Onsagerの2次元イジングモデル厳密解の論文を読む　その8

2017.12.2　　鈴木　実

12　Irreducible Representations　既約表現

2次元イジングモデルを解くことは，スピンの数が十分大きい場合，$V = \mathrm{e}^{H'A}\mathrm{e}^{H^*B}$ を対角化して最大の固有値を求めることである．この段階で，ペロン-フロベニウスの定理 [1] が重要な役割をする．この定理により，$\mathrm{e}^{H'A}\mathrm{e}^{H^*B}$ は正行列であるので，最大の正の固有値が存在し，これに対応する正の固有ベクトルが存在することが示される．さらに，前節で構成された基底演算子 X_r の不変部分ベクトル空間にこの正の固有ベクトルが含まれることが示される．そして，この不変固有ベクトル空間の既約表現が求められ，これにより，この既約表現の中で固有値を求めればよいところまでイジングモデル問題が煮詰まってくる．この節では，不変固有ベクトル空間と既約表現を明らかにするところまで述べられている．

B の固有ベクトルと X_r，Y_r の不変ベクトル関数部分空間

演算子 A と B はそれぞれ式 (O-27) と (O-23) で定義される．V の固有値を求めるには，すでに固有値のわかっている，あるいは求めるのがもっと容易な演算子の系で表すことができて，さらに，その演算子の系が共通の固有ベクトルをもつなら，A と B は指数部にあるがこれを対角化するのに都合がよい．そうしたねらいをもって X_r，Y_r，Z_r，R_r という演算子系が前節で導入された．

演算子 A および B を構成するもともとの演算子は s_j と C_j である．A と B は，しかし，s_j と C_j の既約表現 (p.122 または [2]) では表せない．A と B の演算は s_j と C_j の既約表現ブロック間にまたがってしまうからである．そのままでは固有値を求めるベクトル空間は 2^n 次元におよび，直接的な対角化計算は至難である．一方，X_r，Y_r，Z_r，R_r 演算子は，A と B で表されるが，もともと s_j と C_j から組み上げられたものであり，その演算の代数は s_j と C_j と同じ次元の既約表現の中で閉じている．したがって，X_r，Y_r，Z_r，R_r 演算子を用いて表現することは，2次元の既約表現間の計算になる．これは，固有値問題の解法を著しく容易にするので，非常に重要なことなのである．

X_r，Y_r，Z_r 演算子の関係は，もともとの s_j と C_j の四元数の交換関係から得られたものである．X_r，Y_r，Z_r はそうした特別な交換関係を具備し，その代数は四元数代数またはリー代数と呼ばれる．この節では，このような重要な意味をもつ X_r，Y_r，Z_r，R_r 演算子の具体的な既約表現が与えられる．また，その行列表現を与える基底関数のベクトル空間が X_r，Y_r，Z_r の代数の演算子に対して閉じており，求める固有関数がその中にあることを保証してくれる．本節は，固有値を求めるに際して，主としてそうした観点を重視して述べられている．

演算子 A と B が X_r，Y_r，Z_r で表されるとき，A と B の演算空間が X_r，Y_r，Z_r の間の演算空間よりも大きければ，X_r，Y_r，Z_r による表現で固有値を求めたとしても，それが A と B の表現による固有値と一致することの保証はない．これを保証するには，両者が一致すればよい．つまり，A と B が X_r，Y_r，Z_r で表され，同時に X_r，Y_r，Z_r が A と B で表すことができることを示せばよい．このことは，本来，前節で述べられていることであったが，説明が十分でなかった [3]．ここでは，まずそこから始めよう．

式 (O-61)，(O-60) から [3]，$m \geq 1$ に対して，次の漸化式が成り立つ．

$$A_{m+1} = A_{m-1} - \frac{1}{2}[A_m, G_1] \tag{1}$$

$$G_m = \frac{1}{4}(A_{m+1} - A_1) \tag{2}$$

初期値として，$A_0 = -B$，$A_1 = A$ がわかっており，G_1 に関しては，式 (O-60) より，

$$G_1 = \frac{1}{4}(A_1 - A_0) = A + B \tag{3}$$

から得ることができる．この漸化式を用いることにより，任意の A_m を求めることができる．得られた A_m を用い，式 (2) に代入することにより，任意の G_m を求めることができる．こうして得られた A_m と G_m を式 (O-63a) に代入することにより，全ての X_r，Y_r，Z_r を得ることができる．すなわち，演算子 X_r，Y_r，Z_r はもとの演算子 A と B を用いて表すことができる．

このようにして，X_r，Y_r，Z_r は A と B で，A と B は X_r，Y_r，Z_r で表すことができる．さらに，交換関係を表す式 (O-65a) と (O-65b) は，異なる添字間の演算子間で可換であるから，X_r，Y_r，Z_r の代数演算で得られた式は個々の X_r，Y_r，Z_r の既約表現の直積で表すことができる．このことは重要である．

* * * * *

2 次元イジングモデルを解くことは，最大の固有値を求めることに帰結する．しかし，そのために全部の固有値をもとめる必要はなく，最大の固有値に対応する既約表現を求めれば十分である．全部の行列表現では固有値が実質上求められなくても，既約表現であれば十分可能であり得る．以下では，いくつかの基底ベクトル関数に対応する既約表現を求めることに照準を合わせる．最初に，既約表現を得る際に，この問題に特有なこととして，基底ベクトル関数の偶奇性により，関数空間が半分になることが示される．具体的には，基底ベクトル関数としての偶関数と奇関数それぞれに対応する最大次数の既約表現が述べられている．

式 (O-64)[3] のところでも述べられているように，

偶関数に対して，$r = 0, 2, 4, \cdots$ のとき，

$$R_r = X_r = Y_r = Z_r = 0$$

奇関数に対して，$r = 1, 3, 5, \cdots$ のとき，

$$R_r = X_r = Y_r = Z_r = 0$$

となる．この式は偶関数または奇関数 χ に対して，$R_r\chi = 0$ と作用していると理解することができる．

式 (O-66) から，

$$1 - R_0 = \frac{1}{2}(1 + C) \tag{4}$$

$$R_0 = \frac{1}{2}(1 - C) \tag{5}$$

となり，これが偶関数ベクトル空間への射影 (projection) になっている．というのは，後でわかるように，$R_0 = X_0^2$ であり，偶関数のときの X_0 の固有値は $\xi_0 = 0$，奇関数のときの X_0 の固有値は $\xi_0^2 = 1$，であるから，$1 - R_0$ を奇関数の χ に作用させた時には，χ が残り，偶関数の χ に作用させた時には 0 となる．つまり，$1 - R_0$ を任意の関数に作用させたとき，偶関数のみ残ることになるので，偶関数からなる部分ベクトル空間への射影ということになる．同様に，R_0 は奇関数からなる部分ベクトル関数空間への射影ということになる．

式 (O-29)[2] で $V = \mathrm{e}^{H'A}\mathrm{e}^{H^*B}$ となっており，これを正規化されたベクトル関数 $\chi(\mu_1, \cdots, \mu_n)$ を用いて行列表現するとしよう．このとき，χ にどのようなベクトル関数を用いたとしても，

$$\langle\, \chi|V|\chi\,\rangle = \sum_{\mu_1,\cdots,\mu_n} \chi^*(\mu_1, \cdots, \mu_n) V \chi(\mu_1, \cdots, \mu_n) > 0$$

と V の成分を表した場合，明らかにこの成分は正である．つまり，V のいかなる基底ベクトル関数を用いても行列表現は正行列になる．したがって，ペロン - フロベニウスの定理から [1], この行列の正の最大の固有値

$\lambda_{\max} > 0$ に属する固有ベクトルは正ベクトル（あるいは成分が全て同じ符号）である．これから，この固有値に属する固有ベクトル関数は奇関数ではあり得ないことがわかる．

実際，χ を奇関数であるが，この固有値に属する固有ベクトル関数であるとしよう．そうすると，奇関数の定義から，

$$\chi(-\mu_1, \cdots, -\mu_n) = -\chi(\mu_1, \cdots, \mu_n)$$

である．この関数 $\chi(\mu)$ は奇関数であるから，$\chi(\mu)$ の引数 (μ_j) を $(-\mu_j)$ に換えた関数 $\chi'(\mu_j) = \chi(-\mu_j) = -\chi(\mu_j)$ も固有関数である．そこで，$\chi(\mu_j)$ と $\chi'(\mu)$ による V の行列成分 $\langle\, \chi'|V|\chi \,\rangle$ を考えると，

$$\langle\, \chi|V|\chi' \,\rangle = -\langle\, \chi|V|\chi \,\rangle = -\xi\langle\, \chi|\chi \,\rangle = -\xi < 0 \tag{6}$$

となり，負の成分があることになり，ペロン - フロベニウスの定理から最大の正の固有値に属する固有ベクトル関数ではないということいなる．すなわち，V の正の最大の固有値に属する固有ベクトル関数に奇関数はあり得ないことを示している．

ペロン - フロベニウスの定理の直接帰結するところは，V の正の最大の固有値に属する固有ベクトル χ の成分は正であるということである．これから，ベクトルの成分座標は μ_j の直積の座標であるから，固有ベクトルの成分は $\chi(\mu_j)$ である．これが正であるから，すなわち，$\chi(\mu_j) > 0$ である．いま，χ_0 をつぎのような μ_j の 0 次のベクトル関数とする．

$$\chi_0 = 2^{-n/2} \tag{7}$$

これは 0 次の唯一の関数である．係数の $2^{-n/2}$ は 2^n 個の直積座標で定数を正規化したことによる．これと固有ベクトル χ との内積を作ると，$\chi(\mu_j) > 0$ であるから，

$$\langle\, \chi_0|\chi \,\rangle = 2^{-n/2} \sum_{\mu_1,\ldots,\mu_n} \chi(\mu_j) > 0 \tag{8}$$

という関係式から，V の正の最大の固有ベクトル χ は χ_0 と直交しないことがわかる．

この χ_0 は定数であるから演算子 B の固有ベクトル関数である．固有値 n をもつことは自明であろう．χ_0 は偶関数であることも考慮すると，つぎの関係式が成り立つ．

$$(B, \chi_0) = (B(1 - R_0), \chi_0) = n\chi_0 \tag{O-72}$$

この第 1 式は，B が偶関数に作用するときは $B(1 - R_0)$ に等しいことから来ている．つまり，式 (4) のところでも述べたように，偶関数に対しては $R_0 = X_0^2$ は固有値 0 をもつのでこのように書くことができる．

