Onsagerの2次元イジングモデル厳密解の論文を読む　その9

2017.12.7　　鈴木　実

13　SOLUTION OF THE EIGENWERT PROBLEM　固有値問題の解

愈々，式 (O-29)，すなわち，$V = \mathrm{e}^{H'A}\mathrm{e}^{H^*B}$ の最大固有値 $\lambda_{\max}$ を求め，分配関数 Z を明らかにして 2 次元イジングモデルを解く段階に入った．Onsager は，ここまで来たら簡単で，式 (O-77) または式 (O-82) あるいは式 (O-83) で表される行列の固有値問題で 1 組の 2 次方程式を解くだけであると記している[1]．

分配関数を求める方法として行列のトレースの計算する方法が見出されたが，これは本来，スピン列の統計問題に特有のことだったと考えられる．それが，Kramers-Wannier により，スピンの螺旋列に 1 個加えたときの分配関数の増分を行列で表現し，その固有値が 1 個当りの分配関数と解釈された．ここまではよいとして，そのときの固有関数の自乗をそのスピン配置の分布確率と書いている．Onsager もこの節の冒頭に同じ解釈を書いている．この解釈自体はこの後の議論に出てくることはないが，この考えは量子力学における波動関数の解釈であって，現在の統計物理学では正しい表現ではない．分布確率はその状態のエネルギー値で決定されるため，スピン列が決まれば分布確率は求められるが，固有関数を用いるのではなく，分配関数を用いる．当時は量子力学と統計物理学が十分整理されていなかったか，あるいは他の理由により部分的にこのような誤解があったかもしれない．

＊　＊　＊　＊　＊

固有値を求める行列は V であるが，これを自己随伴形 (self-adjoint) にしたいので，次のように相似変換で変形する．

$$\begin{aligned}\overline{V} &= V_1^{-1/2} V V_1^{1/2} = V_1^{1/2} V_2 V_1^{1/2} \\ &= (2\sinh 2H)^{n/2}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}H'A}\mathrm{e}^{H^*B}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}H'A}\end{aligned} \tag{O-84}$$

このように変形しても，相似変換では固有値は変わらないので，$\overline{V}$ と V の固有値は等しい．

$\overline{V}$ の固有値を求めるため，第 1 段階として，$\overline{V}$ を $X_0, X_1, \cdots, X_n$ のみ，あるいは $X_0^*, X_1^*, \cdots, X_n^*$ のみで表現する．両者はこの後で示す直交演算子の式 (11) で相互に変換することができる．これを示す前に次の関係式が成り立つことを明らかにしておこう．$Z_r^2 = R_r$ などの式 (O-68)[1] の関係式を利用すると，

$$\begin{aligned}\exp(\mathrm{i}\,\alpha Z_r) &= \cos(\alpha Z_r) + \mathrm{i}\,\sin(\alpha Z_r) \\ &= 1 - \frac{1}{2!}(\alpha Z_r)^2 + \frac{1}{4!}(\alpha Z_r)^4 - \frac{1}{6!}(\alpha Z_r)^6 + \cdots \\ &\qquad + \mathrm{i}\left[\alpha Z_r - \frac{1}{3!}(\alpha Z_r)^3 + \frac{1}{5!}(\alpha Z_r)^5 + \cdots\right] \\ &= 1 - R_r + R_r\left(1 - \frac{1}{2!}\alpha^2 + \frac{1}{4!}\alpha^4 - \frac{1}{6!}\alpha^6 + \cdots\right) \\ &\qquad + \mathrm{i}\,Z_r\left(\alpha - \frac{1}{3!}\alpha^3 + \frac{1}{5!}\alpha^5 + \cdots\right) \\ &= 1 - R_r + R_r\cos\alpha + \mathrm{i}\,Z_r\sin\alpha\end{aligned} \tag{1}$$

[1]しかし，式 (O-83) の行列は現れてこない．厳密には式 (O-83b) はあるが式 (O-83) はない．

である．この式は，Z_r を X_r または Y_r としても成り立つ．また，同じことであるが，

$$\cos(\alpha Z_r) = 1 - R_r + R_r \cos\alpha \tag{2}$$
$$\sin(\alpha Z_r) = Z_r \sin\alpha \tag{3}$$

が成り立つ．この式においても，Z_r を X_r または Y_r に換えても成り立つ．

双曲線関数でも同様に，

$$\exp(\alpha X_r) = 1 - R_r + R_r \cosh\alpha + X_r \sinh\alpha \tag{4}$$
$$\exp(\alpha Y_r) = 1 - R_r + R_r \cosh\alpha + Y_r \sinh\alpha \tag{5}$$
$$\exp(\alpha Z_r) = 1 - R_r + R_r \cosh\alpha + Z_r \sinh\alpha \tag{6}$$

が成り立つ．また，これを用いると，

$$\begin{aligned}
X_r \cos(\alpha Z_r) &= X_r \left[1 - R_r + R_r \left(1 - \frac{1}{2!}\alpha^2 + \frac{1}{4!}\alpha^4 - \frac{1}{6!}\alpha^6 + \cdots\right)\right] \\
&= X_r - X_r + X_r \left(1 - \frac{1}{2!}\alpha^2 + \frac{1}{4!}\alpha^4 - \frac{1}{6!}\alpha^6 + \cdots\right) \\
&= X_r \cos\alpha && (7) \\
X_r \sin(\alpha Z_r) &= X_r Z_r \left(\alpha - \frac{1}{3!}\alpha^3 + \frac{1}{5!}\alpha^5 - \cdots\right) \\
&= X_r Z_r \sin\alpha = \mathrm{i}\, Y_r \sin\alpha && (8) \\
Y_r \cos(\alpha Z_r) &= Y_r \cos\alpha && (9) \\
Y_r \sin(\alpha Z_r) &= Y_r Z_r \sin\alpha = -\mathrm{i}\, X \sin\alpha && (10)
\end{aligned}$$

などが成り立つ．これらの公式では，指数関数の指数部ある X_r，Y_r，Z_r などの演算子が，四元数代数の結果，指数部から降りて 1 次因数になる．これを利用すると，関連する多くの式が簡単になる．

次の式は，Onsager が述べるところの X_r と X_r^* の間の相互変換の演算子である．式 (1) の関係を利用すると，

$$\begin{aligned}
\exp\left(\sum_{r=1}^{n-1} \frac{\mathrm{i}\pi(n-r)}{2n} Z_r\right) &= \prod_{r=1}^{n-1} \left[1 - R_r + R_r \cos\frac{\pi(n-r)}{2n} + \mathrm{i}\, Z_r \sin\frac{\pi(n-r)}{2n}\right] \\
&= \prod_{r=1}^{n-1} \left[1 - R_r \left(1 - \sin\frac{\pi r}{2n}\right) + \mathrm{i}\, Z_r \cos\frac{\pi r}{2n}\right] && (11)
\end{aligned}$$

