Onsager の 2 次元イジングモデル厳密解の論文を読む　その 7

2017.11.15　　鈴木　実

11　A Set of Generating Basis Elements

本節で愈々，固有値を求めようとしている行列 $V = V_2 V_1 = \mathrm{e}^{H'A}\mathrm{e}^{H^*B}$ を対角化するための基底演算子 X_r，Y_r，Z_r が導入される．この演算子は 2 次元イジングモデルを解く上で非常に重要となる．X_r，Y_r，Z_r の定義は，交換関係の式 (O-60) と式 (O-61) から自然に導かれると Onsager は書いている．しかし,「自然に」とはどういうことか，少なくとも「必然的に」という通常の感覚からはなかなかの飛躍がある．考えてみれば，P_{ab} の定義でもそうだった．それだけ洞察が鋭いということだろう．それはさておき，新しい基底演算子とその交換関係，そして四元数代数（リー代数とも言われる）の構築へと進んでみよう．

X_r，Y_r，Z_r の定義

新しい基底演算子は $r = 1, 2, \dots, 2n$ として，次のように定義される．

$$
\begin{aligned}
X_r &= \frac{1}{4n}\sum_{a,b=1}^{2n} \cos\frac{(a-b)r\pi}{n}\ P_{ab} \\
Y_r &= \frac{1}{4n}\sum_{a,b=1}^{2n} \sin\frac{(a-b)r\pi}{n}\ P_{ab} \\
Z_r &= -\frac{\mathrm{i}}{8n}\sum_{a,b=1}^{2n} \sin\frac{(a-b)r\pi}{n}\ (P_{ax}P_{bx} - P_{xa}P_{xb})
\end{aligned}
\tag{O-62}
$$

この定義から次の関係式が直接導かれる．

$$
\begin{aligned}
&X_{-r} = X_r \\
&Y_{-r} = -Y_r \qquad Y_0 = Y_n = 0 \\
&Z_{-r} = -Z_r \qquad Z_0 = Z_n = 0
\end{aligned}
\tag{O-62a}
$$

X_r，Y_r，Z_r と A_k，G_m の関係

基底演算子 X_r，Y_r，Z_r と A_k，G_m の関係を導こう．式 (O-62) やこれから出てくる関係式の b に関する総和において，$b = a + m$ とおいて a と m の総和に変換すると，$\cos[(a-b)r\pi/n]$ および P_{ab} の周期性が $2n$ であることから，次のような総和になることに注意しておこう．

$$
\sum_{a,b=1}^{2n} = \sum_{a=1}^{2n}\sum_{m=1-a}^{2n-a} = \sum_{a=1}^{2n}\left[\sum_{m=1-a}^{0} + \sum_{m=1}^{2n-a}\right] = \sum_{a=1}^{2n}\left[\sum_{m=2n-a+1}^{2n} + \sum_{m=1}^{2n-a}\right] = \sum_{a=1}^{2n}\sum_{m=1}^{2n}
\tag{1}
$$

式 (O-62) 第 1 式において，$b-a=m$ とおくと，

$$
\begin{aligned}
X_r &= \frac{1}{4n}\sum_{a,m=1}^{2n}\cos\frac{mr\pi}{n}\,P_{a,a+m} = \frac{1}{4n}\cos\frac{mr\pi}{n}\sum_{m=1}^{2n}\left[\sum_{a=1}^{n}P_{a,a+m}+\sum_{a=n+1}^{2n}P_{a,a+m}\right]\\
&= \frac{1}{4n}\sum_{m=1}^{2n}\cos\frac{mr\pi}{n}\left[\sum_{a=1}^{n}P_{a,a+m}+\sum_{a=1}^{n}P_{a+n,a+m+n}\right]\\
&= \frac{1}{4n}\sum_{m=1}^{2n}\cos\frac{mr\pi}{n}\left[\sum_{a=1}^{n}P_{a,a+m}+\sum_{a=1}^{n}P_{a,a+m}(-C)^2\right] = \frac{1}{2n}\sum_{m=1}^{2n}\cos\frac{mr\pi}{n}\left[\sum_{a=1}^{n}P_{a,a+m}\right]\\
&= \frac{1}{2n}\sum_{m=1}^{2n}\cos\frac{mr\pi}{n}\,A_m
\end{aligned}
\tag{O-63a-1}
$$

となる．

式 (O-62) の第 2 式については，$b-a=m$ とおくと符号のみ変わるので，途中からは上の式変形と同じようにすればよい．すなわち，

$$
\begin{aligned}
Y_r &= -\frac{1}{4n}\sum_{a,m=1}^{2n}\sin\frac{mr\pi}{n}\,P_{a,a+m} = -\frac{1}{4n}\sin\frac{mr\pi}{n}\sum_{m=1}^{2n}\left[\sum_{a=1}^{n}P_{a,a+m}+\sum_{a=n+1}^{2n}P_{a,a+m}\right]\\
&= -\frac{1}{2n}\sum_{m=1}^{2n}\sin\frac{mr\pi}{n}\,A_m
\end{aligned}
\tag{O-63a-2}
$$

となる．

式 (O-62) の第 3 式についても，$b-a=m$ とおくと，式 (O-58) を用いて，

$$
\begin{aligned}
Z_r &= \frac{\mathrm{i}}{8n}\sum_{a,m=1}^{2n}\sin\frac{mr\pi}{n}\,(P_{ax}P_{a+m,x}-P_{xa}P_{x,a+m})\\
&= \frac{\mathrm{i}}{8n}\sum_{m=1}^{2n}\sin\frac{mr\pi}{n}\left[\sum_{a=1}^{n}(P_{ax}P_{a+m,x}-P_{xa}P_{x,a+m})+\sum_{a=n+1}^{2n}(P_{ax}P_{a+m,x}-P_{xa}P_{x,a+m})\right]\\
&= \frac{\mathrm{i}}{8n}\sum_{m=1}^{2n}\sin\frac{mr\pi}{n}\left[2G_m+\sum_{a=1}^{n}(P_{a+n,x}P_{a+m+n,x}-P_{x,a+n}P_{x,a+m+n})\right]\\
&= \frac{\mathrm{i}}{8n}\sum_{m=1}^{2n}\sin\frac{mr\pi}{n}\left[2G_m+\sum_{a=1}^{n}(P_{a,x}P_{a+m,x}-P_{x,a}P_{x,a+m})(-C)^2\right]\\
&= \frac{\mathrm{i}}{2n}\sum_{m=1}^{2n}\sin\frac{mr\pi}{n}G_m
\end{aligned}
\tag{O-63a-3}
$$

となる．

＊　＊　＊　＊　＊

次に，式 (O-63a-1)–(O-63a-3) から A_k，G_m を求めておこう．以下では，次の恒等式を用いる．

$$
\sum_{r=1}^{2n}\cos\frac{(m-l)r\pi}{n} = 2n\delta_{m,l}
\tag{2}
$$

$\delta_{m,n}$ はクロネッカーの δ である．

式 (O-63a-1) に $\cos(lr\pi/n)$ を掛けたものから式 (O-63a-2) に $\sin(lr\pi/n)$ を掛けたものを引き，全体を r に

ついて 1 から $2n$ まで総和をとると，

$$
\begin{aligned}
&\sum_{r=1}^{2n}(X_r\cos\frac{lr\pi}{n}-Y_r\sin\frac{lr\pi}{n})\\
=&\frac{1}{2n}\sum_{r=1}^{2n}\sum_{m=1}^{2n}\left(\cos\frac{mr\pi}{n}\cos\frac{lr\pi}{n}+\sin\frac{mr\pi}{n}\sin\frac{lr\pi}{n}\right)A_m\\
=&\frac{1}{2n}\sum_{m=1}^{2n}\sum_{r=1}^{2n}\left(\cos\frac{(l-m)r\pi}{n}\right)A_m=\frac{1}{2n}\sum_{m=1}^{2n}2n\delta_{m,l}A_m=A_l
\end{aligned}
\tag{3}
$$