一方，式 (O-63c-1)[3] より，

$$\begin{aligned} -B = A_0 &= \sum_{r=1}^{2n} X_r \\ &= X_1 + X_2 + \cdots + X_{2n} \end{aligned} \tag{O-73-1}$$

いまは偶関数 χ_0 を考えているので，B を $B(1 - R_0)$ で置き換えることができるから，

$$-B(1 - R_0) = X_1 + X_3 + \cdots + X_{2n-1} \tag{O-73-2}$$

$$= \begin{cases} 2X_1 + 2X_3 + \cdots + 2X_{2m-1}; & (n = 2m) \\ \\ 2X_1 + 2X_3 + \cdots + 2X_{2m-1} + X_{2m+1}; & (n = 2m+1) \end{cases} \tag{O-73-3}$$

となる．偶関数に対しては偶数の r で $X_r = 0$ であるから，奇数の X_r が残り，n を法とした場合，X_n で折り返すから（つまり，$X_{n+i} = X_{n-i}$），n が奇数のときは X_n が単独で残り，偶数のときには消えるので，式 (O-73-3) のように表現される．

式 (O-65a) より，X_r は互いに可換であるから，式 (O-73-1) より X_r と B は可換である．したがって，固有ベクトルは両者に共通である．

$$(B,\ (X_r,\ \chi_0)) = (X_r,\ (B,\ \chi_0)) = (X_r,\ n\chi_0) = n(X_r,\ \chi_0) \tag{9}$$

であるから，$X_r\chi_0$ は固有値 n に属する B の固有ベクトルであるが，X_r には μ_j が含まれないので 0 次の関数である．B の 0 次の固有ベクトル関数は χ_0 のみであるから，これから χ_0 は X_r の 0 次の固有ベクトル関数でもあることがわかる．したがって，

$$(X_r,\ \chi_0) = \xi_r\chi_0; \quad (r = 0, 1, 2, \cdots, n) \tag{10}$$

と書くことができる．いまの場合，χ_0 は偶関数であるから，$\xi_r = 0; \quad (r = 0, , 2, \cdots)$ である．

* * * * *

X_r の固有値を一般の場合に考えてみよう．式 (O-68)[3] から，$R_x X_r = X_r$ であるから，これに $R_r = X_r^2$ を代入すると，$X_r^3 = X_r$ となり，

$$X_r^3 - X_r = X_r(X_r - 1)(X_r + 1) = 0 \tag{O-74}$$

という行列多項式になる．ハミルトン - ケイリーの定理から [4]（あるいは右から χ_0 を掛けて考えてもよい），

$$\xi_r(\xi_r - 1)(\xi_r + 1) = 0 \tag{O-74}$$

であるから，固有値 ξ_r は -1，0，1 のいずれかである．いまの場合，χ_0 は偶関数であるから，$r = 0, , 2, \cdots$ の場合に $X_r = 0$ であることは，つまり，

$$\xi_0 = \xi_2 = \xi_4 = \cdots = 0 \tag{11}$$

ということである．また，式 (O-72)，(O-73) から，

$$\xi_1 + \xi_3 + \cdots + \xi_{2n-1} = -n \tag{12}$$

である．これを満足する解は，

$$\xi_1 = \xi_3 = \cdots = \xi_{2n-1} = -1 \tag{13}$$

しかない．すなわち，

$$(X_r,\ \chi_0) = -\chi_0; \qquad (r = 1, 3, 5, \cdots, 2[(n-1)/2] + 1) \tag{14}$$

となる．

以下，偶関数の場合を考える．χ を固有値 ξ_r に属する X_r の固有関数とする．このとき，$(Y_r,\ \chi)$ と $(Y_s,\ \chi)$ $(r \neq s)$ を考えてみよう．交換関係を表す式 (O-65)，(O-68) を用いて，

$$(X_r,\ (Y_r,\ \chi)) = (X_rY_r,\ \chi) = (-Y_rX_r,\ \chi) = -(Y_r,\ (X_r,\ \chi)) = -\xi_r(Y_r,\ \chi) \tag{15}$$

$$(X_s, (Y_r,\ \chi)) = (X_sY_r,\ \chi) = (Y_rX_s,\ \chi) = (Y_r,\ (X_s,\ \chi)) = \xi_s(Y_r,\ \chi) \quad (s \neq r) \tag{16}$$

となる．つまり，$s = r$ のとき，Y_s は χ を X_r の別の固有関数に変換する．変換されて新しくできた固有関数 $(Y_r,\ \chi)$ は固有値 $-\xi_r$ に属する X_r の固有関数である．$s \neq r$ のときは，$(Y_s,\ \chi)$ は固有値 ξ_r に属する X_r の固有関数のままである．すなわち，Y_r で ξ_r 以外の固有値は変わらない．

また，Y_r を χ に 2 回以上作用させてもあまり意味はない．実際，

$$(Y_r^2,\ \chi) = (R_r,\ \chi) = (X_r^2,\ \chi) = \xi_r^2\chi \tag{17}$$

となり，$\xi_r = 0$ なら消去され，それ以外は $\xi_r^2 = 1$ で何も変化は起こらない．

Z_r に関しては，式 (O-68) より，

$$(Z_r,\ \chi) = (\mathrm{i}X_rY_r,\ \chi) = (\mathrm{i}X_r,\ (Y_r,\ \chi)) = -\mathrm{i}\xi_r(Y_r,\ \chi) \tag{18}$$

となり，係数を除いて，$(Z_r,\ \chi)$ は $(Y_r,\ \chi)$ と同じであり，Z_r は係数を除いて Y_r と同じ固有関数を作る．

* * * * *

上で述べたような新しい固有関数を作る機能をもつ Y_r を用いれば多くの固有関数を作ることができる．2 個以上作用させても意味はないので，各 r について 1 個以下の Y_r を用いて Y_r の線形結合を作り，それを χ に作用させると，1 組の固有関数の集合ができる．この固有関数の集合は，固有値 $\xi_1, \xi_3, \cdots, \xi_{2m-1}$ で特徴付けられる一連の $(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n) = (\mu)$ の関数で，これを

$$\chi(\xi_1, \xi_3, \cdots, \xi_{2m-1}; (\mu)) \qquad (n \geq 2m \geq n-1) \tag{19}$$

と書く．n が偶数のとき，0 でない添字が最大の固有値は ξ_{n-1} である．一方，n が奇数のとき，最大の固有値は ξ_n であるが，$Y_n = 0$ であるから，つまり Y_n がないので，ξ_n のみは Y_r によって固有値を変える変換がない．つまり，ξ_n は最初の χ_0 の X_n の固有値から変わらない．これから，$\xi_n = -1$ は固定されていて変わらない．したがって，この固有関数の集合は，ξ_n を除いて，ξ_r が 1 または -1 のいずれかである，$\xi_1, \xi_3, \cdots, \xi_{2m-1}$ の全ての組み合わせの固有関数からなる．これをまとめると，以下のようになる．

$$(X_r,\ \chi(\xi_1, \xi_3, \cdots, \xi_{2m-1}; (\mu))) = \xi_r\chi(\xi_1, \xi_3, \cdots, \xi_{2m-1}; (\mu)) \tag{O-76-1}$$

$$(Y_r,\ \chi(\xi_1, \xi_3, \cdots, \xi_{2m-1}; (\mu))) = \chi(\xi_1, \xi_3, \cdots, -\xi_r, \cdots, \xi_{2m-1}; (\mu)) \tag{O-76-2}$$

$$(X_n,\ \chi(\xi_1, \xi_3, \cdots, \xi_{n-2}; (\mu))) = -\xi_r\chi(\xi_1, \xi_3, \cdots, \xi_{n-2}; (\mu)) \tag{O-76-3}$$

最後の式では，n が奇数の場合で，ξ_n は -1 と固定されているので引数ではなく，最大添字の引数は ξ_{n-2} になっている．例として，χ_0 をこの書式で書くと，

$$\chi_0 = 2^{-n/2} = \chi(-1, -1, \cdots, -1; (\mu)) \tag{O-76a}$$

となる．

Y_r を χ_0 に作用させることにより異なる固有ベクトル関数を作ることができる．これを拡張して X_r，Y_r，Z_r の関数を χ_0 に作用させることにより，固有ベクトル関数の集合が形成される．この中の任意のベクトル関数を選び，これにまた X_r，Y_r，Z_r の関数を作用させれば，作用された関数はもともとは χ_0 に X_r，Y_r，Z_r の関数を作用させたものであるから，新しくできた関数も χ_0 に X_r，Y_r，Z_r の関数を作用させたベクトル関数である．つまり，このことは，χ_0 に X_r，Y_r，Z_r の任意の関数を作用させて形成されたベクトル関数の集合，つまりベクトル関数の部分空間が X_r，Y_r，Z_r の関数に対して不変であることを示している．すなわち，演算子 X_r，Y_r，Z_r により固有ベクトル関数 χ_0 から不変ベクトル関数部分空間が形成されることを示している．

* * * * *

式 (O-76) を見れば，$\chi(\xi_1, \xi_3, \cdots, \xi_{2m-1}; (\mu))$ で X_r，Y_r，Z_r およびその間の演算を表現する基底ベクトル関数になっていることがわかる．実際，$\chi(\xi_1, \xi_3, \cdots, \xi_{2m-1}; (\mu))$ は正規直交系になっている．正規化は関数が具体的になればすぐにできる．直交関係は，異なる基底ベクトル χ と χ' の間には，固有値 $\xi_1, \xi_3, \cdots, \xi_{2m-1}$ の中に必ず異なる固有値がなければならない．これを ξ_r および ξ_r' としよう．そうすると，

$$\begin{aligned}
&\langle\, \chi'(\xi_1, \xi_3, \cdots, \xi_r', \cdots, \xi_{2m-1}; (\mu)) \mid X_r \mid \chi(\xi_1, \xi_3, \cdots, \xi_r, \cdots, \xi_{2m-1}; (\mu))\,\rangle \\
=&\langle\, \chi'(\xi_1, \xi_3, \cdots, \xi_r', \cdots, \xi_{2m-1}; (\mu)) \mid (X_r,\ \chi(\xi_1, \xi_3, \cdots, \xi_r, \cdots, \xi_{2m-1}; (\mu)))\,\rangle \\
=&\langle\, \chi'(\xi_1, \xi_3, \cdots, \xi_r', \cdots, \xi_{2m-1}; (\mu)) \mid \xi_r\chi(\xi_1, \xi_3, \cdots, \xi_r, \cdots, \xi_{2m-1}; (\mu))\,\rangle \\
=&\xi_r\langle\, \chi' \mid \chi\,\rangle
\end{aligned}$$