が成り立つ．Onsager が述べているように，式 (11) が直交演算子になって X_r と X_r^* を相互変換することを示すそう．簡単のために，$\omega = r\pi/n$ とおく．式 (11) を相互変換の演算子として X_r を変換してみる．そうすると，式 (O-68) の関係式を用いて丹念に計算して，

$$\begin{aligned}
&\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega Z_r/2} X_r \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega Z_r/2} \\
&= \{1 - R_r \left(1 - \sin\frac{\omega}{2}\right) - \mathrm{i}\, Z_r \cos\frac{\omega}{2}\} X_r \{1 - R_r \left(1 - \sin\frac{\omega}{2}\right) + \mathrm{i}\, Z_r \cos\frac{\omega}{2}\} = -X_r \cos\omega + Y_r \sin\omega && (12) \\
&\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega Z_r/2} Y_r \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega Z_r/2} \\
&= \{1 - R_r \left(1 - \sin\frac{\omega}{2}\right) - \mathrm{i}\, Z_r \cos\frac{\omega}{2}\} Y_r \{1 - R_r \left(1 - \sin\frac{\omega}{2}\right) + \mathrm{i}\, Z_r \cos\frac{\omega}{2}\} = X_r \sin\omega - Y_r \cos\omega && (13) \\
&\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega Z_r/2} Z_r \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega Z_r/2} \\
&= \{1 - R_r \left(1 - \sin\frac{\omega}{2}\right) - \mathrm{i}\, Z_r \cos\frac{\omega}{2}\} Z_r \{1 - R_r \left(1 - \sin\frac{\omega}{2}\right) + \mathrm{i}\, Z_r \cos\frac{\omega}{2}\} = Z_r && (14)
\end{aligned}$$

となる．これではまだこの後の式 (O-86) の X_r^*，X_r^*，X_r^* への変換にはならない．そうするためには，Onsager が P.134 の脚注に書いているように，$1-R_r+X_r$ を用いて再度相似変換する必要がある．そうすると，

$$\{1-R_r+X_r\}(-X_r\cos 2\omega+Y_r\sin 2\omega)\{1-R_r+X_r\}=-X_r\cos 2\omega+Y_r\sin 2\omega \tag{15}$$

$$\{1-R_r+X_r\}(X_r\sin 2\omega-Y_r\cos 2\omega)\{1-R_r+X_r\}=X_r\sin 2\omega+Y_r\cos 2\omega \tag{16}$$

$$\{1-R_r+X_r\}Z_r\{1-R_r+X_r\}=Z_r \tag{17}$$

となり，Z_r 以外，X_r^*，Y_r^* へ変換される．Z_r が変換されないのは，ここの変換演算子が Z_r の回りの回転だからである．

次の式は上の変換を一般化したもので，$\overline{V}$ の対角化に有用である．

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\alpha Z_r}(X_r\cos\beta+Y_r\sin\beta)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\alpha Z_r}=X_r\cos(2\alpha+\beta)+Y_r\sin(2\alpha+\beta) \tag{O-85}$$

この式の左辺は，

$$\begin{aligned}
&[\cos(\alpha Z_r)+\mathrm{i}\,\sin(\alpha Z_r)](X_r\cos\beta+Y_r\sin\beta)[\cos(\alpha Z_r)-\mathrm{i}\,\sin(\alpha Z_r)]\\
&=[1-R_r+R_r\cos\alpha+\mathrm{i}\,Z_r\sin\alpha]\;X_r\cos\beta[1-R_r+R_r\cos\alpha-\mathrm{i}\,Z_r\sin\alpha]\\
&+[1-R_r+R_r\cos\alpha+\mathrm{i}\,Z_r\sin\alpha]Y_r\sin\beta[1-R_r+R_r\cos\alpha-\mathrm{i}\,Z_r\sin\alpha]
\end{aligned} \tag{18}$$

となり，ここで，R_r は演算で単位元としてふるまい，したがって，$1-R_r$ は演算で 0 となることから，

$$\begin{aligned}
&=[X_r\cos^2\alpha\cos\beta\ +Z_rX_rZ_r\ \sin^2\alpha\ \cos\beta+\mathrm{i}\,Z_rX_r\sin\alpha\cos\beta\cos\alpha-\mathrm{i}\,X_rZ_r\cos\alpha\cos\beta\sin\alpha]\\
&\quad+[Y_r\cos^2\alpha\sin\beta\ +Z_rY_rZ_r\ \sin^2\alpha\ \sin\beta+\mathrm{i}\,Z_rY_r\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha-\mathrm{i}\,Y_rZ_r\cos\alpha\sin\beta\sin\alpha]\\
&=[X_r\cos^2\alpha\cos\beta\ -X_r\ \sin^2\alpha\ \cos\beta+,Y_r\sin\alpha\cos\beta\cos\alpha+Y_r\cos\alpha\cos\beta\sin\alpha]\\
&\quad+[Y_r\cos^2\alpha\sin\beta\ -Y_r\ \sin^2\alpha\ \sin\beta-\mathrm{i}\,X_r\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha-X_r\cos\alpha\sin\beta\sin\alpha]\\
&=X_r(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)\cos\beta+2Y_r\sin\alpha\cos\beta\cos\alpha+Y_r(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)\sin\beta+2X_r\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha\\
&=X_r(\cos 2\alpha\cos\beta-\sin 2\alpha\sin\beta)+Y_r(\sin 2\alpha\cos\beta+\cos 2\alpha\sin\beta)\\
&=X_r\cos(2\alpha\cos\beta)+Y_r\sin(2\alpha+\beta)
\end{aligned} \tag{19}$$

となり，式 (O-85) が成り立つ．この式で，$2\alpha+\beta=0$ とか，$2\alpha+\beta=\pi/2$，あるいは，$\beta=0$ とか，$\beta=\pi/2$ と選ぶと，相似変換で X_r や Y_r を消去することができる．大変上手い方法である．

