Onsager の 2 次元イジングモデル厳密解の論文を読む　その 6

2017.11.7　　鈴木　実

THE BASIS OF A REDUCED REPRESENTATION

本節では，$V = V_2V_1 = \mathrm{e}^{H'A}\mathrm{e}^{H^*B}$ を対角化する，あるいは厳密には既約表現を与える基底演算子の系 X_r，Y_r，Z_r が導入される．この基底演算子の定義には P_{ab} が使われるのであるが，X_r，Y_r，Z_r が四元数代数，あるいはリー代数を構成するのに必要な交換関係を導くのに，P_{ab} よりも効率的な演算子 A_m，G_k が中間段階的に導入される．A_k と G_k の交換関係を示しておくことにより，X_r，Y_r，Z_r の交換関係を直接的に導くことが可能になる．以下では A_k と G_k に関わる交換関係を導く．また，2 次元イジングモデル問題は具体的に A と B を含むが，A と B は直接 A_m で表され，A_m は X_r と Y_r で表される．つまり，A と B は A_m を経由して X_r と Y_r で表されるという働きもある．以下で扱う A_m と G_k にはそういう意味がある．

10　SOME IMPORTANT COMMUTATORS

2 面体対称性

2 次元イジングモデルを解くために固有値を求める行列は

$$V = V_2V_1 = \mathrm{e}^{H'A}\mathrm{e}^{H^*B}$$

であった．ここで重要な演算子 A と B は次のように書き表すことができる．

$$A = \sum_{j=1}^{n} s_js_{j+1} = \sum_{a=1}^{n} P_{a,a+1} \tag{1}$$

$$B = \sum_{j=1}^{n} C_j = -\sum_{a=1}^{n} P_{aa} \tag{2}$$

この演算子は

$$\mu_j \to \mu_{k\pm j}, \quad (j = 1, 2, \cdots, n) \tag{3}$$

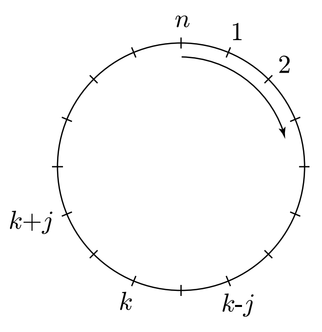

図 1: 円周で表した 2 面体対称性 (dihedral) あるいは別の表現をすると回転鏡映対称性)

という回転鏡映 (n 回回転対称および回転軸を含む平面による鏡映対称) あるいは 2 面体対称群の (dihedral) 対称変換によって不変である．回転鏡映は図 1 のように n 回回転対称と鏡映をともに満たす対称性である．つまり，この場合は k まで回転し，k から $\pm j$ に移動した点が等しいということに対応する対称性である．確かに，A と B は 1 から n までの総和になっているから，A と B がこの回転鏡映対称性を満たすことは明らかである．

この関係は，C_j と $s_j s_{j+1}$ の間の自己同型変換を表す式 (O-36)

$$s_j s_{j+1} \to C_{k\pm j} \tag{O-36}$$

において，添字の変換関係にも現れている．$s_j s_{j+1}$ と C_j を交互に配置した演算子系はこの自己同型変換によって双対関係を表した．このような重要性をもつ．したがって，この 2 面体対称性を有する A と B を表す新しい基底演算子は同じ対称性を有することが重要である．以下ではその確認を経て演算子が導入される．

演算子 A_m

以上のことを踏まえて，P_{ab} から 2 面体対称性を有する演算子の系を次のように作ることができる．P_{ab} 自身はこの対称性をもたないので，P_{ab} の線形結合を作って対称性を持たせることを考える必要がある．図 1 のような循環性を考えれば，総和を作ることによってこの要請が満たされることがわかる．実際，次のように新しい演算子を定義すればよいことがわかる．

$$A_m = \sum_{a=1}^{n} P_{a,a+m} \tag{O-56}$$

$m = 1, 2, \ldots, 2n$ であるから，明らかに，この演算子は $2n$ 個存在する．

式 (O-56) および式 (1)，(2) から，

$$\begin{aligned} A_0 &= \sum_{a=1}^{n} P_{a,a} = \sum_{a=1}^{n} (-C) = -B \\ A_1 &= \sum_{a=1}^{n} P_{a,a+1} = \sum_{a=1}^{n} s_a s_{a+1} = A \end{aligned} \tag{O-56a}$$