となるから，すなわち，l を m と書き換えて，

$$
A_m=\sum_{r=1}^{2n}(X_r\cos\frac{mr\pi}{n}-Y_r\sin\frac{mr\pi}{n})
\tag{O-63b-1}
$$

となる．

次に，式 (O-63a-3) に $\sin(lr\pi/n)$ を掛けて r について 1 から $2n$ まで総和をとると，

$$
\begin{aligned}
\sum_{r=1}^{2n}Z_r\sin\frac{lr\pi}{n}=&\frac{\mathrm{i}}{2n}\sum_{m=1}^{2n}\sum_{r=1}^{2n}\sin\frac{mr\pi}{n}\sin\frac{lr\pi}{n}G_m\\
=&\frac{\mathrm{i}}{2n}\sum_{m=1}^{2n}\sum_{r=1}^{2n}\frac{1}{2}\left[-\cos\frac{(m+l)r\pi}{n}+\cos\frac{(m-l)r\pi}{n}\right]G_m\\
=&\frac{\mathrm{i}}{4n}\sum_{m=1}^{2n}2n(-\delta_{m,-l}+\delta_{m,l})G_m\\
=&\frac{\mathrm{i}}{2}(-G_{-l}+G_l)=\mathrm{i}G_l
\end{aligned}
\tag{4}
$$

となるから，l を m と書き換えて，結局，

$$
G_m=-\mathrm{i}\sum_{r=1}^{2n}Z_r\sin\frac{mr\pi}{n}
\tag{O-63b-3}
$$

となる．

* * * * *

式 (O-56a) や「その 6」[1] で $B=\sum C_j$ と $A=\sum s_js_{j+1}$ を A_m で表した．すなわち，$B=\sum C_j=-A_0$ と $A=\sum s_js_{j+1}=A_1$ であった．上で導いた A_m と X_r および Y_r の関係を用いれば，B と A を X_r と Y_r で表すことができる．その前に，まず次のことが成り立つことに注意しておこう．

$$
X_{2n-r}=\frac{1}{4n}\sum_{a,b=1}^{2n}\cos\left[2(a-b)\pi-\frac{(a-b)r\pi}{n}\right]P_{ab}=\frac{1}{4n}\sum_{a,b=1}^{2n}\cos\frac{(a-b)r\pi}{n}P_{ab}=X_r
\tag{5}
$$

$$
Y_{2n-r}=\frac{1}{4n}\sum_{a,b=1}^{2n}\sin\left[2(a-b)\pi-\frac{(a-b)r\pi}{n}\right]P_{ab}=-\frac{1}{4n}\sum_{a,b=1}^{2n}\sin\left[\frac{(a-b)r\pi}{n}\right]P_{ab}=-Y_r
\tag{6}
$$

r を $n-r$ に置き換えると

$$
X_{n+r}=X_{n-r}
\tag{7}
$$

$$
Y_{n+r}=-Y_{n-r}
\tag{8}
$$

という関係がある．そうすると，式 (O-63b-1) から直接，

$$
\begin{aligned}
B = -A_0 &= -\sum_{r=1}^{2n} X_r \\
&= -(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) - (X_{n+1} + X_{n+2} + \cdots + X_{2n}) \\
&= -(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) - (X_{n-1} + X_{n-2} + \cdots + X_1 + X_0) \\
&= -X_0 - 2X_1 - 2X_2 - \cdots - 2X_{n-1} - X_n
\end{aligned} \tag{O-63c-1}
$$

と表される．次に，A に関しては同じく式 (O-63b-1) および式 (O-63b-2) から，

$$
\begin{aligned}
A = A_1 &= \sum_{r=1}^{2n} \left[X_r \cos\frac{r\pi}{n} - Y_r \sin\frac{r\pi}{n} \right] \\
&= (X_1 \cos\frac{\pi}{n} + \cdots + X_{n-1}\cos\frac{(n-1)\pi}{n} - X_n) + (X_{n+1}\cos\frac{(n+1)\pi}{n} + \cdots + X_{2n-1}\cos\frac{(2n-1)\pi}{n} + X_0) \\
&\quad - (Y_1 \sin\frac{\pi}{n} + \cdots + Y_{n-1}\sin\frac{(n-1)\pi}{n}) - (Y_{n+1}\sin\frac{(n+1)\pi}{n} + \cdots + Y_{2n-1}\sin\frac{(2n-1)\pi}{n}) \\
&= (2X_1 \cos\frac{\pi}{n} + \cdots + 2X_{n-1}\cos\frac{(n-1)\pi}{n} - X_n) + X_0 - (2Y_1 \sin\frac{\pi}{n} + \cdots + 2Y_{n-1}\sin\frac{(n-1)\pi}{n}) \\
&= X_0 + 2\left[X_1\cos\frac{\pi}{n} - Y_1 \sin\frac{\pi}{n} + \cdots + X_{n-1}\cos\frac{(n-1)\pi}{n} - Y_{n-1}\sin\frac{(n-1)\pi}{n} \right] - X_n
\end{aligned} \tag{O-63c-2}
$$

となる．

以上のように，A と B は X_r，Y_r を用いて表すことができる．逆に，X_r，Y_r，Z_r は A と B を用いて表すことができる．実際，式 (O-63a-1) および式 (O-63a-2) により A_m を用いて X_r，Y_r が表され，その中に $A = A_1$ が含まれる．また，Z_r は式 (O-63a-3) により G_m を用いて表され，式 (O-60) より [1]，$G_m = [A_m, A_0] = [A_m, -B]$ であるから，B を用いて Z_r を表すことができる．

* * * * *

次に，C の符号に依存して，X_r または Y_r は添字 r の偶奇により 0 になることを示そう．このことは，今後の展開において重要な役割を果たす．

式 (O-57)（「その 6」[1]）と式 (O-63b-1) より，

$$
A_{m+n} = -CA_m = -C\sum_{r=1}^{2n}(X_r \cos\frac{mr\pi}{n} - Y_r \sin\frac{mr\pi}{n}) \tag{9}
$$

である．また，式 (O-63b-1) より直接，

$$
\begin{aligned}
A_{m+n} &= \sum_{r=1}^{2n}\left[X_r \cos\frac{mr\pi}{n}(-1)^r - Y_r \sin\frac{mr\pi}{n}(-1)^r \right] \\
&= \sum_{r=1}^{2n}(-1)^r (X_r \cos\frac{mr\pi}{n} - Y_r \sin\frac{mr\pi}{n})
\end{aligned} \tag{10}
$$

となる．式 (9) と式 (10) は等しく，両式に C を掛けてから右辺を等値することによって，

$$
\sum_{r=1}^{2n}[1 + (-1)^r C](X_r \cos\frac{mr\pi}{n} - Y_r \sin\frac{mr\pi}{n}) = 0 \tag{11}
$$

が成り立つ．この式に $\cos(ml\pi/n)$ を掛けて m について 1 から $2n$ まで総和をとると，第 2 項は消えて第 1 項は，

$$
\begin{aligned}
0 =& \sum_{m=1}^{2n}\sum_{r=1}^{2n}[1+(-1)^r C]\frac{1}{2}X_r(\cos\frac{(r+l)m\pi}{n} + \cos\frac{(r-l)m\pi}{n}) \\
=& \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{2n}[1+(-1)^r C]X_r(\delta_{r,-l}+\delta_{r,l}) \\
=& \frac{1}{2}[(1+(-1)^{-l}C)X_{-l}+(1+(-1)^l C)X_l] = [1+(-1)^l C]X_l
\end{aligned} \tag{12}
$$

