Onsager の 2 次元イジングモデル厳密解の論文を読む　その 5

2017.11.3　　鈴木　実

9　SOME IMPORTANT ELEMENTS OF THE BASIS

Onsager 論文の goal は $V = V_2V_1$ の固有値を求めることである．そのため，対角化する固有ベクトルを求めたい．それには適当な演算子の基底を考えればよい．Onsager はこれを二段階で達成している．最初の段階がこの節で述べられている P_{ab} の設定である．この第一段階を Onsager は preliminary （準備）と述べている．

9.1　定義と公式

P_{ab} の定義

最初に Onsager は演算子 C_j と s_j から次のようなより一般的な演算子の系 P_{ab} を提示している．

$$P_{ab} = s_aC_{a+1}C_{a+2}\cdots C_{b-1}s_b; \quad (a, b = 1, 2, \cdots, 2n). \tag{O-45}$$

Onsager の定義では，C_j の列は昇順でも降順でも構わないが，本稿では混乱を避けるために，昇順に限ることにしよう．したがって，P_{ab} の添字の大小関係により，定義が異なってくる．実際，Onsager の論文ではその区別がなされていないので，たとえば，$P_{aa} = -Ca$ という関係式の必然性がわからない．本稿では以下のように定義することにより，そうした矛盾や紛れをなくすることができる．

定義 1

$a < b \quad (a, b = 1, 2, \cdots, 2n)$ のとき，

$$P_{ab} = s_a(C_{a+1}\cdots C_{b-1})s_b. \tag{1}$$

定義 2

$b < a \quad (a, b = 1, 2, \cdots, 2n)$ のとき，

$$P_{ab} = s_a(C_{a+1}\cdots C_{2n}C_1\cdots C_{b-1})s_b \tag{2}$$

また，定義 2 は $C_1\cdots C_{2n} = 1$ を用いて次のように表すことができる．

$$\begin{aligned} P_{ab} &= s_a(C_{a+1}\cdots C_{2n}C_1\cdots C_{b-1})s_b \\ &= s_a(C_1\cdots C_{b-1}C_{a+1}\cdots C_{2n})(C_1\cdots C_{2n})s_b \\ &= s_a(C_b\cdots C_a)s_b \\ &= s_b(C_b\cdots C_a)s_a \end{aligned} \tag{3}$$

最後の式への移行には，s_b と s_a を反対側の端に移動しても，符号が変わらないことを用いている．つまり，$(C_b\cdots C_a)$ に，もし，C_{b+n} が入れば $b+n < a$ であり，すなわち，$a-n > b$ となるから C_{a-n} も入るから，両

方移動することにより 2 回符号変換が起こるから符号は変わらない．逆に C_{b+n} が入らなければ，C_{a-n} も入らないから符号は変わらない．もちろん，$b < a$ のもとで，次のような関係も成り立つ．

$$\begin{aligned}
P_{ba} &= s_b(C_{b+1}\cdots C_{a-1})s_a \\
&= s_b(C_{b+1}\cdots C_{a-1})(C_1\cdots C_{2n})s_a \\
&= s_b(C_a\cdots C_{2n}C_1\cdots C_b)s_a \\
&= s_b(C_a\cdots C_b)s_a \\
&= s_a(C_a\cdots C_b)s_b
\end{aligned} \tag{4}$$

定義 1 から，$P_{a,a+1}$ は s_a と s_{a+1} の間に C_{a+1} 以上で C_a 以下の C_j を含まなければならないが，該当する C_j は存在しないから，必然的に，

$$P_{a,a+1} = s_a s_{a+1}. \tag{5}$$

となる．

一方，$P_{a,a}$ には定義 2 から，

$$\begin{aligned}
P_{aa} &= s_a(C_{a+1}\cdots C_{2n}C_1\cdots C_{a-1})s_a \\
&= s_a(C_{a+1}\cdots C_{2n}C_1\cdots C_{a-1})(C_1\cdots C_{2n})s_a \\
&= s_aC_as_a \\
&= -C_as_a^2 \\
&= -C_a
\end{aligned} \tag{6}$$