である．また，式 (O-46) の P_{ab} の準周期性から

$$\begin{aligned} A_{m+n} &= \sum_{a=1}^{n} P_{a,a+m+n} = \sum_{a=1}^{n} -C P_{a,a+m} = \sum_{a=1}^{n} -P_{a,a+m} C \\ &= -C A_m = -A_m C \end{aligned} \tag{O-57}$$

が成り立つ．

演算子 G_k

次に，P_{ab} の交換関係をもとにした演算子を導入する．P_{ab} の公式 6 の交換関係 (式 (O-52)) から

$$\begin{aligned} [P_{ac},\ P_{bd}] &= P_{ac} P_{bd} - P_{bd} P_{ac} \\ &= P_{ac} P_{bd} (1 - (-1)^{D(a-b)+D(c-d)}) \end{aligned} \tag{4}$$

となる．したがって，添字が両方同時に合同 (congruent) のとき，すなわち，$a \equiv b$ および $c \equiv d$ のとき，または同時に合同でないときに可換となり，それ以外，つまり，どちらか一方が合同であるときに非可換となる．

P_{ab} からなる交換子の線形結合でかつ 2 面体対称性を有する演算子を考えると，図 1 の関係から a に関する総和がそういう対称性を満たす．上の式 (4) の関係から $n-1$ の独立な演算子が可能である．Onsager はそのようなものでもっとも簡潔に構成できる演算子を次のように定義している．

$$\begin{aligned} G_m &= \frac{1}{4}\sum_{a=1}^{n}([P_{ax},\ P_{a+m,x}] - [P_{xa},\ P_{x,a+m}]) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{n}(P_{ax}P_{a+m,x} - P_{xa}P_{x,a+m}) \end{aligned} \tag{O-58}$$

第 2 式への導出は次のようにして示すことができる．

まず，$m \not\equiv n$ の場合，交換関係 (式 (O-46)) から，

$$P_{a+m,x}P_{ax} = -P_{ax}P_{a+m,x} \tag{5}$$

となる．したがって，

$$\sum_{a=1}^{n}[P_{ax},\ P_{a+m,x}] = 2P_{ax}P_{a+m,x} \tag{6}$$

となる．同様に，

$$\sum_{a=1}^{n}[P_{xa},\ P_{x,a+m}] = 2P_{xa}P_{x,a+m} \tag{7}$$

である．式 (6) と式 (7) の差を取ることにより，式 (O-58) を得ることができる．

$m = n$ のとき，式 (O-58) から，

$$\begin{aligned} G_n &= \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{n}(P_{ax}P_{a+n,x} - P_{xa}P_{x,a+n}) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{n}(-CP_{ax}P_{ax} + CP_{xa}P_{xa}) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{n}(-C + C) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{8}$$