となるから，l を r と書き換えて，

$$
[1+(-1)^r C]X_r = 0 \tag{O-64}
$$

が成り立つ．

次に，式 (11) に $\sin(ml\pi/n)$ を掛けて m について 1 から $2n$ まで総和をとると，第 1 項は消えて第 2 項は，

$$
\begin{aligned}
0 =& -\sum_{m=1}^{2n}\sum_{r=1}^{2n}[1+(-1)^r C]\frac{1}{2}Y_r(-\cos\frac{(r+l)m\pi}{n} + \cos\frac{(r-l)m\pi}{n}) \\
=& \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{2n}[1+(-1)^r C]Y_r(\delta_{r,-l}-\delta_{r,l}) \\
=& \frac{1}{2}[(1+(-1)^{-l}C)Y_{-l}-(1+(-1)^l C)Y_l] = -[1+(-1)^l C]Y_l
\end{aligned} \tag{13}
$$

となるから，l を r と書き換えて，

$$
[1+(-1)^r C]Y_r = 0 \tag{O-64}
$$

が成り立つ．

一方，G_m については，式 (O-59)（「その 6」[1]）から，

$$
G_{m+n} = -CG_m = \mathrm{i}C\sum_{r=1}^{2n} Z_r \sin\frac{mr\pi}{n}, \tag{14}
$$

式 (O-63b-2) から，

$$
G_{m+n} = -\mathrm{i}\sum_{r=1}^{2n} Z_r \sin\frac{(m+n)r\pi}{n} == -\mathrm{i}\sum_{r=1}^{2n} Z_r \sin\frac{mr\pi}{n}(-1)^r \tag{15}
$$

となるから，辺辺差し引くと，

$$
0 = \mathrm{i}\sum_{r=1}^{2n}[C+(-1)^r]Z_r \sin\frac{mr\pi}{n} \tag{16}
$$

となる．この式に $\sin(ml\pi/n)$ を掛けて m について 1 から $2n$ まで総和をとると，前の式を導くのと同様の方法により次式を得る．

$$
[1+(-1)^r C]Z_r = 0 \tag{O-64}
$$

以上の式 (O-64) に示される 3 つの式を見ると，$[1+(-1)^r C] \neq 0$ のとき，$X_r = Y_r = Z_r = 0$ となることがわかる．もし，$C = 1$ なら，すなわち，この基底演算子系の代数演算が偶関数の上で行われる場合で，かつ r が偶数なら $X_r = Y_r = Z_r = 0$ となり奇数の X_r, Y_r, Z_r のみが残る．もし，$C = 1$ なら逆に，この基底演算子系の代数演算が奇関数の上で成り立ち，かつ r が奇数なら $X_r = Y_r = Z_r = 0$ となり偶数の X_r, Y_r, Z_r のみが残る，ということを意味する．Onsager は，両者は独立に扱うこともできるが，両方一緒に扱うことが便利であるとして，この後，$(1+C)$ という因数を含めるような，Onsager 流の独特な表現を用いている．

$X_r,\ Y_r,\ Z_r$ に関する交換子

以下では $X_r,\ Y_r,\ Z_r$ に関する交換関係および代数関係を示す．導出は三角関数代数を使うが長い．したがって，Onsager は結果のみを示しているが，ここでは丁寧に確認しておこう．

- 交換子 $[X_r,\ X_s]$

まず，$r=s$ の場合，$[X_r,\ X_s]=0$ は自明である．また，$r=-s$ のとき，$X_s=X_{-r}=X_r$ であるから，$[X_r,\ X_s]=0$ である．ここではそれ以外の場合，すなわち，$r\neq\pm s$ の場合を考えればよい．$r=s+n$ または $r=-s+n$ の場合は，$r\neq\pm s$ の場合に含まれることが後でわかる．論文では，$\cos(r\pi/n)\neq\cos(s\pi/n)$ と書いてあるのは，$r\neq\pm s$ であることの Onsager 流表現である．

まず，式 (O-63a-1) から，

$$X_rX_s=\frac{1}{(2n)^2}\sum_{m,l=1}^{2n}\cos\frac{mr\pi}{n}\cos\frac{ls\pi}{n}A_mA_l$$
$$X_sX_r=\frac{1}{(2n)^2}\sum_{m,l=1}^{2n}\cos\frac{ls\pi}{n}\cos\frac{mr\pi}{n}A_lA_m$$

となるから，辺辺差し引き，

$$[X_r,\ X_s]=\frac{1}{(2n)^2}\sum_{m,l=1}^{2n}\cos\frac{mr\pi}{n}\cos\frac{ls\pi}{n}[A_m,\ A_l]$$

式 (O-60) を用いて，

$$=\frac{1}{n^2}\sum_{m,l=1}^{2n}\cos\frac{mr\pi}{n}\cos\frac{ls\pi}{n}G_{m-l}$$

$k=l-m$ とおいて，

$$\begin{aligned}
&=\frac{1}{n^2}\sum_{m=1}^{2n}\sum_{k=1-m}^{2n-m}\cos\frac{mr\pi}{n}\cos\frac{(k+m)s\pi}{n}(-G_k)\\
&=-\frac{1}{n^2}\sum_{m=1}^{2n}\sum_{k=1}^{2n}\cos\frac{mr\pi}{n}\cos\frac{(k+m)s\pi}{n}G_k\\
&=-\frac{1}{2n^2}\sum_{m=1}^{2n}\sum_{k=1}^{2n}\left[\cos\frac{m(r+s)\pi+ks\pi}{n}+\cos\frac{m(r-s)\pi-ks\pi}{n}\right]G_k
\end{aligned}\tag{17}$$

となるが，右辺は $r\neq\pm s$ の場合，m に関する総和で 0 となる[1]．$r=\pm s+n$ の場合も同様に 0 になる．したがって，

$$[X_r,\ X_s]=0\tag{O-65a-1}$$

[1]cos 関数の位相に定数が含まれていても，

$$\sum_{m=0}^{2n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(mr+\alpha)\pi/n}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(r+\alpha)\pi/n}\frac{1-\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}r}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}r\pi/n}}=0$$

より，実部を比較することにより，次式が成り立つ．

$$\sum_{m=0}^{2n}\cos\frac{(mr+\alpha)\pi}{n}=0$$

が成り立つ．

- 交換子 $[Y_r,\ Y_s]$

この場合も $[X_r,\ X_s]$ と同様に，$r=\pm s$ のとき $[Y_r,\ Y_s]=0$ である．$r\neq\pm s$ のとき，式 (O-63a-2) を用いて，

$$[Y_r,\ Y_s]=\frac{1}{(2n)^2}\sum_{m,l=1}^{2n}\sin\frac{mr\pi}{n}\sin\frac{ls\pi}{n}[A_m,\ A_l]$$

式 (O-60) を用いて，

$$=\frac{1}{n^2}\sum_{m,l=1}^{2n}\sin\frac{mr\pi}{n}\sin\frac{ls\pi}{n}G_{m-l}$$

$k=l-m$ とおいて，

$$\begin{aligned}&=-\frac{1}{n^2}\sum_{m=1}^{2n}\sum_{k=1}^{2n}\sin\frac{mr\pi}{n}\sin\frac{(k+m)s\pi}{n}G_k\\&=-\frac{1}{2n^2}\sum_{m=1}^{2n}\sum_{k=1}^{2n}\left[-\cos\frac{m(r+s)\pi+ks\pi}{n}+\cos\frac{m(r-s)\pi-ks\pi}{n}\right]G_k\end{aligned}\tag{18}$$