一方，X_r を左側に作用させることにより，

$$
\begin{aligned}
&=\langle\ (X_r,\ \chi'(\xi_1,\xi_3,\cdots,\xi'_r,\cdots,\xi_{2m-1};(\mu)))\mid\chi(\xi_1,\xi_3,\cdots,\xi_r,\cdots,\xi_{2m-1};(\mu))\ \rangle\\
&=\langle\ \xi'_r\chi'(\xi_1,\xi_3,\cdots,\xi'_r,\cdots,\xi_{2m-1};(\mu))\mid\chi(\xi_1,\xi_3,\cdots,\xi_r,\cdots,\xi_{2m-1};(\mu))\ \rangle\\
&=\xi'_r\langle\ \chi'\mid\chi\ \rangle
\end{aligned}
$$

となるから，

$$
(\xi_r-\xi'_r)\langle\ \chi'(\xi_1,\xi_3,\cdots,\xi'_r,\cdots,\xi_{2m-1};(\mu))\mid\chi(\xi_1,\xi_3,\cdots,\xi_r,\cdots,\xi_{2m-1};(\mu))\ \rangle=0 \tag{20}
$$

となって，$\xi_r-\xi'_r\neq 0$ であるから，$\langle\ \chi'\mid\chi\ \rangle=0$ となって χ' と χ は直交する．これが実際にそうなっていることを，$\chi=\chi_0$，$\chi'=(Y_r,\ \chi_0)$ の場合に確かめてみよう．確かめる式は，

$$
\langle\ \chi'\mid\chi\ \rangle=\sum_{\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n}\frac{1}{4n2^n}\sum_{a,b=1}^{2n}\sin\frac{r(a-b)\pi}{n}P_{ab} \tag{21}
$$

である．$b\neq a$ のとき，$P_{ab}=s_aC_{a+1}\cdots C_{b-1}s_b$ であるから，この式は $\mu_i\mu_j$ の多項式である．$i\neq j$ の場合は μ_j の総和で 0 になる．総和で 0 にならないのは，$b=a$，$b=a\pm n$ のときである．$b=a$ のとき，sin 関数が 0 になる．$b=a\pm n$ のときは，$P_{ab}=C_aC$ となり，sin 関数は符号が逆になるので相殺する．結局，上の式は 0 になるので，$\chi=\chi_0$ と $\chi'=(Y_r,\ \chi_0)$ は直交することがわかる．

このような固有ベクトル関数の正規直交性を念頭におくと，式 (O-76) から X_r，Y_r，Z_r の行列表現を容易に得ることができることがわかる．Z_r の場合は，式 (18) から，式 (O-76-2) の $-\xi_r$ を $-\mathrm{i}\xi_r$ とすればよいことがわかる．これらの行列表現はブロック間で干渉しないから，X_r，Y_r，Z_r の行列表現を用いて，X_r，Y_r，Z_r の間の任意の（展開可能な）演算を表すことができる．つまり，直積の r 番目のブロックを考えれば，X_r，Y_r，Z_r の既約表現になっていればよい．式 (O-76) のうち，r 番目のブロックを考えると，X_r の固有値は -1 と 1 であって，かつ，これに対応する固有ベクトル関数を $\chi(-1)$ と $\chi(1)$ とすれば，固有関数の関係になっているから，0 でない成分は $\langle\ \chi(-1)(X_r,\chi(-1))\ \rangle$ および $\langle\ \chi(1)(X_r,\chi(1))\ \rangle$ となり，X_r の既約表現 $\mathbf{D}_2(X_r)$ は簡単に，

$$
\mathbf{D}_2(X_r)=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix} \tag{22}
$$

であることがわかる．一方，Y_r の既約表現に関しては，式 (O-76-2) から，0 でない成分は $\langle\ \chi(1)(Y_r,\chi(-1))\ \rangle$ および $\langle\ \chi(-1)(Y_r,\chi(1))\ \rangle$ となり，Y_r の既約表現 $\mathbf{D}_2(Y_r)$ は簡単に，

$$
\mathbf{D}_2(Y_r)=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} \tag{23}
$$

であることがわかる．したがって，X_r，Y_r，Z_r の間の演算結果は既約表現 $\mathbf{D}_2(X_r)$ と $\mathbf{D}_2(Y_r)$ の間の演算結果とすることができる．r ブロックにおける X_r，Y_r，Z_r の間の演算結果を Q_r と表せば，全体の表現は一般に

$$
\mathbf{D}_{\max}=\mathbf{D}_2(Q_1)\otimes\mathbf{D}_2(Q_3)\otimes\cdots\otimes\mathbf{D}_2(Q_{n-1}) \tag{24}
$$

とすることができる．これは，式 (O-76) で示されている演算子の系を包括的に行列表現すると，このような既約表現の直積で表されるということを示している．また，この行列表現は $\mathbf{D}_{\max}$ と突然書かれているが，これは，演算子全体の行列表現は 2^n 次元になるが，基底ベクトル関数が偶関数か奇関数によって表現が 2 つに分れ，それぞれが 2^{n-1} 次元になるこの後，P.132 の左側の最後の段落の前に式 (O-77)“maximal odd” representation と記し，もう少し先の式 (O-82) の前にはもう一つの行列表現を “maximal odd” representation と書いているので，ここの $\mathbf{D}_{\max}$ は，演算子の系の偶関数による最大の行列表現という意味で “maximal even” representation としている．式 (23) は r が $n-1$ までしかない偶数の場合で，奇数の場合 $(n=2m+1)$ は $r=n$ の場合があるが $\xi_n=-1$ と固定されているから X_n の既約表現は 1 次元で値は固有値は -1 である．これを $\mathbf{D}_{-}(X_r)$ のよ

うに表す．同様に，固有値が 1 の 1 次元の既約表現を $\mathbf{D}_-(X_r)$ と表す．Q_n も前と同様に定義すると，n が奇数の場合の “maximal even” representation $\mathbf{D}_{\max}$ は，

$$\mathbf{D}_{\max} = \mathbf{D}_2(Q_1) \otimes \mathbf{D}_2(Q_3) \otimes \cdots \otimes \mathbf{D}_2(Q_{n-2})\mathbf{D}_-(Q_n) \tag{25}$$

となる．両方をまとめると，

$$\begin{aligned} &\mathbf{D}_{\max} = \mathbf{D}_2(Q_1) \otimes \mathbf{D}_2(Q_3) \otimes \cdots \otimes \mathbf{D}_2(Q_{n-1}) && (n = 2m) \\ &\mathbf{D}_{\max} = \mathbf{D}_2(Q_1) \otimes \mathbf{D}_2(Q_3) \otimes \cdots \otimes \mathbf{D}_2(Q_{n-2})\mathbf{D}_-(Q_n) && (n = 2m+1) \end{aligned} \tag{O-77}$$

のようになる．

*　*　*　*　*

132 頁左欄の下から，Onsager の論理展開を追っていこう．複雑な内容を簡略に書いているのでわかりにくいところが多く注意深く読んでいく必要がある．まず，いままで Y_r を用いて χ_0 から不変部分ベクトル空間を構成した方法は一般に拡張することができて，$(X_0, X_1, X_2, \cdots, X_n)$ の任意の共通の固有ベクトル関数から同じ方法で構成できるということに言及している．これは，すでに式 (O-76) に一般化された形で述べられている．こうして得られる固有ベクトル関数は 1 組の固有値 $(\xi_0, \cdots, \xi_n)$ で特徴付けれれる．このうち，ξ_0 と ξ_n は $Y_0 = 0$ と $Y_n = 0$ という性質により，1 種類の値しかもち得ないが，残りの $\xi_1, \cdots, \xi_{n-1}$ は，偶関数の場合は r が奇数のとき Y_r により固有値が反転され偶数のときは 0 になる．奇関数の場合は，r が偶数のとき Y_r により固有値が反転され奇数のときは 0 になる．このような演算子およびその関数の作用により，不変ベクトル関数部分空間が形成される．

Onsager はこれを射影演算子の概念を用いて幾何的に表現している．P_r を射影演算子として，

$$P_0 P_1 \cdots P_n \tag{26}$$

の交線あるいは交点 (intersection) であるとしている．この意味を少し考えてみよう．

P_r は，前に射影演算子 projector という名前で呼ばれた R_r である．これに，さらに $1 - R_r$ も追加されて射影演算子となる．前の場合は，偶関数のみを考えていたので R_r のみを考えればよかった．いまの場合は両方を考慮しているので $1 - R_r$ が加わる．

$R_r = X_r^2$ であるから，一連の固有ベクトル関数に作用させると ξ_r^2 という係数をもつことになる．もし，$\xi_r^2 = 1$ であれば，その固有ベクトル関数は残り，$\xi_r = 0$ を固有値にもつ固有ベクトル関数は消去されることになる．結局，全ての固有ベクトル関数に R_r を作用させれば，固有値 $\xi_r = \pm 1$ のみをもつ固有ベクトル関数の部分ベクトル空間に射影されてしまうことになる．これが射影の意味である．

一方，射影演算子 $1 - R_r$ の場合，これを固有ベクトル関数全体に作用させると，今度は $\xi_r = 0$ を固有値にもつ固有ベクトル関数のみが残り，固有値 $\xi_r = \pm 1$ のみをもつ固有ベクトル関数は消去されてしまう．

$r = 0$ と $r = n$ の場合は固有値が 1 か -1 固有関数の部分空間への射影が必要になる．これは $Y_0 = Y_n = 0$ であるから，固有値の変換ができないため，どちらか一方の部分空間に固定されるからである．そのため，射影演算子を $\frac{1}{2}(R_0 + X_0)$ と $\frac{1}{2}(R_0 - X_0)$ に分けてそれぞれの部分空間への射影を行う．前者は X_0 の固有値が 1 の固有関数の部分空間への，後者は X_0 の固有値が -1 の固有関数の部分空間への射影である．$r = n$ の場合は，$\frac{1}{2}(R_n + X_n)$ と $\frac{1}{2}(R_n - X_n)$ が対応する射影演算子である．