ここで，前節で導入された X_r^*，Y_r^*，Z_r^* を書き下ろすと，

$$X_r^*=-X_r\cos\frac{r\pi}{n}+Y_r\sin\frac{r\pi}{n} \tag{O-86-1}$$

$$Y_r^*=X_r\sin\frac{r\pi}{n}+Y_r\cos\frac{r\pi}{n} \tag{O-86-2}$$

$$Z_r^*=-Z_r \tag{O-86-3}$$

$$X_0^*=-X_0,\quad X_n^*=X_n,\quad Y_0^*=Y_n^*=0 \tag{20}$$

である．ここで，式 (O-85-2)$\times\sin(r\pi/n)-$ 式 (O-85-1)$\times\cos(r\pi/n)$ などにより，

$$X_r=-X_r^*\cos\frac{r\pi}{n}+Y_r^*\sin\frac{r\pi}{n} \tag{21}$$

$$Y_r=X_r^*\sin\frac{r\pi}{n}+Y_r^*\cos\frac{r\pi}{n} \tag{22}$$

となる．

ここで，式 (O-73-1) [2] より，

$$A=-X_0^*-2\sum_{r=1}^{n-1}X_r^*-X_n^* \tag{23}$$

式 (O-79-1)[2] に式 (21)，(22) を代入することにより，

$$B = -X_0 - 2\sum_{r=1}^{n-1} X_r - X_n \tag{24}$$

$$= X_0^* + 2\sum_{r=1}^{n-1}\left(X_r^*\cos\frac{r\pi}{n} - Y_r^*\sin\frac{r\pi}{n}\right) + X_n^* \tag{25}$$

である．式 (23) と式 (24) を式 (O-84) に代入する．X_r^* と X_s は添字が異なれば可換であること，および $X_0^* = -X_0$，$X_n^* = X_n$ が可換であることを利用して，総和を総乗に直し，添字が等しい非可換な部分をそのまま残すと，

$$\begin{aligned}
\overline{V} &= (2\sinh 2H)^{n/2}(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}H'X_0^*}\mathrm{e}^{-H'\sum X_r^*}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}H'X_n^*})\,(\mathrm{e}^{-H^*X_0}\mathrm{e}^{-2H^*\sum X_r}\mathrm{e}^{-H^*X_n})\,(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}H'X_0^*}\mathrm{e}^{-H'\sum X_r^*}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}H'X_n^*})\\
&= (2\sinh 2H)^{n/2}(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}H'X_0^*}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}H'X_0^*}\mathrm{e}^{-H^*X_0})\,(\mathrm{e}^{-H'\sum X_r^*}\mathrm{e}^{-2H^*\sum X_r}\mathrm{e}^{-H'\sum X_r^*})\,(\mathrm{e}^{-H^*X_n}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}H'X_n^*}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}H'X_n^*})\\
&= (2\sinh 2H)^{n/2}\mathrm{e}^{-H'X_0^*+H^*X_0^*}\left[\prod_{r=1}^{n-1}\mathrm{e}^{-H'X_r^*}\prod_{r=1}^{n-1}\mathrm{e}^{-2H^*X_r}\prod_{r=1}^{n-1}\mathrm{e}^{-H'X_r^*}\right]\mathrm{e}^{-H^*X_n^*-H'X_n^*}\\
&= (2\sinh 2H)^{n/2}\mathrm{e}^{(H^*-H')X_0^*}\left[\prod_{r=1}^{n-1}\mathrm{e}^{-H'X_r^*}\mathrm{e}^{-2H^*X_r}\mathrm{e}^{-H'X_r^*}\right]\mathrm{e}^{-(H^*+H')X_n^*}\\
&= (2\sinh 2H)^{n/2}\mathrm{e}^{(H^*-H')X_0^*}\left[\prod_{r=1}^{n-1}U_r\right]\mathrm{e}^{-(H^*+H')X_n^*}
\end{aligned}\tag{O-87}$$

となる．ただし，ここで，

$$U_r = \mathrm{e}^{-H'X_r^*}\mathrm{e}^{-2H^*X_r}\mathrm{e}^{-H'X_r^*} \tag{26}$$

とおいた．この U_r が対角化しようとする主たる部分になる．U_r はまだ X_r^* 以外の演算子を含んでいるので，X_r^* のみからなる対角化できる形に変形したい．そこをねらって，U_r を式 (4) を用いて展開しよう．$r\pi/n = \omega_r$ とおく．

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{-H'X_r^*} &= 1 - R_r + R_r^*\cosh H' - X_r^*\sinh H'\\
&= 1 - R_r + R_r(\cosh H' - X_r^*\sinh H')
\end{aligned}\tag{27}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{-2H^*X_r} &= 1 - R_r + R_r(\cosh 2H^* - X_r\sinh 2H^*)\\
&= 1 - R_r + R_r[\cosh 2H^* + X_r^*\cos\omega_r\sinh 2H^* - Y_r^*\sin\omega_r\sinh 2H^*]
\end{aligned}\tag{28}$$

であるから，

$$\begin{aligned}
U_r &= [1 - R_r + R_r(\cosh H' - X_r^*\sinh H')]\\
&\quad\times\{1 - R_r + R_r[\cosh 2H^* + X_r^*\cos\omega_r\sinh 2H^* - Y_r^*\sin\omega_r\sinh 2H^*]\}\\
&\quad\times[1 - R_r + R_r(\cosh H' - X_r^*\sinh H')]\\
&= [1 - R_r + R_r(\cosh H' - X_r^*\sinh H')]^2(1 - R_r)\\
&\quad+ [1 - R_r + R_r(\cosh H' - X_r^*\sinh H')]^2R_r\cosh 2H^*\\
&\quad+ [1 - R_r + R_r(\cosh H' - X_r^*\sinh H')]^2R_rX_r^*\cos\omega\sinh 2H^*\\
&\quad- [1 - R_r + R_r(\cosh H' - X_r^*\sinh H')]Y_r^*\sin\omega_r\sinh 2H^*[1 - R_r + R_r(\cosh H' - X_r^*\sinh H')]
\end{aligned}\tag{29}$$

となる．式が長いので各項毎に計算しよう．$1 - R_r$ は演算子と演算して 0 になることに注意しよう．

式 (23) の第 1 項

$$
\begin{aligned}
&= [(1-R_r)^2 + 2(1-R_r)R_r(\cosh H' - X_r^* \sinh H') + (\cosh H' - X_r^* \sinh H')^2 R_r^2](1-R_r) \\
&= [(1-R_r) + (\cosh^2 H' - 2X_r^* \cosh H' \sinh H' + X_r^{*2} \sinh^2 H')R_r](1-R_r) \\
&= [1 - R_r + (R_r \cosh 2H' - X_r^* \sinh 2H')](1-R_r) \\
&= 1 - R_r
\end{aligned} \tag{30}
$$