となり，上の場合と同じように，$r\pm s\neq 0$ であるから m に関する総和で 0 となる．したがって，

$$[Y_r,\ Y_s]=0\tag{O-65a-2}$$

が成り立つ．

- 交換子 $[Z_r,\ Z_s]$

この場合も $[X_r,\ X_s]$ と同様に，$r=\pm s$ のとき $[Z_r,\ Z_s]=0$ である．$r\neq\pm s$ のとき，式 (O-63a-3) と式 (O-61a) を用いると，

$$\begin{aligned}[Z_r,\ Z_s]&=-\frac{1}{(2n)^2}\sum_{m,l=1}^{2n}\sin\frac{mr\pi}{n}\sin\frac{ls\pi}{n}[G_m,\ G_l]\\&=0\end{aligned}\tag{19}$$

となり，

$$[Z_r,\ Z_s]=0\tag{O-65a-3}$$

が成り立つ．

●交換子 $[X_r,\ Y_s]$ （$r\neq s$ かつ $r\neq -s$ の場合)

$r\neq\pm s$ の場合を考える．$r=\pm s$ の場合はこの後で別の式を導く．これまでと同様の手法によって式変形す

ることにより，

$$
\begin{aligned}
[X_r,\ Y_s] &= -\frac{1}{(2n)^2}\sum_{m,l=1}^{2n}\cos\frac{mr\pi}{n}\sin\frac{ls\pi}{n}[A_m,\ A_l] \\
&= -\frac{1}{n^2}\sum_{m,l=1}^{2n}\cos\frac{mr\pi}{n}\sin\frac{ls\pi}{n}G_{m-l} \\
&= -\frac{1}{n^2}\sum_{m,k=1}^{2n}\cos\frac{mr\pi}{n}\sin\frac{(m+k)s\pi}{n}G_{-k} \\
&= \frac{1}{2n^2}\sum_{m,k=1}^{2n}\left[\sin\frac{m(r+s)\pi+ks\pi}{n}-\sin\frac{m(r-s)\pi-ks\pi}{n}\right]G_k = 0
\end{aligned}
\tag{20}
$$

となり，

$$
[X_r,\ Y_s] = 0 \tag{O-65a-4}
$$

が成り立つ．

●交換子 $[Y_r,\ Z_s]$ ($r \neq s$ かつ $r \neq -s$ の場合)

$r \neq s$ かつ $r \neq -s$ とする．そうすると，式 (O-63a-2) と式 (O-63a-3) を用い，式 (O-61) を適用すると，

$$
\begin{aligned}
[Y_r,\ Z_s] &= -\frac{\mathrm{i}}{(2n)^2}\sum_{m,l=1}^{2n}\sin\frac{mr\pi}{n}\sin\frac{ls\pi}{n}[G_l,\ A_m] \\
&= -2\frac{1}{2n^2}\sum_{m,l=1}^{2n}\sin\frac{mr\pi}{n}\sin\frac{ls\pi}{n}(A_{m+l}-A_{m-l})
\end{aligned}
$$

となる．第 1 項で $m+l=k$，第 2 項で $m-l=k$ とおくと，

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{\mathrm{i}}{(2n)^2}\sum_{m=1}^{2n}\left[\sum_{k=1+m}^{2n+m}\sin\frac{mr\pi}{n}\sin\frac{(k-m)s\pi}{n}A_k-\sum_{k=m-1}^{m-2n}\sin\frac{mr\pi}{n}\sin\frac{(m-k)s\pi}{n}A_k\right] \\
&= -\frac{\mathrm{i}}{(2n)^2}\sum_{m=1}^{2n}\left[\sum_{k=1}^{2n}\sin\frac{mr\pi}{n}\sin\frac{(k-m)s\pi}{n}A_k-\sum_{k=1}^{2n}\sin\frac{mr\pi}{n}\sin\frac{(m-k)s\pi}{n}A_k\right]
\end{aligned}
\tag{21}
$$

となり，$[Y_r, Y_s]$ を計算したときと同じようにして上式の 2 つの項とも 0 になる．したがって，

$$
[Y_r,\ Z_s] = 0 \tag{O-65a-5}
$$

が成り立つ．

●交換子 $[Z_r,\ X_s]$ ($r \neq s$ かつ $r \neq -s$ の場合)

$r \neq s$ かつ $r \neq -s$ とする．そうすると，式 (O-63a-3) と式 (O-63a-1) を用い，式 (O-61) を適用すると，

$$
\begin{aligned}
[Z_r,\ X_s] &= \frac{\mathrm{i}}{(2n)^2}\sum_{m,l=1}^{2n}\sin\frac{mr\pi}{n}\cos\frac{ls\pi}{n}[G_m,\ A_l] \\
&= 2\frac{1}{2n^2}\sum_{m,l=1}^{2n}\sin\frac{mr\pi}{n}\cos\frac{ls\pi}{n}(A_{l+m}-A_{l-m})
\end{aligned}
$$

となる．第 1 項で $m+l=k$，第 2 項で $l-m=k$ とおくと，

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\mathrm{i}}{(2n)^2}\sum_{m=1}^{2n}\left[\sum_{k=1-m}^{2n-m}\sin\frac{mr\pi}{n}\cos\frac{(k-m)s\pi}{n}A_k - \sum_{k=1+m}^{2n+m}\sin\frac{mr\pi}{n}\cos\frac{(k+m)s\pi}{n}A_k\right] \\
&= -\frac{\mathrm{i}}{(2n)^2}\sum_{m=1}^{2n}\left[\sum_{k=1}^{2n}\sin\frac{mr\pi}{n}\cos\frac{(k-m)s\pi}{n}A_k - \sum_{k=1}^{2n}\sin\frac{mr\pi}{n}\cos\frac{(k+m)s\pi}{n}A_k\right] \qquad (22)
\end{aligned}
$$

となり，$[X_r, Y_s]$ を計算したときと同じようにして上式の 2 つの項とも 0 になる．したがって，

$$
[Z_r,\ Y_s] = 0 \qquad \text{(O-65a-6)}
$$

が成り立つ．

* * * * *

以下は $s=r$ の場合で，交換子が 0 にならない場合である．

●交換子 $[X_r,\ Y_r]$ ($r=1,\ldots,n-1$ の場合)

$r=n$ または $r=2n$ の場合は $Y_r=0$ であるから，$[X_r,\ Y_r]=0$ である．それ以外の場合は次のようになる．

$$
\begin{aligned}
[X_r,\ Y_r] &= -\frac{1}{(2n)^2}\sum_{m,l=1}^{2n}\cos\frac{mr\pi}{n}\sin\frac{lr\pi}{n}[A_m,\ A_l] \\
&= -\frac{1}{n^2}\sum_{m,l=1}^{2n}\cos\frac{mr\pi}{n}\sin\frac{lr\pi}{n}G_{m-l} \\
&= -\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{2n}\sum_{m=1}^{2n}\cos\frac{mr\pi}{n}\sin\frac{(m-k)r\pi}{n}G_k \\
&= -\frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^{2n}\sum_{m=1}^{2n}\left[\sin\frac{2mr\pi-kr\pi}{n} - \sin\frac{kr\pi}{n}\right]G_k
\end{aligned}
$$

ここで右辺第 1 項は m の総和で 0 になる．第 2 項は定数として総和により因数 $2n$ が掛けられるので，式 (O-63a-3) を適用すると，

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\sin\frac{kr\pi}{n}G_k \\
&= -2\mathrm{i}Z_r \qquad (23)
\end{aligned}
$$

となる．すなわち，

$$
[X_r,\ Y_r] = -2\mathrm{i}Z_r \qquad \text{(O-65b-1)}
$$

が成り立つ．

●交換子 $[Y_r,\ Z_r]$ ($r=1,\ldots,n-1$ の場合)