式 (O-64) から，偶関数の部分空間へ射影する場合は，r が奇数の R_r の射影演算子を使えばよいことになる．一方，奇関数の部分空間へ射影する場合は，r が偶数の R_r の射影演算子を使えばよい．このような射影演算子を使えば，偶関数の固有ベクトル関数は $R_1, R_3, \cdots, R_{[n/2]-1}$ によって射影された固有ベクトル関数になる．言い換えれば，$R_1, R_3, \cdots, R_{[n/2]-1}$ によって射影された部分空間の共通部分，すなわち，交線部分ということ

になる．では，この部分空間に含まれる固有関数はどういうものだろうか．X_r，Y_r，Z_r は B と可換であるので，この部分空間に含まれる固有関数は B の固有関数でもある．一般に，ベクトル関数は μ_r の巾乗をベクトル関数に含んでもよいが，$\mu_r^2 = 1$ であるから，2 次以上は意味がない．さらに，dihedral 対称性を満たすことを考えると，すべての r について次数は同じでなければならない．しかし，各 r で 1 次の場合は奇関数になり，前提に矛盾するのであり得ない．したがって，固有ベクトル関数の次数は 0 でなければならない．つまり，この固有ベクトル関数は 0 次でなければならず，結局，全ての条件を満足する固有ベクトル関数は χ_0 でなければならないということになる．途中，B の固有値が n が奇数のときに，$n-1-\xi_n$ となっているのは，ξ_n は固定されてしまうので，一般に $\xi_n = -1$ でない場合は式 (O-73-3) から固有値は $n-1-\xi_n$ とならざるを得ないということである．

* * * * *

さて，B の 0 次の固有ベクトル関数 χ_0 から，X_r および Y_r に関する不変部分ベクトル関数空間が構成されることが示された．一方，$\mathrm{e}^{H'A}\mathrm{e}^{H^*B}$ の最大固有値に属する固有ベクトル関数は，ペロン - フロベニウスの定理から，正の固有ベクトルで，χ_0 と直交し得ない．したがって，この固有ベクトル関数は χ_0 から構成された不変ベクトル関数部分空間の中に含まれる，というのが Onsager の記述である．

この部分は，この後で，最大固有値を具体的に求める上での前提になる非常に重要なところである．したがって，少し注意が必要である．最大固有値に属する固有ベクトル関数が，χ_0 から構成される不変部分ベクトル空間に含まれるという結果はこれだけからは得られない．論文ではこの辺の説明を少し端折っているように思われる．少し丁寧に述べると次のようになるだろう．すなわち，最大固有値 $\lambda_{\max}$ に属する固有ベクトル関数を $\chi_{\max}$ と書くことにしよう．$\chi_{\max}$ を含む，X_r と Y_r の関数に関する不変部分ベクトル関数空間を $W_{\max}$ とする．また，χ_0 を含む X_r と Y_r の関数に関して不変な部分空間を W_0 とする．$W_{\max}$ が W_0 に含まれていれば，$\chi_{\max}$ は W_0 に含まれていると言える．$W_{\max}$ が W_0 に含まれていることは，実はこの後すぐに出てきて，$V = \mathrm{e}^{H'A}\mathrm{e}^{H^*B}$ の A も X_r と Y_r で表されることがわかり，すでに B も X_r と Y_r で表されているので，V は X_r と Y_r の関数であるから，上のことが成り立つことがわかる．これから，χ_0 と直交しない V の固有ベクトル関数はこの不変部分空間に含まれることになるといえる．つまり，$\chi_{\max}$ はこの不変部分ベクトル空間 W_0 に含まれるということになる[1]．

以上の結果から，不変ベクトル関数空間 W_0 が最大固有値 $\lambda_{\max}$ に属する固有ベクトル関数が含まれており，そのベクトル部分空間は，X_r や Y_r などの演算に閉じていることと，その不変ベクトル部分空間の基底で演算子を行列表現すれば，式 (O-77) の 2 次元既約表現で一義的に表され，演算が各ブロック毎の演算に帰結することになることなどが明らかになった．このことは，最大固有値 $\lambda_{\max}$ を計算する上で重要である．

* * * * *

A の固有ベクトルと奇関数の不変ベクトル関数部分空間

[1]この部分をもっと詳しく説明するなら次のようになる．いま，$\chi_{\max}$ が W_0 に含まれていないとしよう．χ_0 と直交し，W_0 に含まれないベクトルを χ' とする．そのとき，

$$\chi_{\max} = F(X_r, Y_r)\chi_0 + G\chi'$$

と表すことができる．$F(X_r, Y_r)$ は X_r と Y_r の関数としての演算子，G は 0 でない定数または演算子である．$\chi_{\max}$ の前提から，$(V,\ \chi_{\max}) = \lambda_{\max}\chi_{\max}$ であるから，

$$(V,\ (F(X_r, Y_r),\ \chi_0) + (V,\ G\chi') = \lambda_{\max}(F(X_r, Y_r),\ (\chi_0 + G\chi'))$$

となり，結局，

$$(V-1,\ G\chi') = ([\lambda_{\max} - V\ F(X_r, Y_r)],\ \chi_0)$$

となる．ここで，$V = \mathrm{e}^{H'A}\mathrm{e}^{H^*B}$ も X_r と Y_r の展開可能な関数であるから，この式は χ' は X_r と Y_r の展開可能な関数であることを示していることになる．つまり，W_0 に含まれることになる．これは最初の仮定に反する．したがって，$G=0$ でなければならず，$\chi_{\max}$ は W_0 に含まれることを示している

上の議論は偶関数の場合の最大固有値 $\lambda_{\max}$ に関するものである．以下では奇関数の場合の最大固有値 $\lambda_{\max}^-$ を考えてみよう．後でわかるが，$\lambda_{\max}^-$ は $\lambda_{\max}$ の次に大きい固有値である．奇関数の場合は，偶関数の場合と少し異なる手法が取られている．すなわち，X_r や Y_r の替わりに次式で定義する X_r^* や Y_r^* を用いる．

$$X_r^* = -X_r \cos\frac{r\pi}{n} + Y_r \sin\frac{r\pi}{n}; \quad (r = 0, 1, \cdots, n-1, n) \tag{O-78-1}$$

$$X_0^* = -X_0; \quad X_n^* = X_n \tag{O-78-2}$$

式 (O-78-1) に Z_r を掛けると式 (O-68) の関係式を用いて Y_r^* や Z_r^* を定義することができる．具体的な式は式 (O-86) に記されている．そのとき，$Z_r^* = -Z_r$ とすることにより，X_r^*，Y_r^*，Z_r^* の間に式 (O-68) と同じ関係を与えることができる．

式 (O-63c) より，

$$\begin{aligned} A &= \sum_{j=1}^{n} s_j s_{j+1} = A_1 \\ &= \sum_{r=1}^{2n} (X_r \cos\frac{r\pi}{n} - Y_r \sin\frac{r\pi}{n}) = -\sum_{r=1}^{2n} X_r^* \\ &= X_0 - \sum_{r=1}^{n-1} 2X_r^* - X_n \end{aligned} \tag{O-79-1}$$

となる．ただし，この式の変形で，$X_{2n}^* = X_0^* = -X_0$ であること，および，

$$\begin{aligned} X_{r+n}^* &= -X_{r+n} \cos\frac{(r+n)\pi}{n} + Y_{r+n} \sin\frac{(r+n)\pi}{n} \\ &= -X_{n-r} \cos\frac{(n-r)\pi}{n} + Y_{n-r} \sin\frac{(n-r)\pi}{n} = X_{n-r}^* \end{aligned} \tag{27}$$

であることと，これから，

$$\sum_{r=n+1}^{2n-1} X_r^* = \sum_{r=1}^{n-1} X_{r+n}^* = \sum_{r=1}^{n-1} X_{n-r}^* = \sum_{r=1}^{n-1} X_r^*$$

であることを用いている．これを射影演算子 R_0 を用いて奇関数のベクトル関数部分空間に射影して表すと，r が奇数の X_r^* は消えるので，式 (O-79-1) は，

$$\begin{aligned} R_0 A &= \frac{1}{2}(1-C)A \\ &= \begin{cases} X_0 - 2X_2^* - 2X_4^* - \cdots - 2X_{n-2}^* - X_n & (n = 2m) \\ X_0 - 2X_2^* - 2X_4^* - \cdots - 2X_{n-1}^* & (n = 2m+1) \end{cases} \end{aligned} \tag{O-79-2}$$

となる．

X_r^*，Y_r^*，Z_r^* は式 (O-68) と同じ関係式を満たす．実際，

$$\begin{aligned} X_r^{*2} &= X_r^2 \cos^2\frac{(n-r)\pi}{n} + (X_r Y_r + Y_r X_r) \sin\frac{(n-r)\pi}{n} \cos\frac{(n-r)\pi}{n} + Y_r^2 \sin^2\frac{(n-r)\pi}{n} \\ &= R_r (\cos^2\frac{(n-r)\pi}{n} + \sin^2\frac{(n-r)\pi}{n}) = R_r \end{aligned} \tag{28}$$

という関係が成り立つ．また，式 (O-68) と同様に，$R_r X_r^* = X_r^*$ が成り立つことから，式 (O-74) の場合と同様に，

$$X_r^{*3} - X_r^* = X_r^*(X_r^* + 1)(X_r^* - 1) = 0 \tag{O-80}$$

が成り立つので，X_r^* の固有値は 0，± 1 しかないことがわかる．

次に，$e^{H'A}$ を展開することを考えよう．$(s_j s_{j+1})^2 = s_j^2 s_{j+1}^2 = 1$ であることを考えると，

$$
\begin{aligned}
e^{H's_js_{j+1}} &= 1 + \frac{1}{2!}(H's_js_{j+1})^2 + \frac{1}{4!}(H's_js_{j+1})^4 + \cdots \\
&\quad + (H's_js_{j+1}) + \frac{1}{3!}(H's_js_{j+1})^3 + \frac{1}{5!}(H's_js_{j+1})^5 + \cdots \\
&= 1 + \frac{1}{2!}H'^2 + \frac{1}{4!}H'^4 + \cdots \\
&\quad + (s_js_{j+1})\left[H' + \frac{1}{3!}H'^3 + \frac{1}{5!}H'^5 + \cdots\right] \\
&= \cosh H' + (s_js_{j+1})\sinh H'
\end{aligned}
$$

となり，s_j と s_{j+1} は可換であるから，

$$
e^{H'A} = e^{H'\sum s_js_{j+1}} = \prod_{j=1}^{n}(\cosh H' + (s_js_{j+1})\sinh H') \tag{29}
$$