式 (23) の第 2 項

$$
\begin{aligned}
&= [1 - R_r + (R_r \cosh 2H' - X_r^* \sinh 2H')]R_r \cosh 2H^* \\
&= \cosh 2H^* (R_r \cosh 2H' - X_r^* \sinh 2H')
\end{aligned} \tag{31}
$$

式 (23) の第 3 項

$$
\begin{aligned}
&= [1 - R_r + (R_r \cosh 2H' - X_r^* \sinh 2H')]R_r X_r^* \cos\omega_r \sinh 2H^* \\
&= (R_r \cosh 2H' - X_r^* \sinh 2H')R_r X_r^* \cos\omega_r \sinh 2H^* \\
&= X_r^* \cos\omega_r \sinh 2H^* \cosh 2H' - R_r \cos\omega_r \sinh 2H^* \sinh 2H'
\end{aligned} \tag{32}
$$

式 (23) の第 4 項

$$
\begin{aligned}
&= -[1 - R_r + R_r(\cosh H' - X_r^* \sinh H')]Y_r^* \sin\omega_r \sinh 2H^* (\cosh H' - X_r^* \sinh H') \\
&= -Y_r^* (\cosh H' + X_r^* \sinh H') \sin\omega_r \sinh 2H^* (\cosh H' - X_r^* \sinh H') \\
&= -Y_r^* (\cosh H' + X_r^* \sinh H')(\cosh H' - X_r^* \sinh H') \sin\omega_r \sinh 2H^* \\
&= -Y_r^* (\cosh^2 H' - R_r \sinh^2 H') \sin\omega_r \sinh 2H^* \\
&= -(Y_r^* \cosh^2 H' - Y_r^* \sinh^2 H') \sin\omega_r \sinh 2H^* \\
&= -Y_r^* \sin\omega_r \sinh 2H^*
\end{aligned} \tag{33}
$$

式 (30)–(33) を式 (29) に代入して，

$$
\begin{aligned}
U_r &= (1-R_r) + \cosh 2H^* (R_r \cosh 2H' - X_r^* \sinh 2H') \\
&\quad + (X_r^* \cos\omega_r \sinh 2H^* \cosh 2H' - R_r \cos\omega_r \sinh 2H^* \sinh 2H') - Y_r^* \sin\omega_r \sinh 2H^* \\
&= (1-R_r) + R_r(\cosh 2H' \cosh 2H^* - \sinh 2H' \sinh 2H^* \cos\omega_r) \\
&\quad - X_r^* (\sinh 2H' \cosh 2H^* - \cosh 2H' \sinh 2H^* \cos\omega_r) - Y_r^* \sin\omega_r \sinh 2H^*
\end{aligned} \tag{O-87a}
$$

とやや長い式になる．

U_r^{-1} を考えてみよう．式 (26) から

$$
U_r^{-1} = \mathrm{e}^{H' X_r^*} \mathrm{e}^{2H^* X_r} \mathrm{e}^{H' X_r^*} \tag{34}
$$

であることがすぐわかる．U_r から U_r^{-1} への変換行列を T とすると，

$$
U_r^{-1} = T^{-1} U_r T \tag{35}
$$

である．これが論文では，U_r の因数の形から，

$$
T = (1-R_r) + \mathrm{i}\, Z_r \tag{36}
$$

であるとしてある．これから，

$$T^{-1} = (1 - R_r) - \mathrm{i}\, Z_r \tag{37}$$

ということがわかる．実際，

$$T\,T^{-1} = [(1 - R_r) + \mathrm{i}\, Z_r][(1 - R_r) - \mathrm{i}\, Z_r] = (1 - R_r) + Z_r^2 = (1 - R_r) + R_r = 1 \tag{38}$$

であるから逆演算子であることがわかる．

式 (37) が実際成り立つことは，式 (26) に左から Z_r を掛けると，$Z_r^* = -Z_r$ と X_r^*，X_r の反交換関係から，

$$Z_r \mathrm{e}^{-H' X_r^*} \mathrm{e}^{-2H^* X_r} \mathrm{e}^{-H' X_r^*} = \mathrm{e}^{H' X_r^*} \mathrm{e}^{2H^* X_r} \mathrm{e}^{H' X_r^*} Z_r \tag{39}$$

であることと[2]，

$$(1 - R_r) \mathrm{e}^{-H' X_r^*} \mathrm{e}^{-2H^* X_r} \mathrm{e}^{-H' X_r^*} = 0 \tag{40}$$

および

$$Z_r(1 - R_r + Z_r) = R_r \tag{41}$$

という関係を使えば，

$$[(1 - R_r) + \mathrm{i}\, Z_r] \mathrm{e}^{-H' X_r^*} \mathrm{e}^{-2H^* X_r} \mathrm{e}^{-H' X_r^*} [(1 - R_r) - \mathrm{i}\, Z_r] = \mathrm{e}^{H' X_r^*} \mathrm{e}^{2H^* X_r} \mathrm{e}^{H' X_r^*} \tag{42}$$

となることからわかる．

この T を，式 (O-87a) に作用させてみよう．式 (O-87a) の演算子 R_r，X_r^*，Y_r^* の係数を D，E，F とすると，

$$\begin{aligned}
&[(1 - R_r) - \mathrm{i}\, Z_r][(1 - R_r) - D R_r - E X_r^* - F Y_r^*] \\
&= (1 - R_r) + \mathrm{i} Z_r D R_r + \mathrm{i} E Z_r X_r^* + \mathrm{i} F Z_r Y_r^* \\
&= (1 - R_r) + \mathrm{i} D Z_r - \mathrm{i} E X_r^* Z_r - \mathrm{i} F Y_r^* Z_r
\end{aligned} \tag{43}$$

となる．これに右から $[(1 - R_r) + \mathrm{i}\, Z_r]$ を掛けると，

$$\begin{aligned}
&[(1 - R_r) + \mathrm{i} D Z_r - \mathrm{i} E X_r^* Z_r - \mathrm{i} F Y_r^* Z_r][(1 - R_r) + \mathrm{i}\, Z_r] \\
&= (1 - R_r) - D Z_r^2 + E X_r^* Z_r^2 + F Y_r^* Z_r^2 \\
&= (1 - R_r) - D R_r + E X_r^* + F Y_r^*
\end{aligned} \tag{44}$$