$r=n$ または $r=2n$ の場合は $Y_r=0$ であるから，$[Y_r,\ Z_r]=0$ である．それ以外の場合は次のようになる．式 (O-63a-2) と式 (O-63a-3)，および式 (O-61) を用いて，

$$
\begin{aligned}
[Y_r,\ Z_r] &= -\frac{\mathrm{i}}{(2n)^2}\sum_{m,l=1}^{2n}\sin\frac{mr\pi}{n}\sin\frac{lr\pi}{n}[A_m,\ G_l] \\
&= -\frac{\mathrm{i}}{2n^2}\sum_{m,l=1}^{2n}\sin\frac{mr\pi}{n}\sin\frac{lr\pi}{n}(A_{l-m}-A_{l+m})
\end{aligned}
$$

ここで，括弧内の第 1 項で $l-m=k$，第 2 項では $l+m=k$ とおいて別々の総和にすると，

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{\mathrm{i}}{2n^2}\sum_{m=1}^{2n}\left[\sum_{k=1-m}^{2n-m}\sin\frac{mr\pi}{n}\sin\frac{(k+m)r\pi}{n}A_k - \sum_{k=1+m}^{2n+m}\sin\frac{mr\pi}{n}\sin\frac{(k-m)r\pi}{n}A_k\right] \\
&= -\frac{\mathrm{i}}{2n^2}\sum_{m=1}^{2n}\left[\sum_{k=1}^{2n}\sin\frac{mr\pi}{n}\sin\frac{(k+m)r\pi}{n}A_k - \sum_{k=1}^{2n}\sin\frac{mr\pi}{n}\sin\frac{(k-m)r\pi}{n}A_k\right] \\
&= -\frac{\mathrm{i}}{4n^2}\sum_{k=1}^{2n}\sum_{m=1}^{2n}\left[-\cos\frac{(2m+k)r\pi}{n} + \cos\frac{kr\pi}{n} + \cos\frac{kr\pi}{n} - \cos\frac{(2m-k)r\pi}{n}\right]A_k
\end{aligned}
$$

ここで右辺第 1 項と第 4 項は m の総和で 0 になる．第 2 項と第 3 項は等しく，m の総和で因数 $2n$ が掛けられるので，式 (O-63a-1) を適用すると，

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{\mathrm{i}}{n}\sum_{k=1}^{2n}\cos\frac{kr\pi}{n}A_k \\
&= -2\mathrm{i}X_r
\end{aligned}
\tag{24}
$$

となる．すなわち，

$$
[Y_r,\ Z_r] = -2\mathrm{i}X_r \tag{O-65b-2}
$$

が成り立つ．

●交換子 $[Z_r,\ X_r]$ ($r=1,\dots,n-1$ の場合)

$r=n$ または $r=2n$ の場合は $Z_r=0$ であるから，$[Z_r,\ X_r]=0$ である．それ以外の場合，式 (O-63a-3) と式 (O-63a-1)，および式 (O-61) を用いて，

$$
\begin{aligned}
[Z_r,\ X_r] &= \frac{\mathrm{i}}{(2n)^2}\sum_{m,l=1}^{2n}\sin\frac{mr\pi}{n}\cos\frac{lr\pi}{n}[G_m,\ A_l] \\
&= \frac{\mathrm{i}}{2n^2}\sum_{m,l=1}^{2n}\sin\frac{mr\pi}{n}\cos\frac{lr\pi}{n}(A_{l+m}-A_{l-m})
\end{aligned}
$$

ここで，括弧内の第 1 項で $l+m=k$，第 2 項で $l-m=k$ とおいて別々の総和にすると，

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\mathrm{i}}{(2n)^2}\sum_{m=1}^{2n}\left[\sum_{k=1+m}^{2n+m}\sin\frac{mr\pi}{n}\cos\frac{(k-m)r\pi}{n}A_k - \sum_{k=1-m}^{2n-m}\sin\frac{mr\pi}{n}\cos\frac{(k+m)r\pi}{n}A_k\right] \\
&= \frac{\mathrm{i}}{(2n)^2}\sum_{m=1}^{2n}\left[\sum_{k=1}^{2n}\sin\frac{mr\pi}{n}\cos\frac{(k-m)r\pi}{n}A_k - \sum_{k=1}^{2n}\sin\frac{mr\pi}{n}\cos\frac{(k+m)r\pi}{n}A_k\right] \\
&= \frac{\mathrm{i}}{4n^2}\sum_{k=1}^{2n}\sum_{m=1}^{2n}\left[\sin\frac{kr\pi}{n} + \sin\frac{(2m-k)r\pi}{n} - \sin\frac{(2m+k)r\pi}{n} + \sin\frac{kr\pi}{n}\right]A_k
\end{aligned}
$$

ここで右辺第 2 項と第 3 項は m の総和で 0 になる．第 1 項と第 4 項は等しく，m の総和で因数 $2n$ が掛けられるので，式 (O-63a-2) を適用すると，

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\mathrm{i}}{n}\sum_{k=1}^{2n}\sin\frac{kr\pi}{n}A_k \\
&= -2\mathrm{i}Y_r
\end{aligned}
\tag{25}
$$

となる．すなわち，

$$
[Z_r,\ X_r] = -2\mathrm{i}Y_r \tag{O-65b-3}
$$

が成り立つ．

＊　＊　＊　＊　＊

反交換関係

いままでの結果から，$r \neq s$ のとき X_r, Y_r, Z_r と X_s, Y_s, Z_s の間は可換であるが，X_r, Y_r, Z_r の間では非可換であることがわかった．ところが，非可換であるだけでなく，反交換関係 (anticommute) をもつこともわかる．これを示すのは長い．

まず，式 (O-62) から，

$$
\begin{aligned}
X_r + \mathrm{i}Y_r &= \frac{1}{4n}\sum_{a,b=1}^{2n}(\cos\frac{(a-b)r\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{(a-b)r\pi}{n})P_{ab} \\
&= \frac{1}{4n}\sum_{a,b=1}^{2n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(a-b)r\pi/n}P_{ab} \\
&= \frac{1}{4n}\sum_{a,c=1}^{2n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(a-c)r\pi/n}P_{ac} \qquad (26)
\end{aligned}
$$

とすることができる．これから，

$$
(X_r + \mathrm{i}Y_r)^2 = \frac{1}{(4n)^2}\sum_{a,b,c,d=1}^{2n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(a+b-c-d)r\pi/n}P_{ac}P_{bd} \qquad (27)
$$

となる．

a，b，c，d は独立に 1 から $2n$ まで独立に変化することができるので，式 (27) で，a を b に，b を a に書き換えても式の値は変わらない．すなわち，a を b 交換しても変わらない．同様に，c を d 交換しても変わらない．a を b，c を d を同時に交換しても変わらない．つまり，式 (27) を 4 通りに書き表すことができる．これらを加えて 4 で割ればもとの式に等しい．すなわち，

$$
= \frac{1}{(8n)^2}\sum_{a,b,c,d=1}^{2n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(a+b-c-d)r\pi/n}(P_{ac}P_{bd} + P_{ad}P_{bc} + P_{bc}P_{ad} + P_{bd}P_{ac})
$$

となる．

ここで,「その 5」[2] の式 (34) と式 (35) あるいは式 (O-52) の添字の交換の公式を用いると，$P_{ad}P_{bc} = -(-1)^{D(c-d)}P_{ac}P_{bd}$，$P_{bc}P_{ad} = -(-1)^{D(a-b)}P_{ac}P_{bd}$，$P_{bd}P_{ac} = (-1)^{D(a-b)+D(c-d)}P_{ac}P_{bd}$ であるから，これを代入すると，

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{(8n)^2}\sum_{a,b,c,d=1}^{2n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(a+b-c-d)r\pi/n}(1-(-1)^{D(c-d)}-(-1)^{D(a-b)}+(-1)^{D(a-b)+D(c-d)})P_{ac}P_{bd} \\
&= \frac{1}{(8n)^2}\sum_{a,b,c,d=1}^{2n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(a+b-c-d)r\pi/n}(1-(-1)^{D(c-d)})(1-(-1)^{D(a-b)})P_{ac}P_{bd} \qquad (28)
\end{aligned}
$$