と表すことができる．

式 (O-41) または式 (O-43)[5] の形の基底ベクトル関数により，式 (29) で表される $e^{H'A}$ を行列表現することができる．そのとき，基底関数が偶か奇かにより C が 1 か -1 に決まる．その結果，$C = 1$ または $C = -1$ の関係式により C_n が消去されるので (消去する演算子をに C_n を選んだ場合)，s_n と非可換な演算子が存在しなくなり，他の演算子により影響されないことから，s_n は定数として扱うことができるので，演算子の全体は $s_n = 1$ の場合と $s_n = -1$ の場合にわけられる．それぞれが s_1, C_1 から s_{n-1}, C_{n-1} の演算子の同じ行列表現で表されるから，$s_n = 1$ と $s_n = -1$ に対応する 2 つの 2^{n-1} 次元の行列表現になる．それぞれの行列は $H' > 0$ という条件で，成分がすべて正になるので，ペロン - フロベニウスの定理が適用できて，それぞれの行列に正の最大の固有値が存在し，それに属する正の固有ベクトル関数が存在する．

$V = e^{H'A}e^{H^*B}$ の場合は，式 (29) に e^{H^*B} が作用することになるが，B は式 (O-41) または式 (O-43) の形の基底ベクトル関数で対角化されるので，その関数である e^{H^*B} も対角化され，その成分は正であり，$e^{H'A}$ の各列をその成分で乗算するのみであるから，V は正行列になる．したがって，式 (29) の行列構造はそのまま残り，各成分が正のまま変調されるのみであるから，それぞれの 2^{n-1} 次元行列に最大の固有値およびそれに属する正の固有ベクトル関数が存在することになる．B の 0 次の固有関数から派生した偶関数の固有ベクトル関数を用いて表現した行列に V の最大固有値と正の固有ベクトルが存在することは前に記した．ここで示されたことは，奇関数の固有ベクトル関数を用いて表現した場合にも同じように正の最大固有値とそれに付属する正の固有ベクトル関数が存在するということである．

式 (O-44)[5] により，A の固有値が最大になるのは，スピンの符号が変化しない場合，すなわち，$(+, +, \cdots, +)$ または $(-, -, \cdots, -)$ の場合である．この場合の基底ベクトル関数は式 (O-44a) にある通りであるが，そのままでは偶関数とも奇関数定まらない．この 2 つの基底ベクトル関数から偶関数と奇関数を作るには両者の和か差をとればよい．したがって，偶関数を χ_0^*，奇関数を $\chi_0^{(-)*}$ とすると，

$$
\left.\begin{matrix}\chi_0^* \\ \\ \chi_0^{(-)*}\end{matrix}\right\} = 2^{-\frac{1}{2}}\left(2^{-n}\prod_{j=1}^{n}(1+\mu_j) \pm 2^{-n}\prod_{j=1}^{n}(1-\mu_j)\right) \tag{O-81}
$$

と表すことができる．実際，$(1+\mu_j)$ 積と $(1-\mu_j)$ 積を展開したとき，μ_j の次数が奇数の場合は，複号が $+$ のときに消え，$-$ のときに残る．μ_j の次数が偶数の場合は逆に，複号が $+$ のときに残り，$-$ のときに消える．したがって，複号が $+$ のときに固有値が n の偶関数になり，$-$ のときに奇関数になる．

A の偶の固有ベクトル関数は $e^{H'A}$ の固有関数でもある．上でも述べたように，このように A を行列表現する基底ベクトル関数は B を対角化する．すなわち，e^{H^*B} を対角化するので，$V = e^{H'A}e^{H^*B}$ の偶関数におけ

る最大の固有値 $\lambda_{\max}$ は $\mathrm{e}^{H'A}$ の最大の固有値に e^{H^*B} の対応する行列成分を乗じたものに等しい．したがって，以前の議論と同じように，$\lambda_{\max}$ に属する固有ベクトル関数は固有関数は χ_0^* から X_r^* と Y_r^* の任意の関数の演算子を用いて構成される不変ベクトル関数部分空間に存在すると言える．

$\chi_0^{(-)*}$ についても同様である．奇関数のベクトル関数部分空間で，$V = \mathrm{e}^{H'A}\mathrm{e}^{H^*B}$ の最大の固有値 $\lambda_{\max}^-$ に属する固有関数は，$\chi_0^{(-)*}$ から X_r^* と Y_r^* など，およびその任意の関数の演算子で作られる不変ベクトル関数部分空間にあることが言える．偶関数 χ_0^* から得られる不変ベクトル関数部分空間を構成する方法は，χ_0 の場合にすでに述べたので，ここでは，奇関数の場合について考えてみよう．

奇関数 $\chi_0^{(-)*}$ は A の固有ベクトル関数であり，式 (O-79-1) により A はすべての X_r^* と可換であるから，$\chi_0^{(-)*}$ はすべての X_r^* の固有関数でもある．A の最大の固有値は n であるから，奇関数の場合は，奇数の r に対して $X_r^* = 0$ であるから，

$$A = -\sum_{r=1}^{2n} X_r^* = -\sum_{r=1}^{n} X_{2q}^* \tag{30}$$

であることを念頭におくと，

$$\begin{aligned} n\chi_0^{(-)*} = (A, \chi_0^{(-)*}) &= -\sum_{r=1}^{n}(X_{2q}^*, \chi_0^{(-)*}) \\ &= -\left(\sum_{r=1}^{n} \xi_{2q}^*\right)\chi_0^{(-)*} \end{aligned} \tag{31}$$

である．ここで，ξ_{2q} は $\chi_0^{(-)*}$ を固有ベクトル関数とする X_{2q} の固有値である．すなわち，

$$(X_{2q}^*,\ \chi_0^{(-)*}) = \xi_{2q}^*\chi_0^{(-)*} \tag{32}$$

という関係である．χ_0 の場合と同様に，Y_{2q}^* を作用させることによって $\chi_0^{(-)*}$ の固有値 ξ_{2q}^* の符号を反転させることができるので，$q = 1, 2, \cdots, [n/2]$ に対し，

$$\xi_{2q}^{*2} = 1 \tag{33}$$

である．しかし，$r = 0$ と $r = n$ に関しては，$Y_r^* = 0$ であるから符号反転はなく，式 (31) で決定される．すなわち，$A = -\sum X_{2q}^*$ が最大の固有値 n をもつときの ξ_{2q}^* は一義的に決定され，$n = 2m$ のとき，

$$\xi_0^* = \xi_2^* = \xi_4^* = \cdots = \xi_n^* = -1 \tag{34}$$

である．これから，ξ_0^* と ξ_n^* は常に

$$\xi_0^* = \xi_n^* = -1 \tag{35}$$

となる．一方，奇関数の場合，$r = 1, 3, 5, \cdots$ で，$X_r^* = Y_r^* = Z_r^* = 0$ であるから，

$$\xi_1^* = \xi_3^* = \xi_5^* = \cdots = \xi_{n-1}^* = 0 \tag{36}$$

である．また，$R_x = X_r^{*2}$ であるから，式 (34) と式 (36) から $r = 1, 3, 5, \cdots$ で $R_x = 0$，$r = 0, 2, 4, \cdots$ で $R_x = 1$ となる．したがって，射影演算子

$$R_0R_2R_4\cdots R_{2[n/2]} \tag{37}$$

で全ベクトル空間は式 (34) の固有値を有する奇関数のベクトル関数空間に射影される．したがって，$\chi_0^{(-)*}$ はこの部分空間に含まれる．さらに，X_0^* の固有値が -1 であること，つまり $\xi_0 = -\xi^* = 1$ である部分空間への射影に制限すれば，射影演算子 R_0 は $(R_0 + X_0)/2$ で置き換えることができるから，上の射影演算子は

$$\frac{1}{2}(R_0 + X_0)R_2R_4R_6\cdots R_{2[n/2]} \tag{38}$$

と書いてもよい．

$*\quad *\quad *\quad *\quad *$

演算子の行列表現

演算子 X_r^*，Y_r^* あるいはその関数を $\chi_0^{(-)*}$ に作用させることにより，これらの演算子の不変ベクトル関数部分空間が形成される．これは前に述べた χ_0 の場合と同様である．このような ξ_0^* を含むベクトル空間に作用する演算子の既約表現の直積は，偶数の r に対して，ブロック 2 から n が偶数の場合はブロック $n-2$ まで，n が奇数の場合はブロック $n-1$ までは 2 次元の既約表現の直積で表される．ここで用いられる既約表現は式 (22) や式 (23) と共通である．X_0^* と X_n^* は $Y_0^* = Y_n^* = 0$ となって固有値の符号反転はないので，既約表現は 1 次元である．したがって，ブロック 0 やブロック n で使われる既約表現は $\mathbf{D}_+(X_r)$ または $\mathbf{D}_-(X_r)$ である．$X_0^* = -X_0$，$X_n^* = X_n$ でかつ，$\xi_0 = -\xi_0^*$，$\xi_n = \xi_n^*$，あることを考慮に入れると，$\xi_0 = 1$，$\xi_n = -1$ であるから，ブロック 0 では $\mathbf{D}_+(X_0)$，ブロック n では $\mathbf{D}_-(X_n)$ である．以上のことを考慮すると，奇関数を固有関数とした場合，V の最大の固有値 $\lambda_{\max}^-$ に属する正の固有ベクトル関数の奇関数ベクトル空間で作用する演算子の行列表現 $\mathbf{D}_{\max}^-$ は，

$$\mathbf{D}_{\max}^- = \mathbf{D}_+(Q_0) \otimes \mathbf{D}_2(Q_2) \otimes \mathbf{D}_2(Q_4) \otimes \cdots \otimes \mathbf{D}_2(Q_{n-1}) \qquad (n = 2m+1) \tag{O-82-1}$$

$$\mathbf{D}_{\max}^- = \mathbf{D}_+(Q_0) \otimes \mathbf{D}_2(Q_2) \otimes \mathbf{D}_2(Q_4) \otimes \cdots \otimes \mathbf{D}_2(Q_{n-2}) \otimes \mathbf{D}_-(Q_n) \qquad (n = 2m) \tag{O-82-2}$$

