^3)\cdot(B_1\mathbf{e}^1 + B_2\mathbf{e}^2 + B_3\mathbf{e}^3) = \sum_{ij} g^{ij} A_i B_j \tag{7}$$

と表される．ただし，$g^{ij} = \mathbf{e}^i\cdot\mathbf{e}^j$ である．この g^{ij} も計量テンソルで，反変 2 階のテンソルである．

共変ベクトル $\mathbf{A}$ と反変ベクトル $\mathbf{B}$ の内積，あるいは反変ベクトル $\mathbf{A}$ と共変ベクトル $\mathbf{B}$ の内積は

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = (A_1\mathbf{e}^1 + A_2\mathbf{e}^2 + A_3\mathbf{e}^3)\cdot(B^1\mathbf{e}_1 + B^2\mathbf{e}_2 + B^3\mathbf{e}_3) = \sum_{i} A_i B^i \tag{8}$$

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = (A^1\mathbf{e}_1 + A^2\mathbf{e}_2 + A^3\mathbf{e}_3)\cdot(B_1\mathbf{e}^1 + B_2\mathbf{e}^2 + B_3\mathbf{e}^3) = \sum_{i} A^i B_i \tag{9}$$

となり，計量テンソルが現れない．

(5) 反変成分と共変成分の関係

反変基底による表現と共変基底による表現は同じベクトルを表すので，

$$A_1\mathbf{e}^1 + A_2\mathbf{e}^2 + A_3\mathbf{e}^3 = A^1\mathbf{e}_1 + A^2\mathbf{e}_2 + A^3\mathbf{e}_3 \tag{10}$$

この関係式から，$\mathbf{e}_i$ または $\mathbf{e}^i$ との内積をとることにより，次の関係式が得られる．

$$A_i = \sum_j g_{ij} A^j \tag{11}$$

$$A^i = \sum_j g^{ij} A_j \tag{12}$$

これにより，反変成分と共変成分の変換が可能になる．

(11) から A^j を解くことができる．クラメルの公式を用いると，

$$A^j = \sum_k \frac{G_{kj}}{G} A_k \tag{13}$$

となる．ただし，G は計量テンソルの行列式，G_{kj} は計量テンソルの第 k 行第 j 列の余因子である．

以上