となることがわかる．これが 0 にならないのは，$D(a-b)=1$ かつ $D(c-d)=1$ のとき，すなわち，$a \equiv b$ かつ $c \equiv d$ のときである．この場合は $a=b, c=d$，$a=b+n, c=d$，$a=b, c=d+n$，$a=b+n, c=d+n$ の 4 通りの場合がある．($a=b-n$ などは $a=b+n$ などと同じなので考えなくても良い．) それぞれの場合，

$a = b, c = d$ のとき

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(a+b-c-d)r\pi/n} P_{ac} P_{bd} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(2a-2c)r\pi/n} P_{ac}^2$$
$$= \mathrm{e}^{2\mathrm{i}(a-c)r\pi/n}$$

$a = b, c = d$ のとき

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(a+b-c-d)r\pi/n} P_{ac} P_{bd} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(2a-2c-n)r\pi/n} P_{ac} P_{a-n,c} = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}(a-c)r\pi/n} (-1)^r P_{ac}^2 (-C)$$
$$= -\mathrm{e}^{2(a-c)r\pi/n} (-1)^r C$$

$a = b, c = d$ のとき

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(a+b-c-d)r\pi/n} P_{ac} P_{bd} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(2a-2c-n)r\pi/n} P_{ac} P_{a,c-n} = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}(a-c)r\pi/n} (-1)^r P_{ac}^2 (-C)$$
$$= -\mathrm{e}^{2\mathrm{i}(a-c)r\pi/n} (-1)^r C$$

$a = b, c = d$ のとき

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(a+b-c-d)r\pi/n} P_{ac} P_{bd} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(2a-2c-2n)r\pi/n} P_{ac} P_{a-n,c-n} = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}(a-c)r\pi/n} (-1)^r P_{ac}^2 (-C)^2$$
$$= \mathrm{e}^{2\mathrm{i}(a-c)r\pi/n}$$

以上を全部加え合わせると，

$$(X_r + \mathrm{i}Y_r)^2 = \frac{1}{(8n)^2} \sum_{a,c=1}^{2n} 8\mathrm{e}^{2\mathrm{i}(a-c)r\pi/n} (1 - (-1)^r C) \tag{29}$$

となる．

この式で，$r = 0$ または $r = n$ 以外のとき，a または c で総和をとると 0 になる．まず，$r = 0$ の場合，式 (36) に $r = 0$ を代入すると，式 (O-62a) より，$Y_0 = 0$ であるから

$$X_0^2 = \frac{1}{2}(1 - C) = R_0 \tag{O-66-1}$$

である．$0 < r < n$ の R_r は後で定義される．

次に $r = n$ のとき，式 (29) に $r = n$ を代入すると，式 (O-62a) より，$Y_n = 0$ であるから

$$X_n^2 = \frac{1}{2}(1 - (-1)^r C) = R_n = \begin{cases} R_0; & n\text{ が偶数のとき} \\ 1 - R_0; & n\text{ が奇数のとき} \end{cases} \tag{O-66-2}$$

である．

次に，$r \neq 0$ かつ $r \neq n$ のとき，式 (29) の右辺は 0 である．したがって，式 (29) の複素共役も 0 である．これより，

$$(X_r \pm \mathrm{i}Y_r)^2 = (X_r^2 - Y_r^2) \pm \mathrm{i}(X_r Y_r + Y_r X_r) = 0 \tag{O-67}$$

である．したがって，実部より，

$$X_r^2 = Y_r^2 = R_r \tag{O-67b}$$

となる．この式は同時に R_r の定義式でもある．虚部より，$X_r Y_r + Y_r X_r = 0$ となり，これと式 (O-65b-3) より，

$$X_r Y_r = -Y_r X_r = -\mathrm{i}Z_r \tag{30}$$

という関係式が得られる．また，

$$Y_r(X_r Y_r) = (Y_r X_r) Y_r = -(X_r Y_r) Y_r \quad \text{より} \quad Y_r(-\mathrm{i}Z_r) = -(-\mathrm{i}Z_r) Y_r \tag{31}$$

となるので，これと式 (O-65b-1) より，

$$Y_rZ_r = -Z_rY_r = -\mathrm{i}X_r \tag{32}$$

という関係式が得られる．同様に，

$$Z_r(Y_rZ_r) = (Z_rY_r)Z_r = -(Y_rZ_r)Z_r \quad \text{より} \quad Z_r(-\mathrm{i}X_r) == -(-\mathrm{i}X_r)Z_r \tag{33}$$

となるので，これと式 (O-65b-1) より，

$$Z_rX_r = -X_rZ_r = -\mathrm{i}Y_r \tag{34}$$

という関係式が得られる．

＊ ＊ ＊ ＊ ＊

つぎに，式 (30) に右から $\mathrm{i}Z_r$ を掛け，式 (32) を代入すると，

$$Z_r^2 = \mathrm{i}X_rY_rZ_r = X_r^2 = Y_r^2 = R_r \tag{35}$$

という関係式が得られる．

＊ ＊ ＊ ＊ ＊

四元数基底 (X_r, Y_r, Z_r, R_r)

式 (30)–(35) が得られて，ようやく四元数基底演算子が構成できたことになる．R_r はこの後，射影演算子 (projector) として説明されるが，単位元としての性質をもつ．まず，R_r の働きから見ていこう．

単位演算子としては，次のようにして確かめることができる．

$$R_rX_r = Z_rZ_rX_r = Z_r(-\mathrm{i}Y_r) = (-\mathrm{i})(\mathrm{i}X_r) = X_r \tag{36}$$

$$R_rY_r = X_rX_rY_r = X_r(-\mathrm{i}Z_r) = (-\mathrm{i})(\mathrm{i}Y_r) = Y_r \tag{37}$$

$$R_rZ_r = Y_rY_rZ_r = Y_r(-\mathrm{i}X_r) = (-\mathrm{i})(\mathrm{i}Z_r) = Z_r \tag{38}$$

一方，R_r に関しては，

$$R_r^2 = X_r^2Y_r^2 = X_r(-\mathrm{i}Z_r)Y_r = -\mathrm{i}X_r(\mathrm{i}X_r) = X_r^2 = R_r \tag{39}$$

となり，やはり単位演算子としての働きをもつ．

R_r に関する演算関係をまとめると，

$$\begin{aligned}
&R_r = R_r^2 = X_r^2 = Y_r^2 = Z_r^2 \\
&X_r = R_rX_r = X_r^2X_r = X_rR_r = (X_rZ_r)Z_r = \mathrm{i}Y_rZ_r = -\mathrm{i}Z_rY_r \\
&Y_r = R_rY_r = Y_r^2Y_r = Y_rR_r = (Y_rX_r)X_r = \mathrm{i}Z_rX_r = -\mathrm{i}X_rZ_r \\
&Z_r = R_rZ_r = Z_r^2Z_r = Z_rR_r = (Z_rY_r)Y_r = \mathrm{i}X_rY_r = -\mathrm{i}Y_rX_r
\end{aligned} \tag{O-68}$$

となる．

＊ ＊ ＊ ＊ ＊

射影演算子 R_r と次元

R_r, X_r, Y_r, Z_r は四元数代数の基底演算子になる．$R_r, X_r, Y_r, \mathrm{i}Z_r$ とすれば，実数の四元数代数の基底演算子になる．実際，式 (O-68) で置き換えれば虚数単位が消えて，実数の関係式になる．

$r=0$ と $r=n$ の場合は $Y_0=Y_n=Z_0=Z_n=0$ であるから，(R_0, X_0) または (R_n, X_n) だけのいわば縮退した基底による可換代数になる．