となる．$m = 0$ のとき，式 (O-58) から，$G_0 = 0$ となるのは明白であるので，結局，

$$G_n = G_0 = 0 \tag{O-58a}$$

となる．

また，式 (O-58) より, 途中 $a' = a - m$ とおいて，公式 4 を用いると，

$$
\begin{aligned}
G_{-m} &= \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{n}(P_{ax}P_{a-m,x} - P_{xa}P_{x,a-m}) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{a'=1-m}^{n-m}(P_{a'+m,x}P_{a',x} - P_{x,a'+m}P_{x,a'}) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{a'=1}^{n-m}(P_{a'+m,x}P_{a',x} - P_{x,a'+m}P_{x,a'}) + \frac{1}{2}\sum_{a'=1-m}^{0}(P_{a'+m,x}P_{a',x} - P_{x,a'+m}P_{x,a'}) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{a'=1}^{n-m}(P_{a'+m,x}P_{a',x} - P_{x,a'+m}P_{x,a'}) + \frac{1}{2}\sum_{a'=2n+1-m}^{2n}(P_{a'+m,x}P_{a',x} - P_{x,a'+m}P_{x,a'}) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{a'=1}^{n-m}(P_{a'+m,x}P_{a',x} - P_{x,a'+m}P_{x,a'}) + \frac{1}{2}\sum_{a'=n+1-m}^{n}(P_{a'+m+n,x}P_{a'+n,x} - P_{x,a'+m+n}P_{x,a'+n}) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{a'=1}^{n-m}(P_{a'+m,x}P_{a',x} - P_{x,a'+m}P_{x,a'}) + \frac{1}{2}\sum_{a'=n+1-m}^{n}(P_{a'+m,x}(-C)(-C)P_{a',x} - P_{x,a'+m}(-C)(-C)P_{x,a'}) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{a'=1}^{n-m}(P_{a'+m,x}P_{a',x} - P_{x,a'+m}P_{x,a'}) + \frac{1}{2}\sum_{a'=n+1-m}^{n}(P_{a'+m,x}P_{a',x} - P_{x,a'+m}P_{x,a'}) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{a'=1}^{n}(P_{a'+m,x}P_{a',x} - P_{x,a'+m}P_{x,a'}) \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{a'=1}^{n}(P_{a',x}P_{a'+m,x} - P_{x,a'}P_{x,a'+m}) \\
&= -G_m \qquad \text{(O-58a)}
\end{aligned}
$$

となる．最後の式では，公式 5 の交換関係を用いている．すなわち，$m \neq n$ のとき，括弧内第 1 項の $P_{a',x}$ と $P_{a'+m,x}$ は後方の添字のみが合同 (この場合は一致) であるから，交換して符号が変わる．もう一項も同様である．$m = n$ のときは，括弧内の両項は一致して 0 となるからこの式が成り立つ．

G_m の周期は m に関して $2n$ である．一方，$m = 1, 2, \ldots, 2n$ であるが，独立な G_m の個数は式 (O-58a) の $G_{-m} = -G_m$ から半分になり，のこりの式から $n-1$ 個になる．

また，式 (O-58a) から公式を用いると，

$$
\begin{aligned}
G_{m+n} &= \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{n}(P_{ax}P_{a+m+n,x} - P_{xa}P_{x,a+m+n}) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{n}(P_{ax}P_{a+m,x}(-C) - P_{xa}P_{x,a+m}(-C)) \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{a=1}^{n}(P_{ax}P_{a+m,x} - P_{xa}P_{x,a+m})C \\
&= -G_mC \qquad \text{(O-59)} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{n}(P_{ax}(-C)P_{a+m,x} - P_{xa}(-C)P_{x,a+m}) \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{a=1}^{n}((-C)P_{ax}P_{a+m,x} - (-C)P_{xa}P_{x,a+m}) \\
&= -CG_m \qquad \text{(O-59)}
\end{aligned}
$$

という関係が成り立つ．この式の変形では，P_{ax} には s_a と s_x が含まれ，それ以外には演算子 s_j が含まれず，

C には C_a と C_x がただ 1 回ずつ含まれているので，P_{ax} と C は可換である，ということを用いている．

＊　＊　＊　＊　＊

A_m，G_m の交換子

$\mathrm{e}^{H'A}\mathrm{e}^{H^*B}$ の対角化に必要な演算子基底は，実はこの後の節で提示される X_r，Y_r，Z_r である．これと，A，B を関係付けるためと，X_r，Y_r，Z_r の交換関係を効率よく導くために，その中間段階として，A_m，G_m およびその交換関係が必要になる．ここでは，以下の交換子 $[A_m,\ A_k]$，$[G_m,\ A_k]$，$[G_m,\ G_k]$ を導く．

＊　＊　＊　＊　＊

まず，

$$[A_m,\ A_m] = 0 \tag{9}$$

は自明である．次に，公式 4 を用いると，

$$\begin{aligned}
[A_m,\ A_{m+n}] &= \sum_{a,b=1}^{n} (P_{a,a+m}P_{b,b+m+n} - P_{a,a+m+n}P_{b,b+m}) \\
&= \sum_{a,b=1}^{n} (P_{a,a+m}(-C)P_{b,b+m} - (-C)P_{a,a+m}P_{b,b+m}) \\
&= \sum_{a,b=1}^{n} ((-C)P_{a,a+m}P_{b,b+m} - (-C)P_{a,a+m}P_{b,b+m}) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{10}$$