となる．

n が奇数のとき，2 次の既約表現はブロック 2 からブロック $n-1$ まででブロック 0 が 1 次であるから全体で $2^{(n-1)/2} \cdot 1^1 = 2^{(n-1)/2}$ 次になる．これは偶関数の場合の式 (O-77) の場合 (n は奇数) の次元数と同じである．このような行列表現は，1 次元の既約表現が 1 つ，2 次元の既約表現が $(n-1)/2$ 個からなる．

このような行列表現がどのような場合に可能か考えてみよう．X_0^* と X_n^* は固有値の反転がないので既約表現は 1 次元となる．それ以外の X_r^* は 2 次元である．偶関数の基底ベクトル関数では X_0^* がないから，あるとすれば n が奇数のときの X_n^* である．これから可能な 1 次元の既約表現は 1 つしかないことがわかる．この場合の行列表現は $(n-1)/2$ 次元の $\mathbf{D}_{\max}$ で表される．奇関数の基底ベクトル関数では X_0^* と X_n^* の両方が行列表現に入り得る．n が奇数の場合は，X_n^* が入らず，X_0^* のみとなる．この行列表現は $\mathbf{D}_{\max}^-$ で，$(n-1)/2$ 次元である．同じ次元での行列表現はこの 2 つ以外にない．$\xi_0^* = -1$ と $\xi_n^* = -1$ を明確に定義できるのは A の固有値が n の場合である．式 (O-44a)[5] で，固有値は $n-4k$ で k は連続して同じ方向を向いているスピンのブロックの数である．これから固有値が n になるのは $k=0$ の場合のみであることがわかる．スピン配置はもともと周期的境界条件があるため，スピン反転の数は偶数でなければならないが，それが 2 よりも少ないということは 0 しかない，ということで，式 (O-44a) に頼らないでもわかる．これに対応するスピン配置は，$(+,+,+,+,\cdots,+)$ と $(-,-,-,-,\cdots,-)$ の 2 種類しかない．

n が偶数の場合，最大行列表現の $\mathbf{D}_{\max}^-$ の次元は $(n-2)/2$ である．この場合は，X_0^* と X_n^* の両方が行列表現に入る場合である．これは奇関数の基底ベクトル関数空間における演算子の行列表現でしか見られない．すなわち，この行列表現には $\mathbf{D}_{\max}^-$ の 1 種類しかないということである．

$*\quad *\quad *\quad *\quad *$

一方，この式 (O-82-2) と同じ $(n-2)/2$ 次元の行列表現で表されるスピン配置がある．この配置は 2 種類あって，$(+,-,+,-,\cdots,-)$ および $(-,+,-,+,\cdots,+)$ である．スピン反転の回数は偶数でなければならない．したがって，この場合の n は偶数でなければならない．このスピン配置の場合，A の固有値は $-n$ になる．したがって，これを満足する X_r^* の固有値は式 (30) で固有値を $-n$ にした場合であるから，式 (31) より，

$$\xi_0^* = \xi_2^* = \xi_4^* = \cdots = \xi_n^* = 1 \tag{39}$$

でなければならない．これより，$\xi_0 = -\xi_0^* = -1$，$\xi_n = \xi_n^* = 1$，残りは符号反転が可能となり，これを満たす行列表現は，

$$\mathbf{D}_{\rm alt} = \mathbf{D}_-(Q_0) \otimes \mathbf{D}_2(Q_2) \otimes \mathbf{D}_2(Q_4) \otimes \cdots \otimes \mathbf{D}_2(Q_{n-2}) \otimes \mathbf{D}_+(Q_n) \quad (n = 2m) \tag{O-82a}$$

となる．このようなスピン配置から Y_r^* 演算子などを用いて派生する不変ベクトル関数部分空間が形成される．このベクトル空間は式 (O-82a) の直積空間に対応し，その次元でもある．

＊ ＊ ＊ ＊ ＊

Onsager はここまで不変基底ベクトル関数部分空間をつくる最初の基底ベクトル関数として χ_0，χ_0^*，$\chi_0^{(-)*}$ を具体的にあげてきた．スピンの配置が $(+-+-\cdots+-)$ と $(-+-+\cdots-+)$ の場合の固有基底ベクトル関数は具体的に記されていないが，これは記述すると式 (O-81) よりもかなり長くなるためであって，同じように記述すればこのスピン配置に対応した固有基底ベクトル関数も与えられる．以上は，すべてスピン配置が具体的に示されていた．Onsager はこの後，次のような一般的な基底ベクトル関数を提示している．この基底ベクトル関数 $\chi_1(2r;(\mu))$ は少なくとも B の固有関数であることが後でわかる．まず，この基底ベクトル関数 $\chi_1(2r;(\mu))$ を見てみよう．

$$\chi_1(2r;\mu_1,\cdots,\mu_n) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} \exp\frac{2\pi \mathrm{i} rk}{n}\mu_k \tag{O-83a}$$

Onsager は，この基底関数を式 (O-55) の回転鏡面対称性 (dihedral symmetry) の観点から見ている．この対称性とは次の変換を施したときの対する普遍性である．

$$\mu_k \to \mu_{j\pm k} \tag{O-55}$$

ただし，ここでは，混同するのを避けるため，元の式の記号（j と k）を変更している．

$2r = 0$ の場合，

$$\chi_1(0;\mu_1,\cdots,\mu_n) = \frac{1}{\sqrt{n}}(\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n) \tag{40}$$

であるから，これは，回転鏡面対称性を満たす．スピン配置が $(++++\cdots++)$ と $(----\cdots--)$ のときに，A は $\chi_1(0;(\mu))$ を固有ベクトルとして固有値 n をもつ．χ_1 は奇関数であるから，この基底ベクトル関数を用いた行列表現は式 (O-82) で表される既約表現の直積になる．式 (O-68) の代数と書いてあるのは，直積の各ブロックにおける演算子が式 (O-68) の代数に従うということである．

n が偶数のとき，$2r = n$ とすると，この基底ベクトル関数は次の形をとる．

$$\chi_1(n;\mu_1,\cdots,\mu_n) = \frac{1}{\sqrt{n}}(-\mu_1 + \mu_2 - \mu_3 + \cdots + \mu_n) \tag{41}$$

この基底ベクトル関数は上の式 (O-55) の変換で，j が偶数のときに不変である．j が奇数のときには符号が反転する．したがって，$\chi_1(n;(\mu))$ は部分的に式 (O-55) の回転鏡面対称性を満たす．

スピンの配置が $(+-+-\cdots+-)$ と $(-+-+\cdots-+)$ となっている場合，A は $\chi_1(n;(\mu))$ 固有値 $-n$ をもつ．すなわち，

$$(A,\ \chi_1(n;(\mu))) = -n\chi_1(n;(\mu)) \tag{42}$$

である．このスピン配置では，$\chi_1(0;(\mu))$ は 0 となり固有ベクトルにはなり得ない．一方，$\chi_1(n;(\mu))$ は奇関数でこのスピン配置のときに固有ベクトルとなる．この固有ベクトル関数は X_{2r}^* の固有関数でもある．Y_{2r}^* によって χ_1 から不変ベクトル関数部分空間が派生する．$\chi_1(n;(\mu))$ の固有値は $\xi_0^* = \xi_2^* = \xi_4^* = \cdots = \xi_{2n}^* = 1$ でなければならず，これから，$\xi_0 = -\xi_0^* = 1$，$\xi_n = \xi_n^* = -1$ となり，X_{2r}^*，Y_{2r}^* などの演算子を $\chi_1(n;(\mu))$ から形成された基底ベクトル関数系で行列表現すれば，すべて式 (O-82a) に示される既約表現の直積で表される．

$* \quad * \quad * \quad * \quad *$

$0 < 2r < n$ の場合，$\chi_1(2r; (\mu))$ は式 (O-55) の変換，すなわち，

$$\mu_k \to \mu_{j\pm k} \tag{O-55}$$

を施してみよう．ただし，ここでは，混同するのを避けるため，記号 j と k を用いた．

式 (O-55) の変換を二段階に分割し，まず，$\mu_k \to \mu_{-k}$ と変換する．そうすると，μ_k と $\exp(2\pi\mathrm{i}rk/n)$ の周期性や，置き換えなどを用いると，$\chi_1(2r)$ は $\chi_1(2r) \to \chi_1(-2r)$ と変換される．

次に，$\mu_k \to \mu_{j+k}$ と変換する．同じような式変形することにより，$\chi_1(2r)$ は $\chi_1(2r) \to \exp(-2\pi\mathrm{i}rj/n)\chi_1(2r)$ と変換される．

このように，$\chi_1(2r)$ 単独では式 (O-55) の対称性を満たさない．対にして，$\chi_1(2r) + \chi_1(-2r)$ とすれば，前半の操作での式 (O-55) 対称性は満たされるが，後半の操作での式 (O-55) 対称性は満たされない．ちなみに，$\chi_1(2r)\chi_1(-2r)$ は式 (O-55) の対称性を満たす．

$\chi_1(2r; (\mu))$ から派生する基底ベクトル関数による演算子の行列表現を考えてみよう．これまでは，χ_0 や $\chi_0^{(-1)*}$ のように固有ベクトル関数は単純な定数や μ_j の多項式であったので，B や A の簡単な固有関数になることがわかった．$\chi_1(2r; (\mu))$ はより複雑な関数になっており，B や A の固有関数になっているかすぐにはわからないし (B の固有関数であることは後でわかる)，固有関数であったとして，n や $-n$ のような固有値をもっていて，すべての ξ_r^* が一義的に決定できるとはすぐには言えない．これを理解するには以下の様な X_{2r} と $\chi_1(2s; (\mu))$ の演算関係を知る必要がある．

$\chi_1(n; (\mu))$ を行列表現の基底ベクトル関数とするために，X_{2r} の χ_1 に対する演算 $(X_{2r},\ \chi_1(2s; (\mu)))$ の結果を明確にしておこう．式 (O-83c) には，$(X_{2r},\ \chi_1(\pm 2r; (\mu))) = 0$ と記されている．その場合，行列表現の $2r$ ブロックは 0 次元になる．まず，このことを確認しておこう．Onsager は not too laborious と書いているが，こういうときはかなり大変で，導出は延々長くなるのでとても論文には書けない場合が多い．

$0 < 2s < n$ とする．式 (O-62) を用いて，

$$(X_{2r},\ \chi_1(2s;\ \mu_1, \cdots, \mu_n)) = \frac{1}{4n\sqrt{n}} \sum_{a,b=1}^{2n} \sum_{k=1}^{n} \cos\frac{2\pi r(a-b)}{n} \exp\frac{2\pi\mathrm{i}sk}{n} (P_{ab},\ \mu_k) \tag{43}$$