R_r の次元を計算する前に，論文 122 頁で述べられている次元の考え方をもう一度見ておこう．演算子が作用する関数 ψ は，適切な形に選択されれば群を構成する演算子の系の既約表現を与える．この関数の変数は $\mu_j \quad (j=1,\ldots,n)$ でそれぞれ 2 つの値を持つから，2^n 次元のベクトル変数空間を作る．これに作用する演算子は s_j，C_j であるが，それぞれ 2 次元の行列で表現されて，μ_j に作用する．これが $j=1,\ldots,n$ の演算子の直積から構成されれば，最大 2^n 次元の演算子を構成することになる．

既約表現は，基底関数を用いて得る方法もある．いまの場合は $\mu_j \quad (j=1,\ldots,n)$ からなる関数であるが，この関数は 2^n 次元のベクトル変数空間で値をもつ．この関数に演算子が作用することになる．このような演算子が作用する関数には，偶関数 (even function, even eigenvector) と奇関数 (odd function, odd eigenvector) がある．この論文での定義では，$C=C_1\cdots C_n$ が作用して不変，すなわち $C=1$ なら偶関数であり，C が作用して符号を変える場合，すなわち $C=-1$ なら奇関数である．つまり，どちらかの一方の種類の関数に作用することに限れば，常に $C=1$ または $C=-1$ と一定になる．これから $C_n=C_1,\ldots,C_{n-1}$ または $C_n=-C_1,\ldots,C_{n-1}$ と表されることになり，演算子は 1 個減る．つまり，演算子が作用する空間は 2 次元減って 2^{n-1} 次元になる．結果的に，$s_j \quad (j=1,\ldots,n)$，$C_j \quad (j=1,\ldots,n-1)$ から構成される演算子の次元は 2^{n-1} 次元になる．

このとき，s_n 演算子の存在はどうなるのかという疑問が出てくる．しかし，C_n が消えた段階で s_n は全ての演算子と可換になる．ということは，s_n は単なる 1 つの定数係数とみなしても構わないことになる．つまり，演算子の次元として考えなくても構わないということになる．実際，Onsager は偶関数または奇関数をベクトル関数の基底に選んだときに，C は 1 か -1 のどちらかに決まり，C_n が置き換えられるが，その時の $n-1$ 対の生成演算子を Onsager は次のように示している．すなわち，

$$s_1 s_n, s_2 s_n, \cdots, s_{n-1} s_n; \quad C_1, C_2, \cdots, C_{n-1} \tag{40}$$

としている．ここにある s_n は演算子ということではなく，定数係数とみなすことを意味している

Onsager は 129 頁右コラム第 1 段落で，$R_0, R_1, \cdots, R_{n-1}, R_n$ を s_j や C_j，あるいはその積や和，つまり代数における射影演算子 projections と述べている．射影演算子とは通常，部分空間への射影を意味する [3]．一般に射影演算子を P とすると，$P^2=P$ であり，R_r の $R_r^2 X_r = R_r(R_r X_r) = R_r X_r$ という関係から $R_r^2 = R_r$ という関係が成り立つことからもわかるように，射影演算子と同じ性質を有することから，R_r を射影演算子 projector と呼んでいる．

* * * * *

次に，射影演算子 $R_0, R_1, \cdots, R_{n-1}, R_n$ の次元について考えてみよう．Onsager が次元とここで述べているのは，既約表現の次元である．上で述べた C_n が消去されるということは，C の符号が決定したからであり，C の 2 つの符号のそれぞれに対応する等価な 2 つの表現があることを意味する．したがって，符号が決まっていれば，既約表現は 2 つのうちの 1 つに決まるので，行列の次元は半分になる．既約表現の次元も半分ことになる．別の見方をすると，C_n が消去される場合は，演算子が 1 個減るので，直積の対応する部分の既約表現の次元は少なくとも 1 つ減る．これを μ_n に相当する部分空間で見ると，その部分空間に作用する演算子は 1_n と s_n になってしまう．この 2 個の演算子の既約表現はそれぞれ，

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{41}$$

となるから [4]，既約表現は 1 次元である．全体の既約表現はこの 1 次元の既約表現と残りの 2^{n-1} 次元の既約表現の直積になる．つまり，2 個の 2^{n-1} 次元の行列になる．C の符号を決定するということは，既約表現の面から見るとこのようになるということである．

R_0 と R_n は，式 (O-66) から，$R_0 = (1-C)/2$ を用いて表される．つまり，C で表されるということであるから，上で述べたことと同じ理由によって，R_0 と R_n の既約表現は 2^{n-1} 次元になる．

* * * * *

$R_r \ (r = 1, \dots, n-1)$ に関して，Onsager は R_r を P_{ab} で展開することによって情報が得られると述べているの．まず，

$$R_r = \frac{1}{2}(X_r^2 + Y_r^2) \tag{42}$$

とする．そこで，式 (O-62) から，

$$\begin{aligned} X_r^2 &= \frac{1}{(4n)^2} \sum_{a,b,c,d=1}^{2n} \cos\frac{(a-c)r\pi}{n} \cos\frac{(b-d)r\pi}{n} P_{ac}P_{bd} \\ Y_r^2 &= \frac{1}{(4n)^2} \sum_{a,b,c,d=1}^{2n} \sin\frac{(a-c)r\pi}{n} \sin\frac{(b-d)r\pi}{n} P_{ac}P_{bd} \end{aligned} \tag{43}$$

となるので，

$$\begin{aligned} R_r &= \frac{1}{2}(X_r^2 + Y_r^2) \\ &= \frac{1}{2(4n)^2} \sum_{a,b,c,d=1}^{2n} \left[\cos\frac{(a-c)r\pi}{n} \cos\frac{(b-d)r\pi}{n} + \sin\frac{(a-c)r\pi}{n} \sin\frac{(b-d)r\pi}{n}\right] P_{ac}P_{bd} \\ &= \frac{1}{2(4n)^2} \sum_{a,b,c,d=1}^{2n} \cos\frac{(a-c-b+d)r\pi}{n} P_{ac}P_{bd} \end{aligned} \tag{O-69}$$

という式が得られる．ここで，a，b，c，d は 1 から $2n$ まで独立に変化しうるので，この式の文字を取り換えても元の式と中身は変わらない．そこで，
a と b を交換して，

$$R_r = \frac{1}{2(4n)^2} \sum_{a,b,c,d=1}^{2n} \cos\frac{(b-a-c+d)r\pi}{n} P_{bc}P_{ad}, \tag{44}$$

c と d を交換して，

$$R_r = \frac{1}{2(4n)^2} \sum_{a,b,c,d=1}^{2n} \cos\frac{(a-b-d+c)r\pi}{n} P_{ad}P_{bc}, \tag{45}$$

a と b，c と d を交換して，

$$R_r = \frac{1}{2(4n)^2} \sum_{a,b,c,d=1}^{2n} \cos\frac{(b-a-d+c)r\pi}{n} P_{bd}P_{ac} \tag{46}$$

となる．ここで，

$$\begin{aligned} P_{bc}P_{ad} &= -(-1)^{D(a-b)} P_{ac}P_{bd} \\ P_{ad}P_{bc} &= -(-1)^{D(c-d)} P_{ac}P_{bd} \\ P_{bd}P_{ac} &= (-1)^{D(a-b)+D(c-d)} P_{ac}P_{bd} \end{aligned}$$

となるので，これを式 (43)–(45) に代入する．そうすると，
式 (O-69)+式 (46) から，

$$2R_r = \frac{1}{2(4n)^2}\sum_{a,b,c,d=1}^{2n}\cos\frac{(a-b-c+d)r\pi}{n}\left[1+(-1)^{D(a-b)+D(c-d)}\right]P_{ac}P_{bd}, \tag{47}$$