となる．これも必然的で紛れがない．Onsager の論文では説明がないが，定義 2 を置くことによってこの関係式が明快になる．

＊　＊　＊　＊　＊

公式 1

$$P_{ab} = P_{bb}P_{ba}P_{aa} \tag{7}$$

これは定義 1 および定義 2 から導かれ，a と b の大小関係にかかわらず成り立つ．定義 1 から，

$$\begin{aligned}
P_{ab} &= s_a(C_{a+1}\cdots C_{b-1})s_b \\
&= s_a(C_{a+1}\cdots C_{b-1})(C_1\cdots C_{2n})s_b \\
&= s_a(C_b\cdots C_{2n}C_1\cdots C_a)s_b \\
&= s_b(C_b\cdots C_a)s_a \\
&= (-C_b)s_b(C_{b+1}\cdots C_{a-1})s_a(-C_a) \\
&= P_{bb}P_{ba}P_{aa}
\end{aligned} \tag{8}$$

となる．定義 2 の第 4 式，およびこの式の第 4 式も直接この公式を別の形で表している．

＊　＊　＊　＊　＊

P_{ab} は演算子の偶基底である，という命題は，$C = C_1\cdots C_n$ と P_{ab} と可換である，という命題と同値である．C_j と非可換な演算子は s_j であるから，C と P_{ab} が可換であるということは P_{ab} が s_j を偶数個含むということである．実際，P_{ab} は定義からそうなっている．

＊　＊　＊　＊　＊

公式 2

$$P_{ac} = P_{ab}P_{bb}P_{bc} \tag{9}$$

この公式は一種の連結則である．この式が成り立つのは次のようにしてわかる．

$$\begin{aligned} P_{ac} &= s_a(C_{a+1}\cdots C_{c-1})s_c \\ &= s_a(C_{a+1}\cdots C_{b-1})C_b(C_{b+1}\cdots C_{c-1})s_c \\ &= s_a(C_{a+1}\cdots C_{b-1})C_b s_b^2(C_{b+1}\cdots C_{c-1})s_c \\ &= s_a(C_{a+1}\cdots C_{b-1})s_b(-C_b)s_b(C_{b+1}\cdots C_{c-1})s_c \\ &= P_{ab}P_{bb}P_{bc} \end{aligned} \tag{10}$$

もし，C_b が $(C_{a+1}\cdots C_{c-1})$ の外にあれば，第 2 式で，

$$\begin{aligned} &= s_a(C_{a+1}\cdots C_{c-1})(C_c\cdots C_b)^2 s_c \\ &= s_a(C_{a+1}\cdots C_{b-1})C_b(C_c\cdots C_b)s_c \\ &= s_a(C_{a+1}\cdots C_{b-1})s_b(-C_b)s_b(C_c\cdots C_b)s_c \\ &= s_a(C_{a+1}\cdots C_{b-1})s_b(-C_b)s_c(C_c\cdots C_b)s_b \\ &= P_{ab}P_{bb}P_{bc} \end{aligned} \tag{11}$$

とすればよい．

連結則としては，中間に P_{bb} が入っているためにあまり美しくない．しかし，これを除こうとすると定義を変える必要があるが，そうすると別のところにしわ寄せがくる．

Onsager は次の式を漸化式 (recurrence formula) としてとりあげているが，この式は公式 1 の特別な例といえる．

$$\begin{aligned} P_{a,b+1} &= s_aC_a\cdots C_{b-1}C_bs_{b+1} = s_aC_a\cdots C_{b-1}s_b^2C_bs_{b+1} \\ &= P_{ab}s_bC_bs_{b+1} = P_{ab}(-C_b)s_bs_{b+1} \\ &= P_{ab}P_{bb}P_{b,b+1} \end{aligned} \tag{O-45a}$$

となる．

＊　＊　＊　＊　＊

公式 3

$$P_{ab}^2 = 1 \tag{O-47}$$

これは次のようにして導くことができる．

$$\begin{aligned} P_{ab}^2 &= s_aC_{a+1}\cdots C_{b-1}s_bs_aC_{a+1}\cdots C_{b-1}s_b \\ &= s_aC_{a+1}\cdots C_{b-1}s_bs_bC_{a+1}\cdots C_{b-1}s_a \\ &= s_aC_{a+1}\cdots C_{b-1}C_{a+1}\cdots C_{b-1}s_a \\ &= s_a^2 = 1 \end{aligned} \tag{12}$$