と表すことができる．ここで，$\cos[2\pi r(a-b)/n]$ が a, b に関して周期 n であること，および χ_1 が奇関数であるから $C = -1$ であることに注意すると，

$$\begin{aligned}
&\sum_{a,b=1}^{2n} \cos\frac{2\pi r(a-b)}{n} P_{ab} \\
=&\sum_{a,b=1}^{n} \cos\frac{2\pi r(a-b)}{n} P_{ab} + \sum_{a,b=1}^{n} \cos\frac{2\pi r(a-b)}{n} P_{a+n,b} + \sum_{a,b=1}^{n} \cos\frac{2\pi r(a-b)}{n} P_{a,b+n} + \sum_{a,b=1}^{n} \cos\frac{2\pi r(a-b)}{n} P_{a+n,b+n} \\
=&\sum_{a,b=1}^{n} \cos\frac{2\pi r(a-b)}{n} P_{ab} - \sum_{a,b=1}^{n} \cos\frac{2\pi r(a-b)}{n} CP_{ab} - \sum_{a,b=1}^{n} \cos\frac{2\pi r(a-b)}{n} CP_{ab} + \sum_{a,b=1}^{n} \cos\frac{2\pi r(a-b)}{n} C^2 P_{ab} \\
=&2(1-C) \sum_{a,b=1}^{n} \cos\frac{2\pi r(a-b)}{n} P_{ab} \\
=&4 \sum_{a,b=1}^{n} \cos\frac{2\pi r(a-b)}{n} P_{ab}
\end{aligned} \tag{44}$$

である．これを式 (43) 代入すると，

$$(X_{2r},\ \chi_1(2s; \mu_1, \cdots, \mu_n)) = \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{a,b=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \cos\frac{2\pi r(a-b)}{n} \exp\frac{2\pi\mathrm{i}sk}{n} (P_{ab}, \mu_k) \tag{45}$$

となる．ここで，式 (O-54) から，

$$(P_{ab},\ \mu_k) = \mathrm{sgn}\ \left[\sin\frac{(b-a-\frac{1}{2})\pi}{n}\sin\frac{(k-a-\frac{1}{2})\pi}{n}\sin\frac{(k-b+\frac{1}{2})\pi}{n}\right]\mu_a\mu_b\mu_k \tag{46}$$

となる．この式で，a と b は独立に 1 から n まで渡るので，1 から n の中からとった任意の 2 つの整数は，一方が a，他方が b に入ったとすると，必ずその反対に一方が b，他方が a に入るという a と b の組み合わせをもつ．$a=b$ の場合を除けば，このような対は $a<b$ の場合と $b<a$ の場合に分けられ，互いに 1 対 1 に対応している．

いま，式 (45) において，$k\neq a$ および $k\neq b$ の場合を考えよう．まず，$a<b$ の場合を考える．そのとき，右辺の大括弧内第 1 項は正になり，第 2 項，第 3 項は k と a および b の大小関係で決まる．一方，$b<a$ の場合，$(P_{ab},\ \mu_k)$ の符号は，$a<b$ の場合の式 (46) において a と b を交換した場合に等しく，大括弧内の第 1 因子のみで符号が反転し，$k\neq a,b$ の場合を除いているので，1/2 は無視してよく，それ以外は同じである．つまり，$b<a$ の場合，(P_{ab},μ_k) の符号は $a<b$ の場合から反転する．結局，$a=b$ と $k=a,b$ の場合を除いた a と b に関する総和はすべて相殺する．そうすると，残るのは $a=b$ と $k=a$ および $k=b$ の場合である．

まず，$a=b$ の場合を考えよう．式 (43) から，

$$(X_{2r},\ \chi_1(2s;\mu_1,\cdots,\mu_n))|_{a=b} = \frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{a=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\exp\frac{2\pi\mathrm{i}sk}{n}(P_{aa},\ \mu_k) \tag{47}$$

である．$(P_{aa},\ \mu_k)$ については，式 (46) から，大括弧内の第 1 因子は負，$k=a$ の場合を除くと第 2 因子と第 3 因子は正と正，または負と負であるから，結局，$(P_{aa},\mu_k)=-\mu_a\mu_a\mu_k=-\mu_k$ となる．そうすると，$a=b$ で $k=a$ を除いた場合，式変形途中で式 (O-83a) の定義を代入することにより，

$$\begin{aligned}
&(X_{2r},\ \chi_1(2s;\mu_1,\cdots,\mu_n))|_{\substack{a=b\\k\neq a}} = \frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{a=1}^{n}\sum_{\substack{k=1\\k\neq a}}^{n}\exp\frac{2\pi\mathrm{i}sk}{n}(-\mu_k)\\
&= -\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{a=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{n}\exp\frac{2\pi\mathrm{i}sk}{n}\mu_k-\exp\frac{2\pi\mathrm{i}sa}{n}\mu_a\right]\\
&= -\frac{1}{n}\left[\sum_{a=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\exp\frac{2\pi\mathrm{i}sk}{n}\mu_k-\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{a=1}^{n}\exp\frac{2\pi\mathrm{i}sa}{n}\mu_a\right]\\
&= -\frac{1}{n}\left[\sum_{a=1}^{n}\chi_1(2s;\mu_1,\cdots,\mu_n)-\chi_1(2s;\mu_1,\cdots,\mu_n)\right]\\
&= (-1+\frac{1}{n})\chi_1(2s;\mu_1,\cdots,\mu_n)
\end{aligned} \tag{48}$$

となる．この式は r の値に関係なく成り立つ．

次に，$a=k$ の場合を考えよう．

$a<b$ なら $k<b$ が成り立つ．したがって $k-b+1/2<0$ であるから，式 (46) より，$(P_{kb},\ \mu_k)=\mu_k\mu_b\mu_k=\mu_b$ である．

$b<a$ なら $b<k$ が成り立つ．したがって $k-b+1/2>0$ であるから，式 (46) より，$(P_{kb},\ \mu_k)=\mu_k\mu_b\mu_k=\mu_b$ である．すなわち，$a=k$ ならば常に

$$(P_{kb},\ \mu_k)=\mu_b \tag{49}$$

である．

次に，$b=k$ の場合を考えよう．

$a<b$ なら $a<k$ が成り立つ．したがって $k-a-1/2>0$ であるから，式 (46) より，$(P_{kb},\ \mu_k)=\mu_a\mu_k\mu_k=\mu_a$ である．

$b<a$ なら $k<a$ が成り立つ．したがって $k-a-1/2<0$ であるから，式 (46) より，$(P_{kb},\ \mu_k)=\mu_a\mu_k\mu_k=\mu_a$ である．すなわち，$a=k$ ならば常に

$$(P_{kb},\ \mu_k)=\mu_a \tag{50}$$

である．

以上のことから，$(X_{2r},\chi_1(2s;\mu_1,\cdots,\mu_n))$ を計算しよう．まず，$0<2s<n$ の場合を考える．$a=k$ の場合の式 (43) は

$$\begin{aligned}
&(X_{2r},\ \chi_1(2s;\mu_1,\cdots,\mu_n))|_{a=k}\\
=&\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{b=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{2\pi r(k-b)}{n}\left(\cos\frac{2\pi sk}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi sk}{n}\right)\mu_b\\
=&\frac{1}{2n\sqrt{n}}\sum_{b=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\cos\frac{2\pi[r(k-b)+sk]}{n}+\cos\frac{2\pi[r(k-b)-sk]}{n}\right)\mu_b\\
+&\frac{\mathrm{i}}{2n\sqrt{n}}\sum_{b=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\sin\frac{2\pi[r(k-b)+sk]}{n}-\sin\frac{2\pi[r(k-b)-sk]}{n}\right)\mu_b
\end{aligned}\tag{51}$$

となる．この式で，両方の括弧内の第 1 項は k に関する総和で 0 になるから，

$$\begin{aligned}
=&\frac{1}{2n\sqrt{n}}\sum_{b=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\cos\frac{2\pi[r(k-b)-sk]}{n}-\mathrm{i}\sin\frac{2\pi[r(k-b)-sk]}{n}\right)\mu_b\\
=&\frac{1}{2n\sqrt{n}}\sum_{b=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\exp\frac{-2\pi\mathrm{i}[r(k-b)-sk]}{n}\mu_b
\end{aligned}\tag{52}$$

となる．ここで，$s\neq r$ なら，この式は k に関する総和で 0 となる．$s=r$ なら，式 (O-83a) を代入することにより，

$$\begin{aligned}
=&\frac{1}{2n}\sum_{b=1}^{n}\left[\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\exp\frac{2\pi\mathrm{i}rb}{n}\mu_b\right]=\frac{1}{2n}\sum_{b=1}^{n}\chi_1(2r;\mu_1,\cdots,\mu_n)\\
=&\frac{1}{2}\chi_1(2r;\mu_1,\cdots,\mu_n)
\end{aligned}\tag{53}$$

となる．

$b=k$ の場合もほぼ同様である．式 (43) は

$$\begin{aligned}
&(X_{2r},\ \chi_1(2s;\mu_1,\cdots,\mu_n))|_{b=k}\\
=&\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{a=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{2\pi r(a-k)}{n}\left(\cos\frac{2\pi sk}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi sk}{n}\right)\mu_a\\
=&\frac{1}{2n\sqrt{n}}\sum_{a=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\cos\frac{2\pi[r(a-k)+sk]}{n}+\cos\frac{2\pi[r(a-k)-sk]}{n}\right)\mu_a\\
+&\frac{\mathrm{i}}{2n\sqrt{n}}\sum_{a=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\sin\frac{2\pi[r(a-k)+sk]}{n}-\sin\frac{2\pi[r(a-k)-sk]}{n}\right)\mu_a
\end{aligned}\tag{54}$$

この式で，両方の括弧内の第 2 項は k に関する総和で 0 になるから，

$$\begin{aligned}
=&\frac{1}{2n\sqrt{n}}\sum_{a=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\cos\frac{2\pi[r(a-k)+sk]}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi[r(a-k)+sk]}{n}\right)\mu_a\\
=&\frac{1}{2n\sqrt{n}}\sum_{a=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\exp\frac{2\pi\mathrm{i}[r(a-k)+sk]}{n}\mu_a
\end{aligned}\tag{55}$$