となる．これから，U_r^{-1} の式では，X_r^*，Y_r^* の係数の符号が U_r と反転しているので，式 (O-87a) と式 (O-89a) から，

$$\begin{aligned}
U_r + U_r^{-1} &= 2(1 - R_r) - 2(\sinh 2H' \cosh 2H^* - \cosh 2H' \sinh 2H^* \cos \omega_r) \\
&= 2(1 - R_r) - 2R_r \cosh \gamma_r
\end{aligned} \tag{45}$$

となる．ただし，ここで，$\cosh \gamma_r$ は $2H'$，$2H^*$，ω_r から次の双曲余弦定理により決定される値である．

双曲余弦定理は双曲面上の三角形における辺と角の間の関係である．詳細は [3, 4] にあるので，ここでは簡単に，双曲余弦定理と双曲面上の三角形の辺と角の対応のみ記しておこう．双曲三角形 $\mathrm{OD'D^*}$ において，角度を ω，δ'，δ^*，対辺の長さを γ，$2H'$，$2H^*$ とすると，双曲余弦定理は，辺と角の間の関係を次の式で示す．

$$\cosh \gamma = \cosh 2H' \cosh 2H^* - \sinh 2H' \sinh 2H^* \cos \omega \tag{O-89a}$$

$$\cosh 2H^* = \cosh \gamma \cosh 2H' - \sinh \gamma \sinh 2H' \cos \delta^* \tag{46}$$

$$\cosh 2H' = \cosh \gamma \cosh 2H^* - \sinh \gamma \sinh 2H^* \cos \delta' \tag{47}$$

[2] これは，$Z_r X_r = -X_r Z_r$，$Z_r X_r^* = -X_r^* Z_r$ ということから，

$$Z_r \mathrm{e}^{-H' X_r^*} = Z_r \sum \frac{1}{n!} (-H' X_r^*)^n = \sum \frac{1}{n!} (-H' X_r^*)^n (-1)^n Z_r = \sum \frac{1}{n!} (H' X_r^*)^n Z_r$$

となることを利用している．

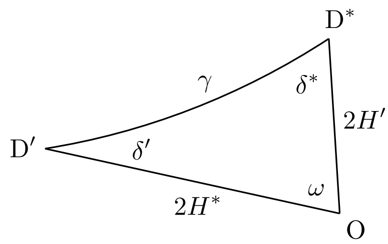

図 1: 双曲面上の三角形およびその辺長，角度

同じく，双曲正弦定理は

$$\frac{\sin\omega}{\sinh\gamma}=\frac{\sin\delta^*}{\sinh 2H^*}=\frac{\sin\delta'}{\sinh 2H'} \tag{O-89c}$$

である．式 (O-89a) と式 (46) から

$$\sinh\gamma\cos\delta^*=\sinh 2H'\cosh 2H^*-\cosh 2H'\sinh 2H^*\cos\omega \tag{O-89b}$$

が得られ，式 (O-89c) と式 (O-89b) から

$$\cot\delta^*=\frac{\sinh 2H'\coth 2H^*-\cosh 2H'\cos\omega}{\sin\omega} \tag{O-89d}$$

が得られる（導出は付録）．

ということで，以下では双曲余弦定理が効果的に用いられる．さて，式 (45) に戻ろう．この式は $U+U^{-1}$ が R_r の一次結合で表されている．$R_r=X_r^2$ の固有値は 1 か 0 であった．あるいは R_r で射影される空間では固有値が 1 である．この空間における固有ベクトル関数は明らかに $U+U^{-1}$ の固有ベクトル関数でもある．いま，$R_r\chi=\chi$ となる固有ベクトル関数 χ に式 (45) を作用させると，

$$(U+U^{-1})\chi=(e^{\gamma_r}+e^{-\gamma_r})\chi \tag{48}$$

となる．U と U^{-1} の固有値は互いに逆数に関係にあり，かつ U^{-1} は U の相似変換であるから固有値は等しい．このことと，上の結果を考えると，U の固有値は e^{γ_r} および $e^{-\gamma_r}$ であることがわかる．R_r の固有値が 0 となる固有ベクトルも

$$(U+U^{-1})\chi=2\chi \tag{49}$$

という関係を満たし，U の固有値が 1 であることに対応するが，これはあまり重要な意味を持たない．これから U_r の形が見えるように論文には書いているが，それはおそらくこういうことだろう．つまり，$R_r=X_r^2=X_r^{*2}$ の固有値 1 の固有ベクトル関数であるということは X_r あるいは X_r^* の共通な固有ベクトルでもあるから，対角型の U_r の形としては $\mathrm{e}^{\gamma_r X_r}$ か $\mathrm{e}^{\gamma_r X_r^*}$ のような形を予測できるということである．対角化されていない場合，X_r あるいは X_r^* は式 (O-86) か式 (21)，(22) のような回転が掛かっているような状態が予想される．それでは，そのような予測にしたがって，U_r を変形していこう．

式 (O-87a) に式 (O-89a)，式 (O-89b)，式 (O-89c) を代入すると，

$$\begin{aligned}U_r&=(1-R_r)+R_r\cosh\gamma_r-X_r^*\sinh\gamma_r\cos\delta_r^*-Y_r^*\sinh\gamma_r\sin\delta_r^* \\ &=(1-R_r)+R_r\cosh\gamma_r-(X_r^*\cos\delta_r^*+Y_r^*\sin\delta_r^*)\sinh\gamma_r\end{aligned} \tag{50}$$

となる．この式の右辺で，$X_r^*\cos\delta_r^*+Y_r^*\sin\delta_r^*$ に注目しよう．この式に式 (O-86) を代入し，以下のように変形して $X_{r+\delta}^*$ とおくことにする．

$$\begin{aligned}X_r^*\cos\delta^*+Y_r^*\sin\delta_r^*&=(-X_r\cos\omega_r+Y_r\sin\omega_r)\cos\delta_r^*+(X_r\sin\omega_r+Y_r\cos\omega_r)\sin\delta_r^* \\ &=-X_r\cos(\omega_r+\delta_r^*)+Y_r\sin(\omega_r+\delta_r^*)\equiv X_{r+\delta}^*\end{aligned} \tag{51}$$

この $X^*_{r+\delta}$ の $X^{*2}_{r+\delta}$ は X^*_r と同じく，R_r として振る舞う．実際，

$$
\begin{aligned}
X^*_{r+\delta} &= (X^*_r \cos\delta^*_r + Y^*_r \sin\delta^*_r)^2 = X^{*2}_r \cos^2\delta^*_r + Y^{*2}_r \sin^2\delta^*_r \\
&= R_r \cos^2\delta^*_r + R_r \sin^2\delta^*_r = R_r
\end{aligned}
\tag{52}
$$