である．これは式 (O-57) を用いれば,

$$\begin{aligned}
[A_m,\ A_{m+n}] &= (A_mA_{m+n} - A_{m+n}A_m) \\
&= (A_m(-C)A_m - (-C)A_mA_m) \\
&= ((-C)A_mA_m - (-C)A_mA_m) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{11}$$

としてもよい．

一般の場合は次のようになる．

$$\begin{aligned}
[A_k,\ A_m] &= A_kA_m - A_mA_k \\
&= \sum_{a,b=1}^{n} (P_{a,a+k}P_{b,b+m} - P_{a,a+m}P_{b,b+k}) \\
&= \sum_{a,b=1}^{n} (P_{a,a+k}P_{b,b+m} - P_{b,b+m}P_{a,a+k}) \\
&= \sum_{a,b=1}^{n} [P_{a,a+k},\ P_{b,b+m}]
\end{aligned} \tag{12}$$

ここで，$P_{a,b}$の 交換関係である公式 6 より，$a \not\equiv b$ かつ $a+k \not\equiv b+m$ のとき，または，$a \equiv b$ かつ $a+k \equiv b+m$ のとき，$P_{a,a+k}$ と $P_{b,b+m}$ は可換であり，交換子は 0 となる．そうすると，b に関する総和で残るのは，一方のみ合同の場合，すなわち，$b \equiv a$ の場合または $b+m \equiv a+k$ の場合の総和が残る．一致でない合同の場合は

$-C$ の係数がでるだけで後は同じであるから，$a=b$ の場合または $a+k=b+m$ の場合を考えればよい．すなわち，

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{a=1}^{n}([P_{a,a+k},\ P_{a,a+m}] + [P_{a,a+k},\ P_{a+k-m,a+k}]) \\
&= \sum_{a=1}^{n}([P_{x,a+k},\ P_{x,a+m}] + [P_{a,x},\ P_{a+k-m,x}]) \qquad (13)
\end{aligned}
$$

となる．ここで，公式 5 を用いて wild card を導入した．

総和内の第 1 項で $a+k=c$ とおき，公式 4 を用いると，

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{c=1+k}^{n+k}[P_{xc},\ P_{x,c-k+m}] + \sum_{a=1}^{n}[P_{ax},\ P_{a+k-m,x}] \\
&= (\sum_{c=1+k}^{n} + \sum_{c=n+1}^{n+k})[P_{xc},\ P_{x,c-k+m}] + \sum_{a=1}^{n}[P_{ax},\ P_{a+k-m,x}] \\
&= \sum_{c=1+k}^{n}[P_{xc},\ P_{x,c-k+m}] + \sum_{c=1}^{k}[P_{x,c+n},\ P_{x,c-k+m+n}] + \sum_{a=1}^{n}[P_{ax},\ P_{a+k-m,x}] \\
&= \sum_{c=1+k}^{n}[P_{xc},\ P_{x,c-k+m}] + \sum_{c=1}^{k}[P_{xc}(-C),\ P_{x,c-k+m}(-C)] + \sum_{a=1}^{n}[P_{ax},\ P_{a+k-m,x}] \\
&= \sum_{c=1+k}^{n}[P_{xc},\ P_{x,c-k+m}] + \sum_{c=1}^{k}[P_{xc},\ P_{x,c-k+m}] + \sum_{a=1}^{n}[P_{ax},\ P_{a+k-m,x}] \\
&= \sum_{c=1}^{n}[P_{xc},\ P_{x,c-k+m}] + \sum_{a=1}^{n}[P_{ax},\ P_{a+k-m,x}] \\
&= 4G_{k-m} \qquad (14)
\end{aligned}
$$