となる．ここで，$s \neq r$ なら，この式は k に関する総和で 0 となる．$s = r$ なら，$a = k$ の場合と全く同様にして，

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2n\sqrt{n}} \sum_{a=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \exp \frac{2\pi \mathrm{i} r a}{n} \mu_a \\
&= \frac{1}{2} \chi_1(2r; \mu_1, \cdots, \mu_n)
\end{aligned} \tag{56}
$$

となる．

$(X_{2r}, \chi_1(2s; \mu_1, \cdots, \mu_n))$ を求めるには，$a = b$，$a = k$，$b = k$ の場合について，重複がないように a，b，k に関して総和をとればよい．$a = k$ と $b = k$ の場合を，それぞれ b と k，および a と k で総和をとると，$a = b = k$ の場合を二重に加えてしまうことになるから，$a = k$ と $b = k$ の 2 つの総和の和から $a = b = k$ の場合を差し引いておかなければならない．式 (48) や式 (52)，式 (56) を導く過程から明らかなように，$a = b = k$ の場合，

$$
(X_{2r},\ \chi_1(2s; \mu_1, \cdots, \mu_n))|_{a=b=k} = \frac{1}{n} \chi_1(2s; \mu_1, \cdots, \mu_n) \tag{57}
$$

である．この値は，$s = r$ および $s \neq r$ の場合，あるいは $s < 0$ の場合でも成り立つ．

$(X_{2r}, \chi_1(2s; \mu_1, \cdots, \mu_n))|_{\substack{a=b \\ k \neq a}}$ については，すでに重複する部分が取り除かれているから，そのまま加えればよい．

したがって，$(X_{2r}, \chi_1(2s; \mu_1, \cdots, \mu_n))$ は次のようになる．

$$
\begin{aligned}
(X_{2r},\ \chi_1(2s; \mu_1, \cdots, \mu_n)) = (X_{2r},\ \chi_1(2s; \mu_1, \cdots, \mu_n))|_{a=b\neq k} + (X_{2r},\ \chi_1(2s; \mu_1, \cdots, \mu_n))|_{a=k} \\
+ (X_{2r}, \chi_1(2s; \mu_1, \cdots, \mu_n))|_{b=k} - (X_{2r}, \chi_1(2s; \mu_1, \cdots, \mu_n))|_{a=b=k}
\end{aligned} \tag{58}
$$

この式に式 (48)，式 (53)，式 (56)，式 (57) を代入すると，

$$
(X_{2r},\ \chi_1(2s; \mu_1, \cdots, \mu_n)) = 0 \quad (s = r) \tag{59}
$$

となる．

次に，s が負の値をとることもできる場合を考えよう．$-n < 2s < 0$ とする．まず，式 (48) は定義そのものであるから，そのまま成り立つ．すなわち，$s = -r$ とすると，

$$
(X_{2r},\ \chi_1(-2r; \mu_1, \cdots, \mu_n))|_{\substack{a=b \\ k \neq a}} = (-1 + \frac{1}{n}) \chi_1(-2r; \mu_1, \cdots, \mu_n) \tag{60}
$$

である．

$a = k$ の場合，式 (51) の両方の括弧内の第 2 項は k の総和で 0 になる．そうすると，式 (52) の指数部分は $2\pi\mathrm{i}[r(k-b) + sk]$ となり，$s = r$ のときに k の総和で 0 になり，$-rbs = -r$ のときに $-rb$ となるから，結局，

$$
\begin{aligned}
(X_{2r},\ \chi_1(-2r; \mu_1, \cdots, \mu_n))|_{a=k} &= \frac{1}{2n} \sum_{b=1}^{n} \left[\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \exp \frac{-2\pi\mathrm{i} r b}{n} \mu_b \right] \\
&= \frac{1}{2} \chi_1(-2r; \mu_1, \cdots, \mu_n)
\end{aligned} \tag{61}
$$

となる．

$b = k$ の場合も上の場合と全く同様で，

$$
\begin{aligned}
(X_{2r},\ \chi_1(-2r; \mu_1, \cdots, \mu_n))|_{b=k} &= \frac{1}{2n} \sum_{b=1}^{n} \left[\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \exp \frac{-2\pi\mathrm{i} r b}{n} \mu_b \right] \\
&= \frac{1}{2} \chi_1(-2r; \mu_1, \cdots, \mu_n)
\end{aligned} \tag{62}
$$

となる．

$a=b$ の場合は式 (48) がそのまま成り立つ．以上の内容の式を代入すると，式 (50) と同じように，

$$(X_{2r},\ \chi_1(-2r;\mu_1,\cdots,\mu_n))=0 \tag{63}$$

が成り立つ．

$s\neq r$ の場合，

$$\begin{aligned}
&(X_{2r},\ \chi_1(2s;\mu_1,\cdots,\mu_n))|_{a=k}=0\\
&(X_{2r},\ \chi_1(2s;\mu_1,\cdots,\mu_n))|_{b=k}=0\\
&(X_{2r},\ \chi_1(2s;\mu_1,\cdots,\mu_n))|_{\substack{a=b\\ k\neq a}}=(-1+\frac{1}{n})\chi_1(2s;\mu_1,\cdots,\mu_n)\\
&(X_{2r},\ \chi_1(2s;\mu_1,\cdots,\mu_n))|_{a=b=k}=\frac{1}{n}\chi_1(2s;\mu_1,\cdots,\mu_n)
\end{aligned} \tag{64}$$

であるから，これを式 (58) に代入すると，

$$(X_{2r},\ \chi_1(2s;\mu_1,\cdots,\mu_n))=-\chi_1(2s;\mu_1,\cdots,\mu_n) \tag{65}$$

が成り立つ．以上をまとめると，

$$(X_{2r},\ \chi_1(2s;\mu_1,\cdots,\mu_n))=\begin{cases}0 & (s=\pm r)\\ \\ -\chi_1(2s;\mu_1,\cdots,\mu_n) & (s\neq r)\end{cases} \tag{66}$$

あるいは，Onsager の記載に従うと，

$$(X_{2r},\ \chi_1(2r;\mu_1,\cdots,\mu_n))=(X_{2r},\ \chi_1(-2r;\mu_1,\cdots,\mu_n))=0\quad(0<2r<n) \tag{O-83c}$$

となる．

最後に，$2r=0$ と $2r=n$ の場合の演算関係を見ておこう．式 (43) から式 (65) までの計算は $2s$ が 1 から $2n$ までの範囲で成り立つ．したがって，式 (66) 第 2 式の場合に相当する．n が偶数のとき，$2r=0$ および $2r=n$ について，n が奇数のときは $2r=0$ について，

$$(X_0,\ \chi_1(\pm 2r;\mu_1,\cdots,\mu_n))=-\chi_1(\pm 2r;\mu_1,\cdots,\mu_n) \tag{67}$$

$$(X_n,\ \chi_1(\pm 2r;\mu_1,\cdots,\mu_n))=-\chi_1(\pm 2r;\mu_1,\cdots,\mu_n) \tag{68}$$

が成り立つ．すなわち，$\xi_0=\xi_n=-1$ である．これから行列表現で 0 番目と n 番目のブロックの既約表現は等しく $\mathbf{D}_-(Q_0)$ である．

奇関数 $\chi_1(\pm 2r;\mu_1,\cdots,\mu_n)$ を基底ベクトル関数としてこれに作用する演算子の行列表現で，第 0 番目と第 n 番目は上のとおりである．それ以外は，r 番目のブロックを除き，これまでと同じである．r 番目のブロックは式 (66) からわかるように，作用した結果 0 になるので，0 次元になる．これを $\mathbf{D}_0(Q_{2r})$ と書くと，全体の行列表現は次のようになる．

$$\begin{aligned}
&\mathbf{D}_-(Q_0)\otimes\mathbf{D}_0(Q_{2r})\otimes\prod_{s\neq r}\mathbf{D}_2(Q_{2s}) && (n\quad \text{odd})\\
&\mathbf{D}_-(Q_0)\otimes\mathbf{D}_-(Q_n)\otimes\mathbf{D}_0(Q_{2r})\prod_{s\neq r}\mathbf{D}_2(Q_{2s}) && (n\quad \text{even})
\end{aligned} \tag{O-83b}$$

n 奇数の場合は r が奇数の X_r，Y_r は全て 0 になるから現れない．

ここで定義した奇関数の基底ベクトル関数 χ_1 は演算子 B に対して固有値 $n-2$ をもつ．これは次の計算から明らかである．式 (O-83a) から

$$
\begin{aligned}
(C_l,\ \chi_1(2r;\mu_1,\cdots,\mu_n)) &= \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\exp\frac{2\pi\mathrm{i}rk}{n}\mu_k - \frac{2}{\sqrt{n}}\exp\frac{2\pi\mathrm{i}rk}{n}\mu_l \\
&= \chi_1(2r;\mu_1,\cdots,\mu_n) - \frac{2}{\sqrt{n}}\exp\frac{2\pi\mathrm{i}rk}{n}\mu_l
\end{aligned}
\tag{69}
$$

となる．したがって，

$$
\begin{aligned}
(B,\ \chi_1(2r;\mu_1,\cdots,\mu_n)) &= (\sum_{l=1}^{n}C_l,\ \chi_1(2r;\mu_1,\cdots,\mu_n)) \\
&= \sum_{l=1}^{n}\chi_1(2r;\mu_1,\cdots,\mu_n) - \frac{2}{\sqrt{n}}\sum_{l=1}^{n}\exp\frac{2\pi\mathrm{i}rk}{n}\mu_l \\
&= (n-2)\chi_1(2r;\mu_1,\cdots,\mu_n)
\end{aligned}
\tag{70}
$$

となる．

ここまで，随分長く $\chi_1(2r;\mu_1,\cdots,\mu_n)$ について書いてきたが，実はこの後で χ_1 が出てくることはない．Onsager としては，自慢の発想だったに違いない．

* * * * *

次はいよいよ固有値をもとめ，分配関数の計算をすることになる．

参考文献

[1] 齋藤正彦「線形代数入門」東京大学出版会 (1966), p. 217.

[2] 「その 2」(2017/8/14 のエントリー).
`http://totoha.web.fc2.com/Onsager_paper2.pdf`

[3] 「その 7」(2017/11/15 のエントリー).
`http://totoha.web.fc2.com/Onsager_paper7.pdf`

[4] 齋藤正彦「線形代数入門」東京大学出版会 (1966), p. 198.

[5] 「その 4」(2017/10/6 のエントリー).
`http://totoha.web.fc2.com/Onsager_paper4.pdf`