となる．これを用いると，式 (50) は

$$
U_r = (1 - R_r) + R_r \cosh\gamma_r - X^*_{r+\delta} \sinh\gamma_r \tag{53}
$$

となる．この式の $R_r \cosh\gamma_r$ は以下のように変形できる．

$$
\begin{aligned}
R_r \cosh\gamma_r &= X^{*2}_{r+\delta_r}(1 + \frac{1}{2!}\gamma_r^2 + \frac{1}{4!}\gamma_r^2 + \cdots) \\
&= X^{*2}_{r+\delta} + \frac{1}{2!}\gamma_r^2 X^{*2}_{r+\delta} + \frac{1}{4!}\gamma_r^2 X^{*4}_{r+\delta_r} + \cdots \\
&= X^{*2}_{r+\delta} - 1 + \left[1 - \frac{1}{2!}\gamma_r^2 X^{*2}_{r+\delta} + \frac{1}{4!}\gamma_r^2 X^{*4}_{r+\delta} - \cdots\right] \\
&= R_r - 1 + \cosh(\gamma_r X^*_{r+\delta})
\end{aligned}
\tag{54}
$$

同様に，$X^*_{r+\delta} \sinh\gamma_r$ も以下のように変形できる．

$$
\begin{aligned}
X^*_{r+\delta} \sinh\gamma_r &= X^*_{r+\delta}(\gamma_r + \frac{1}{3!}\gamma_r^3 + \frac{1}{5!}\gamma_r^5 + \cdots) \\
&= \gamma_r X^*_{r+\delta} + \frac{1}{3!}\gamma_r^3 X^*_{r+\delta} + \frac{1}{5!}\gamma_r^5 X^*_{r+\delta} + \cdots) \\
&= \gamma_r X^*_{r+\delta} + \frac{1}{3!}\gamma_r^3 X^{*3}_{r+\delta} + \frac{1}{5!}\gamma_r^5 X^{*5}_{r+\delta} + \cdots) \\
&= \sinh(\gamma_r X^*_{r+\delta})
\end{aligned}
\tag{55}
$$

式 (54) と (55) を (53) に代入すると，

$$
\begin{aligned}
U_r &= \exp[-\gamma_r X^*_{r+\delta}] \\
&= \exp[-\gamma_r (X^*_r \cos\delta^*_r + Y^*_r \sin\delta^*_r)]
\end{aligned}
\tag{O-88}
$$

となる．ここまできて，U_r の形は整理され，X^*_r のみからなるまで形にするまであと一歩のところまで来た．式 (O-88) の形はまだ Y^*_r が残っているので，これを X^*_r のみ，または X_r のみにすればよい．ここで，式 (O-85) を用いる．式 (O-85) から，

$$
\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\alpha Z_r}(-\gamma)(X_r \cos\beta + Y_r \sin\beta)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\alpha Z_r} = (-\gamma)[X_r \cos(2\alpha + \beta) + Y_r \sin(2\alpha + \beta)] \tag{56}
$$

であるから，

$$
\begin{aligned}
(-\gamma)^n (X_r \cos\beta + Y_r \sin\beta)^n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\alpha Z_r} &= \{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\alpha Z_r}(-\gamma)(X_r \cos\beta + Y_r \sin\beta)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\alpha Z_r}\}^n \\
&= (-\gamma)^n [X_r \cos(2\alpha + \beta) + Y_r \sin(2\alpha + \beta)]^n
\end{aligned}
\tag{57}
$$

とすることができる．これより，

$$
\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\alpha Z_r} \exp[(-\gamma)(X_r \cos\beta + Y_r \sin\beta)]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\alpha Z_r} = \exp\{-\gamma[X_r \cos(2\alpha + \beta) + Y_r \sin(2\alpha + \beta)]\} \tag{58}
$$

が成り立つことがわかる．この式の右辺の $X_r \cos(2\alpha + \beta) + Y_r \sin(2\alpha + \beta)$ に式 (21) と (22) を代入すると，

$$
\begin{aligned}
X_r \cos(2\alpha + \beta) + Y_r \sin(2\alpha + \beta) &= (-X^*_r \cos\omega_r + Y^*_r \sin\omega_r)\cos(2\alpha + \beta) + (X^*_r \sin\omega_r + Y^*_r \cos\omega_r)\sin(2\alpha + \beta) \\
&= -X^*_r \cos(\omega_r + 2\alpha + \beta) + Y^*_r \sin(\omega_r + 2\alpha + \beta) \\
&= X^*_r \cos(\pi - \omega_r - 2\alpha - \beta) + Y^*_r \sin(\pi - \omega_r - 2\alpha - \beta)
\end{aligned}
\tag{59}
$$

となる．これを式 (58) に代入すると，

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\alpha Z_r}\exp[-\gamma(X_r\cos\beta+Y_r\sin\beta)]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\alpha Z_r}=\exp\{-\gamma[X_r^*\cos(\pi-\omega_r-2\alpha-\beta)+Y_r^*\sin(\pi-\omega_r-2\alpha-\beta)]\} \tag{60}$$

という関係式が得られる．この関係式の右辺で

$$\pi-\omega_r-2\alpha-\beta=\delta_r^* \tag{61}$$

とおくと，右辺は式 (O-88) の右辺となり U_r に一致する．すなわち，

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\alpha Z_r}\exp[-\gamma(X_r\cos\beta+Y_r\sin\beta)]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\alpha Z_r}=\exp[-\gamma(X_r^*\cos\delta_r^*+Y_r^*\sin\delta_r^*)] \tag{62}$$

となる．このとき，$\beta=0$ なら左辺指数部は $-\gamma X_r$ となり，$\beta=\pi-\omega_r$ なら左辺指数部は $-\gamma X_r^*$ となる．すなわち，
$\beta=0$ および $\alpha=\frac{1}{2}(\pi-\omega_r-\delta_r^*)$ のとき，

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(\pi-\omega_r-\delta_r^*)\mathrm{i}Z_r}\mathrm{e}^{-\gamma_r X_r}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\pi-\omega_r-\delta_r^*)\mathrm{i}Z_r}=\exp[-\gamma(X_r^*\cos\delta_r^*+Y_r^*\sin\delta_r^*)] \tag{63}$$

$\beta=\pi-\omega_r$ および $\alpha=-\frac{1}{2}\delta_r^*$ のとき，

$$\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\delta_r^*\mathrm{i}Z_r}\mathrm{e}^{-\gamma_r X_r^*}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\delta_r^*\mathrm{i}Z_r}=\exp[-\gamma(X_r^*\cos\delta_r^*+Y_r^*\sin\delta_r^*)] \tag{64}$$