式 (44)+式 (45) から，

$$\begin{aligned}2R_r &= -\frac{1}{2(4n)^2}\sum_{a,b,c,d=1}^{2n}\cos\frac{(a-b+c-d)r\pi}{n}\left[(-1)^{D(a-b)}+(-1)^{D(c-d)}\right]P_{ac}P_{bd},\\ &= -\frac{1}{2(4n)^2}\sum_{a,b,c,d=1}^{2n}\cos\frac{(a-b+c-d)r\pi}{n}(-1)^{D(a-b)}\left[1+(-1)^{D(a-b)+D(c-d)}\right]P_{ac}P_{bd}\end{aligned} \tag{48}$$

となるから，式 (54)+式 (55) から，

$$R_r = -\frac{1}{2^7n^2}\sum_{a,b,c,d=1}^{2n}\left[\cos\frac{(a-b-c+d)r\pi}{n}+\cos\frac{(a-b+c-d)r\pi}{n}(-1)^{D(a-b)}\right]\left[1+(-1)^{D(a-b)+D(c-d)}\right]P_{ac}P_{bd} \tag{49}$$

となる．この式において，a と b，c と d の関係で，すなわち，(i) どちらか一方が合同の場合，(ii) 両方が合同の場合，(i) 両方とも合同でない場合，の 3 通りの場合がある．
まず，(i) の場合，後の中括弧の中身は 0 である．すなわち

$$R_r^{(\mathrm{i})} = 0 \tag{50}$$

次に，(ii) の場合，$\cos-\cos$ の公式を用いて

$$R_r^{(\mathrm{ii})} = -\frac{1}{2^5n^2}\sum_{a,b,c,d=1}^{2n}\sin\frac{(a-b)r\pi}{n}\sin\frac{(c-d)r\pi}{n}P_{ac}P_{bd}, \tag{51}$$

となる．この式の a，b，c，d に関する総和は，a と b，および c と d が合同の場合を除かなければいけないのであるが，その場合は式が 0 となるので，そのままにしておいても構わない．さらに，この式で，式 (O-64) より，$C=1$ のとき，r が偶数なら $R_r=0$，$C=-1$ のとき，r が奇数なら $R_r=0$ ということを数式で表すと，$[1-(-1)^rC]/2$ という因子を掛けることと同じであるから，

$$R_r^{(\mathrm{ii})} = [1-(-1)^rC]\frac{1}{2^6n^2}\sum_{a,b,c,d=1}^{2n}\sin\frac{(a-b)r\pi}{n}\sin\frac{(c-d)r\pi}{n}P_{ac}P_{bd}, \tag{52}$$

と書き表すことができる．

最後に，(iii) の場合は，$a-b=0$ と $c-d=0$，$a-b=n$ と $c-d=0$，$a-b=0$ と $c-d=n$，$a-b=n$ と $c-d=n$，の 4 通りがある．それぞれの場合，式 (49) の中括弧以降は，$[1+1][1+1]P_{ac}^2$，$[1+1][(-1)^r+(-1)^r](-CP_{ac}^2)$，$[1+1][(-1)^r+(-1)^r](-CP_{ac}^2)$，$[1+1][1+1]P_{ac}^2$ となり，$P_{ac}^2=1$ であることと，a と c による総和が $(2n)^2$ になるので，合わせて，

$$R_r^{(\mathrm{iii})} = -\frac{1}{2^2}[1-(-1)^rC] \tag{53}$$

となる．$R_r = R_r^{(\mathrm{i})}+R_r^{(\mathrm{ii})}+R_r^{(\mathrm{iii})}$ であるから，最終的に，

$$R_r = [1-(-1)^rC]\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{2^5n^2}\sum_{a,b,c,d=1}^{2n}\sin\frac{(a-b)r\pi}{n}\sin\frac{(c-d)r\pi}{n}P_{ac}P_{bd}\right] \tag{O-70}$$

という式が得られる．

Onsager はこの式から，R_r の次元を 2^{n-2} と結論しているが，果たして，その論述は適切であろうか．Onsager は式 (O-70) で，a と b，および c と d が合同の場合以外は，$P_{ac}P_{bd} \neq \pm 1$ となるので，R_r の次元は 2^{n-2} となると述べているのだが，これでは意味が通じない．$P_{ac}P_{bd} = \pm 1$ のときは，中括弧内第 2 項が 0 となるので，$R_r = [1-(-1)^r C]/4$ となり，ここから次元に関しては C を含むこと以外は何も導くことにはならない．それに a と b，および c と d が合同でない場合もこれは変わらない．ここの文章だけでは Onsager の考えは十分わからない．この式に関して，後で付け加えることが出てくれば，そのときに述べることにして，次元に関しては次のように考えればよい．

式 (O-64) から，$C=1$ なら偶数の r に対して，$X_r = 0$ が成り立つ．同様に，$C=-1$ なら奇数の r に対して，$X_r = 0$ が成り立つ．つまり，r が奇数か偶数であるかに応じて，式 (O-62) により，

$$\sum_{a,b=1}^{2n} \cos\frac{(a-b)r\pi}{n}\, P_{ab} = 0 \tag{54}$$

という関係式が成り立つ．すなわち，この関係式によって，C_{n-1} を消去することが可能になる．独立な演算子が 1 個減ることにより，C の場合で述べたのと同じ理由により既約表現の次元が半分に減ることになる．すでに，C の符号により半分に減少し，r の偶奇によってもう半分減るから，全部で次元は 4 分の 1 に減少し，R_r の次元は 2^{n-2} になるといえる．

* * * * *

最後に，$n=2$ の場合を考えよう．$n=2$ の場合は，r が偶数の場合 R_0 と R_n 以外の R_r は r が奇数の場合，つまり，$r=1$ に限定されてしまう．式 (O-63c-1) より，

$$B = -X_0 - 2X_1 - X_2 \tag{55}$$

となる．両辺に，式 (O-64) より $r=1$ のときの $(1+C)$ を掛けると，$(1+C)X_0 = (1+C)X_2 = 0$ であるから，

$$(1+C)B = -(1+C)X_0 - 2(1+C)X_1 - (1+C)X_2 = -4X_1 \tag{56}$$

となる．$C=1$ であるから固有ベクトルは偶関数である．式 (O-43a) から (「その 4」[5])，偶関数は $k=0$ の 1 か $k=2$ の $\mu_{j_1}\mu_{j_2}$ である．対応する固有値 $n-2k$ は $k=0$ の場合に 2，$k=2$ の場合に -2 となる．したがって，全ての偶ベクトル関数に対して，B^2=4 となる．これから，式 (56) と式 (O-66-1) を用いて，

$$R_1 = X_1^2 = \frac{1}{2^4}(1+C)^2 B^2 = \frac{1}{2^2}(1+C)^2 = \frac{1}{2^2}(1+C+C+C^2) = \frac{1}{2}(1+C) = 1 - R_0 \tag{57}$$

と表すことができる．すなわち，R_1 の次元は R_0 と同じく $2^{n-1} = 2$ 次元であることがわかる．

以上のことは群論からも結論できる．C の符号から C_2 が消去されるので，C_1 など μ_1 に関連する演算子が群の元になり，すでに別の entry[6] でも述べたように，このような群の既約表現は最大 2 次元であることがわかる．

参考文献

[1] 「その 6」(2017/11/7 のエントリー).

http://totoha.web.fc2.com/Onsager_paper6.pdf

[2] 「その 5」(2017/11/3 のエントリー).

http://totoha.web.fc2.com/Onsager_paper5.pdf

[3] 斎藤正彦「線形代数入門」東京大学出版会 (1966), p. 143.

[4] 「その 3」(2017/10/5 のエントリー).
http://totoha.web.fc2.com/Onsager_paper3.pdf

[5] 「その 4」(2017/10/6 のエントリー).
http://totoha.web.fc2.com/Onsager_paper4.pdf

[6] 「Onsager 論文の四元数演算子が構成する群の既約表現」(2017/5/27 のエントリー).
http://totoha.web.fc2.com/Onsager_1.pdf