となる．すなわち，

$$
[A_k,\ A_m] = 4G_{k-m} \qquad \text{(O-60)}
$$

という関係式が成り立つ．

＊　＊　＊　＊　＊

次に，交換子 $[G_m,\ A_k]$ を考えよう．まず，式 (O-56)，(O-58) より，

$$
2G_mA_k = \sum_{a,b=1}^{n}(P_{ax}P_{a+m,x} - P_{xa}P_{x,a+m})P_{b,b+k} \qquad (15)
$$

$$
2A_kG_m = \sum_{a,b=1}^{n}P_{b,b+k}([P_{ax}P_{a+m,x} - P_{xa}P_{x,a+m}) \qquad (16)
$$

これを辺辺差し引くと，

$$
\begin{aligned}
2[G_m, A_k] &= \sum_{a,b=1}^{n}([P_{ax}P_{a+m,x}, P_{b,b+k}] - [P_{xa}P_{x,a+m}, P_{b,b+k}]) \\
&= \sum_{a,b=1}^{n}([P_{ax}P_{a+m,x}, P_{b,b+k}] - [P_{xa}P_{x,a+m}, P_{b-k,b}]) \qquad (17)
\end{aligned}
$$

となる[1]．

まず，$m=0$ の場合は，式 (17) の両辺とも 0 になる．

$m\neq 0$ の場合，まず，式 (17) 総和内の第 1 項を考えよう．この交換子は，

$$P_{ax}P_{a+m,x}P_{b,b+k}-P_{b,b+k}P_{ax}P_{a+m,x} \tag{18}$$

であるが，この第 1 項の $P_{ax}P_{a+m,x}$ と $P_{b,b+k}$ が可換であれば，第 2 項と一致して相殺する．非可換であるのは，公式 6 から，2 つの添字うち，どちらか一方が合同の場合である．いまの場合，$P_{ax}P_{a+m,x}$ の後の添字 x は wild card であるから公式 5 により $P_{b,b+k}$ の $b+k$ と合同でないように選ぶことができる．そうすると，$m=0$ 以外に同時に合同になることはないから，非可換であるためには，$a\equiv b$ または $a+m\equiv b$ でなければならない．このとき，$P_{ax}P_{a+m,x}$ のうち一方は可換，他方は非可換になるので，全体として非可換になる．結局，式 (18) の第 2 項の 2 倍が残る．

式 (17) の第 2 項についても第 1 項と同様に考えればよい．前の添字に関しては wild card の定理 5 を使って x と $b-k$ は合同でないようにすることができる．後の添字に関しては，a または $a+m$ のどちらか一方のみが b と合同であればよい．実際，$m=0$ 以外には両方合同になることはない．つまり，可換でないためは，$a\equiv b$ または $a+m\equiv b$ でなければならない．

$1\leq b\leq n$ であるから，合同は一致の場合のみを考えれば良い．結局，b に関する総和では，$b=a$ と $b=a+m$ のみで，4 個の交換子が残ることになる．

$$\begin{aligned}
2[G_m,A_k] &= \sum_{a=1}^{n}([P_{ax}P_{a+m,x},P_{a,a+k}]-[P_{xa}P_{x,a+m},P_{a-k,a}]+[P_{ax}P_{a+m,x},P_{a+m,a+m+k}]\\
&\quad -[P_{xa}P_{x,a+m},P_{a+m-k,a+m}])\\
&= 2\sum_{a=1}^{n}(-P_{a,a+k}P_{ax}P_{a+m,x}+P_{a-k,a}P_{xa}P_{x,a+m}+P_{ax}P_{a+m,x}P_{a+m,a+m+k}\\
&\quad -P_{xa}P_{x,a+m}P_{a+m-k,a+m})
\end{aligned} \tag{19}$$

式 (19) の第 1 項から第 4 項は wild card x に公式 4 を用いてそれぞれ次のように変形できる．

$$\begin{aligned}
-P_{a,a+k}P_{ax}P_{a+m,x} &= -P_{a,a+k}P_{a,a+k}P_{a+m,a+k} = -P_{a+m,a+k}\\
P_{a-k,a}P_{xa}P_{x,a+m} &= P_{a-k,a}P_{a-k,a}P_{a-k,a+m} = P_{a-k,a+m}\\
P_{ax}P_{a+m,x}P_{a+m,a+m+k} &= P_{a,a+m+k}P_{a+m,a+m+k}P_{a+m,a+m+k} = P_{a,a+m+k}\\
-P_{xa}P_{x,a+m}P_{a+m-k,a+m} &= -P_{a+m-k,a}P_{a+m-k,a+m}P_{a+m-k,a+m} = -P_{a+m-k,a}
\end{aligned} \tag{20}$$