となる．つまり，これで式 (62) 左辺の Y_r を消去することができた．式 (63)，(64) 右辺は U_r であるから，右辺に U_r を用いて相似変換形式に書き換えると，

$$\exp[-\tfrac{1}{2}(\pi-\omega_r-\delta_r^*)\mathrm{i}Z_r]U_r\exp[\tfrac{1}{2}(\pi-\omega_r-\delta_r^*)\mathrm{i}Z_r]=\exp(-\gamma_r X_r) \tag{O-90b}$$

$$\exp(\tfrac{1}{2}\delta_r^*\mathrm{i}Z_r)U_r\exp(-\tfrac{1}{2}\delta_r^*\mathrm{i}Z_r)=\exp(-\gamma_r X_r^*) \tag{O-90a}$$

となる．これで，r 番目の既約表現ブロック部分が対角化できた．この関係式により $\overline{V}$ を相似変換して対角化することができる．式 (O-87) に上の式 (O-90a)，(O-90b) の関係を $r=1\sim n-1$ について適用すると，

$$\begin{aligned}
&\exp\left(-\sum_{r=1}^{n-1}\tfrac{1}{2}(\pi-\omega_r-\delta_r^*)\mathrm{i}Z_r\right)\overline{V}\exp\left(\sum_{r=1}^{n-1}\tfrac{1}{2}(\pi-\omega_r-\delta_r^*)\mathrm{i}Z_r\right)\\
&\quad=(2\sinh 2H)^{n/2}\mathrm{e}^{(H^*-H')X_0^*}\left[\prod_{r=1}^{n-1}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\pi-\omega_r-\delta_r^*)\mathrm{i}Z_r}U_r\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(\pi-\omega_r-\delta_r^*)\mathrm{i}Z_r}\right]\mathrm{e}^{-(H^*+H')X_n^*}\\
&\quad=(2\sinh 2H)^{n/2}\mathrm{e}^{(H^*-H')X_0^*}\left[\prod_{r=1}^{n-1}\mathrm{e}^{-\gamma_r X_r}\right]\mathrm{e}^{-(H^*+H')X_n^*}\\
&\quad=(2\sinh 2H)^{n/2}\exp\left((H'-H^*)X_0-\sum_{r=1}^{n-1}\gamma_r X_r-(H^*+H')X_n\right)
\end{aligned} \tag{O-91b}$$

X_r^* に関しては，

$$\begin{aligned}
&\exp\left(\sum_{r=1}^{n-1}\tfrac{1}{2}\delta_r^*\mathrm{i}Z_r\right)\overline{V}\exp\left(-\sum_{r=1}^{n-1}\tfrac{1}{2}\delta_r^*\mathrm{i}Z_r\right)\\
&\quad=(2\sinh 2H)^{n/2}\mathrm{e}^{(H^*-H')X_0^*}\left[\prod_{r=1}^{n-1}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\delta_r^*\mathrm{i}Z_r}U_r\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\delta_r^*\mathrm{i}Z_r}\right]\mathrm{e}^{-(H^*+H')X_n^*}\\
&\quad=(2\sinh 2H)^{n/2}\mathrm{e}^{(H^*-H')X_0^*}\left[\prod_{r=1}^{n-1}\mathrm{e}^{-\gamma_r X_r^*}\right]\mathrm{e}^{-(H^*+H')X_n^*}\\
&\quad=(2\sinh 2H)^{n/2}\exp\left((H^*-H')X_0^*-\sum_{r=1}^{n-1}\gamma_r X_r^*-(H^*+H')X_n\right)
\end{aligned} \tag{O-91a}$$

となる．これで $\overline{V}$ は対角化された．X_r または X_r^* の共通な固有ベクトルにより，$\overline{V}$ の固有値が得られる．

式 (O-91a) あるいは式 (O-91b) は X_r または X_r^* の共通な固有ベクトル関数で対角化できる．ξ_r を X_r の固有値，χ をそれに属する固有ベクトル関数，λ を $\overline{V}$ の固有値，式 (O-91b) を $\overline{V}$ の S による相似変換とすると，

$$(S^{-1}\overline{V}S,\ \chi) = \lambda\chi \tag{65}$$

$$\ln\lambda = \frac{1}{2}n\ln(2\sinh 2H) + (H' - H*)\xi_0 - \sum_{r=1}^{n-1}\gamma_r\xi_r - (H' + H*)\xi_n \tag{66}$$

$$S = \exp\left(\sum_{r=1}^{n-1}\tfrac{1}{2}(\pi - \omega_r - \delta_r^*)\mathrm{i}Z_r\right) \tag{67}$$

である[3]．

前節 [2] で，V の最大固有値 $\lambda_{\max}$ に属し，かつ X_r の共通な固有ベクトル関数である χ_0 が導入された．その固有値は偶数の r のとき $\xi_r = 0$，奇数の r のとき $\xi_r = -1$ である．また，n が奇数のとき，$\omega = n\pi/n = \pi$ であるから，双曲余弦定理式 (O-89a) より，

$$\cosh\gamma_r = \cosh 2H'\cosh 2H^* - \sinh H'\sinh H^*\cos\frac{r\pi}{n} \tag{68}$$

であるから，

$$\begin{aligned}\cosh\gamma_n &= \cosh 2H'\cosh 2H^* - \sinh H'\sinh H^*\cos\omega_n \\ &= \cosh 2H'\cosh 2H^* + \sinh 2H'\sinh 2H^* = \cosh 2(H' + H^*)\end{aligned} \tag{69}$$

である．これから，

$$\gamma_{n+r} = \gamma_{n-r} \tag{70}$$

$$\gamma_n = 2(H' + H^*) \tag{71}$$

となる．以上のことから，

$$\lambda_{\max} - \frac{1}{2}n\ln(2\sinh 2H) = \begin{cases}\gamma_1 + \gamma_3 + \cdots + \gamma_{2m-1} & (n = 2m) \\ \\ \gamma_1 + \gamma_3 + \cdots + \gamma_{2m-1} + (H' + H*) & \\ = \gamma_1 + \gamma_3 + \cdots + \gamma_{2m-1} + \frac{1}{2}\gamma_n & (n = 2m+1)\end{cases} \tag{O-93}$$

---

[3] $\overline{V}$ の固有値 λ に属する固有ベクトル関数を ψ とする．そのとき，

$$(\overline{V},\ \psi) = \lambda\psi \tag{A}$$

である．一方，式 (O-91a) と式 (O-91b) は相似変換によって対角化された行列表現である．厳密には，X_r または X_r^* によって対角行列になる．$\overline{V}$ を相似変換する演算子を S としよう．相似変換によっても固有値は変わらない．そうすると，X_r または X_r^* の固有ベクトル関数 χ を用いると，

$$(S^{-1}\overline{V}S,\ \chi) = \lambda\chi \tag{B}$$

となる．式 (O-91b) を見れば，

$$S^{-1} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\pi - \omega_r - \delta_r^*)\mathrm{i}Z_r}$$

であることがわかる．式 (A) に演算子 S^{-1} を作用させると，

$$(S^{-1},\ (\overline{V},\ \psi)) = (S^{-1},\ \lambda\psi)$$
$$(S^{-1}\overline{V}SS^{-1},\ \psi) = \lambda(S^{-1},\ \psi)$$
$$(S^{-1}\overline{V}S,\ (S^{-1},\ \psi)) = \lambda(S^{-1},\ \psi)$$

となるが，これを式 (B) に比較すると，

$$\chi = (S^{-1},\ \psi)$$

である．これから，

$$\psi = (S,\ \chi) = (\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(\pi - \omega_r - \delta_r^*)\mathrm{i}Z_r},\ \chi)$$

となる論文では $\psi = (S^{-1},\ \chi)$ となっている．この違いが結果に影響することはない．

が成り立つ．さらに，式 (64) を用いると，n が奇数のとき，

$$\begin{aligned}\gamma_1+\gamma_3+\cdots+\gamma_{2n-1} &= 2(\gamma_1+\gamma_3+\cdots+\gamma_{n-2})+\gamma_n \\ &= 2(\gamma_1+\gamma_3+\cdots+\gamma_{n-2})+2(H'+H*)\end{aligned} \tag{72}$$

n が偶数のとき，

$$\gamma_1+\gamma_3+\cdots+\gamma_{2n-1} = 2(\gamma_1+\gamma_3+\cdots+\gamma_{n-1}) \tag{73}$$

であるから，n が偶数と奇数にかかわらず，

$$\lambda_{\max}-\frac{1}{2}n\ln(2\sinh 2H)=\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n}\gamma_{2r-1} \tag{O-93-1}$$

と共通に書くことができる．この式の γ_{2r-1} に式 (62) を代入すると，

$$\lambda_{\max}-\frac{1}{2}n\ln(2\sinh 2H)=\frac{1}{2}\sum_{1<2r<n}\cosh^{-1}(\cosh 2H'\cosh 2H^*-\sinh H'\sinh H^*\cos\frac{(2r-1)\pi}{n}) \tag{O-93-2}$$

となる．

この最大固有値 $\lambda_{\max}$ に属する固有ベクトル関数が B と共通な偶関数固有ベクトル関数 χ_0 の場合には，

$$\psi_{\max}=\left(\exp\left(\sum_{1<2r<n}\tfrac{1}{2}(\pi-\omega_{2r-1}-\delta^*_{2r-1})\mathrm{i}Z_{2r-1}\right),\ \chi_0\right) \tag{O-96a}$$

となる[4]．

また，$\lambda_{\max}$ に属する固有ベクトル関数が A と共通な偶関数固有ベクトル関数 χ_0^* の場合には，

$$\psi_{\max}=\left(\exp\left(-\sum_{r=1}^{n}\tfrac{1}{2}\delta^*_{2r-1}\,\mathrm{i}Z_{2r-1}\right),\ \chi_0^*\right) \tag{O-96b}$$

となる．

* * * * *

以上で，2 次元イジングモデルの固有値問題は解けた．これからは，分配関数を実際に計算することになる．

付録

式 (O-89a) の両辺に $\cosh 2H'/\sinh 2H'$ を掛けて少し変形すると，

$$\cosh 2H'\sinh 2H^*\cos\omega=\cosh 2H'\cosh 2H^*\frac{\cosh 2H'}{\sinh 2H'}-\cosh\gamma\frac{\cosh 2H'}{\sinh 2H'} \tag{A-1}$$

となる．この式の右辺第 2 項の $\cosh\cosh 2H'$ に式 (46) の右辺第 1 項を代入すると，

$$\begin{aligned}\cosh 2H'\sinh 2H^*\cos\omega &= \cosh 2H'\cosh 2H^*\frac{\cosh 2H'}{\sinh 2H'}-\frac{\cosh 2H^*+\sinh\gamma\sinh 2H'\cos\delta^*}{\sinh 2H'} \\ &= \frac{\cosh 2H^*}{\sinh 2H'}(\cosh^2 2H'-1)-\sinh\gamma\cos\delta^* \\ &= \frac{\cosh 2H^*}{\sinh 2H'}\sinh^2 2H'-\sinh\gamma\cos\delta^* \\ &= \cosh 2H^*\sinh 2H'-\sinh\gamma\cos\delta^*\end{aligned} \tag{74}$$

[4] この式と次の式でも S が異なる．結果に影響はない．

となる．両辺整理すると，

$$\sinh\gamma\cos\delta^* = \sinh 2H'\cosh 2H^* - \cosh 2H'\sinh 2H^*\cos\omega \tag{O-89b}$$

が得られる．

式 (O-89c) より，

$$\frac{\sinh 2H^*}{\sin\delta^*} = \frac{\sinh\gamma}{\sin\omega}$$

である．これを式 (O-89b) に辺辺掛けると，

$$\sinh\gamma\sinh 2H^*\cot\delta^* = (\sinh 2H'\cosh 2H^* - \cosh 2H'\sinh 2H^*\cos\omega)\frac{\sinh\gamma}{\sin\omega}$$

となる．したがって，

$$\cot\delta^* = (\sinh 2H'\coth 2H^* - \cosh 2H'\cos\omega)\frac{1}{\sin\omega} \tag{O-89d}$$

である．

参考文献

[1] 「その 7」(2017/11/15 のエントリー).
`http://totoha.web.fc2.com/Onsager_paper7.pdf`

[2] 「その 8」(2017/12/2 のエントリー).
`http://totoha.web.fc2.com/Onsager_paper4.pdf`

[3] 「双曲面幾何 その 2」(2017/2/10 のエントリー).
`http://totoha.web.fc2.com/Hyperboloid_geo_2.pdf`

[4] 「双曲余弦定理の補足」(2017/10/6 のエントリー).
`http://totoha.web.fc2.com/Hyperboloid_geo_S.pdf`