したがって，

$$[G_m,A_k]=\sum_{a=1}^{n}(-P_{a+m,a+k}+P_{a-k,a+m}+P_{a,a+m+k}-P_{a+m-k,a}) \tag{21}$$

となる．上式の総和内第 1 項は脚注 1 と同様にして次のように変形できる．

$$\sum_{a=1}^{n}P_{a+m,a+k}=\sum_{a=1+m}^{n+m}P_{a,a+k-m}=\sum_{a=1}^{n}P_{a,a+k-m} \tag{22}$$

[1] この式の第 2 項の b に関する総和で，

$$\begin{aligned}
\sum_{b=1}^{n}P_{b,b+k} &= \sum_{b=1+k}^{n+k}P_{b-k,b}=\sum_{b=1+k}^{n}P_{b-k,b}+\sum_{b=n+1}^{n+k}P_{b-k,b}=\sum_{b=1+k}^{n}P_{b-k,b}+\sum_{b=1}^{k}P_{b-k+n,b+n}\\
&= \sum_{b=1+k}^{n}P_{b-k,b}+\sum_{b=1}^{k}P_{b-k,b}(-C)^2=\sum_{b=1}^{n}P_{b-k,b}
\end{aligned}$$

という関係を使った．

同様に，総和内第 2 項は以下のように変形できる．

$$\sum_{a=1}^{n} P_{a-k,a+m} = \sum_{a=1-k}^{n-k} P_{a,a+m+k} = \sum_{a=1}^{n} P_{a,a+m+k} \tag{23}$$

総和内第 4 項は以下のように変形できる．

$$\sum_{a=1}^{n} P_{a+m-k,a} = \sum_{a=1+m-k}^{n+m-k} P_{a,a+k-m} = \sum_{a=1}^{n} P_{a,a+k-m} \tag{24}$$

これを代入すると，

$$\begin{aligned}[G_m, A_k] &= 2\sum_{a=1}^{n}(P_{a,a+m+k} - P_{a,a+k-m}) \\ &= 2A_{k+m} - 2A_{k-m} \end{aligned} \tag{O-61}$$

となる．

＊ ＊ ＊ ＊ ＊

最後に，交換子 $[G_m,\ G_k]$ を求めてみよう．

まず，一般に次のことが成り立つ．

$$\begin{aligned}[G_m, [A_k, A_0]] &= G_m(A_kA_0 - A_0A_k) - (A_kA_0 - A_0A_k)G_m \\ &= [G_m, A_k]A_0 + A_kG_mA_0 - [G_m, A_0]A_k - A_0G_mA_k \\ &- A_k[A_0, G_m] - A_kG_mA_0 + A_0[A_k, G_m] + A_0G_mA_k \\ &= [[G_m, A_k], A_0] - [[G_m, A_0], A_k] \\ &= [[G_m, A_k], A_0] + [A_k, [G_m, A_0]] \end{aligned} \tag{25}$$

次に，式 (O-60) および式 (O-61) より，

$$[A_k, A_0] = 4G_k \tag{26}$$

$$[G_m, A_k] = 2A_{k+m} - 2A_{k-m} \tag{27}$$

$$[G_m, A_0] = 2A_m - 2A_{-m} \tag{28}$$

となる．これを式 (25) に代入することにより，

$$\begin{aligned}4[G_m, G_k] &= [2A_{k+m} - 2A_{k-m}, A_0] + [A_k, 2A_m - 2A_{-m}] \\ &= 2[A_{k+m}, A_0] - 2[A_{k-m}, A_0] + 2[A_k, A_m] - 2[A_k, A_{-m}] \\ &= 8G_{k+m} - 8G_{k-m} + 8G_{k-m} - 8G_{k+m} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{29}$$

となり，これより

$$[G_m, G_k] = 0 \tag{O-61a}$$

という関係式が得られる．つまり，G_m 同士は可換である．

以上で必要な交換子の関係式は得られた．