第 2 式を導くところでは式 (3) のところで述べた手法を用いて，$s_aC_{a+1}\cdots C_{b-1}s_b = s_bC_{a+1}\cdots C_{b-1}s_a$ とした．

周期 $(2n)$

P_{ab} の周期が $2n$ であることを見ておこう．$P_{a,b+2n} = P_{ab}P_{bb}P_{b,b+2n}$ であるから $P_{bb}P_{b,b+2n} = 1$ を示せばよい．実際，

$$\begin{aligned} P_{bb}P_{b,b+2n} &= -C_b s_b C_{b+1}\cdots C_n C_{n+1}\cdots C_{2n}C_{2n+1}\cdots C_{2n+b-1}s_{b+2n} \\ &= s_b C_b C_{b+1}\cdots C_n C_1\cdots C_n C_1\cdots C_{b-1}s_b \\ &= s_b(C_1\cdots C_n)^2 s_b = s_b^2 = 1 \end{aligned} \tag{13}$$

となり，$2n$ が周期であることがわかる．n が周期ではないことは次のようにしてわかる．

$$\begin{aligned} P_{bb}P_{b,b+n} &= -C_b s_b C_{b+1}\cdots C_n C_{n+1}\cdots C_{n+b-1}s_{b+n} \\ &= s_b C_b\cdots C_n C_1\cdots C_{b-1}s_b \\ &= s_b C s_b = -Cs_b^2 = -C \end{aligned} \tag{14}$$

したがって，$P_{bb}P_{b,b+n} \neq 1$ であるから n は周期ではない．この結果と式 (6) を用いると，

$$P_{a,b+n} = P_{a,b}P_{bb}P_{b,b+n} = -P_{ab}C \tag{O-46}$$

という関係が成り立つことがわかる．

一方，$P_{a+n,b}$ に関しては，公式 1 を用いて，

$$\begin{aligned} P_{a+n,b} &= P_{bb}P_{b,a+n}P_{a+n,a+n} \\ &= P_{bb}(-CP_{ba})P_{aa} = CP_{ba} \\ &= -C(P_{bb}P_{ba}P_{aa}) \\ &= -CP_{ab} \end{aligned} \tag{O-46}$$

が成り立つことを示すことができる．以上をまとめて次の公式が成り立つ．

* * * * *

公式 4

$$P_{a,b+n} = P_{a+n,b} = -CP_{ab} = -P_{ab}C \tag{O-46}$$

* * * * *

公式 5

$$P_{ac}P_{bc} = P_{ad}P_{bd}, \quad P_{ac}P_{ad} = P_{bc}P_{bd} \tag{O-48}$$

この公式を Onsager は wild index rule と呼んでいる．この式を証明する前に，次の関係式が成り立つことを確認しておこう．

$$\begin{aligned} P_{ac} &= s_a(C_{a+1}\cdots C_{c-1})s_c && (15) \\ &= s_c(C_{a+1}\cdots C_{c-1})s_a && (16) \\ &= s_c(C_c\cdots C_a)s_a && (17) \\ &= s_a(C_c\cdots C_a)s_c && (18) \end{aligned}$$

この式は，$0 \leq a, c \leq 2n$ の範囲において，a と c の大小関係には関わらず，s_a と s_c がそれぞれ $(C_{a+1} \cdots C_{c-1})$ の反対側に同時に符号を変えずに移動することができることを示している．

この式が成り立つのは，もし，$(C_{a+1} \cdots C_{c-1})$ の中に $C_{c-n} (= C_c)$ が含まれれば，$C_{a+n} (= C_a)$ も含まれ，逆に，$C_{c-n} (= C_c)$ が含まれなければ，$C_{a+n} (= C_a)$ も含まれず，符号反転は偶数回になるからである．$(C_a \cdots C_c)$ の場合は，C_a と C_c が余分に含まれていることが異なるのみで，あとは同じであるから符号反転はやはり偶数回である．

このことを念頭に置くと，

$$
\begin{aligned}
P_{ac}P_{bc} &= s_c(C_c \cdots C_a)s_a s_c(C_c \cdots C_b)s_b \\
&= s_a(C_c \cdots C_a)s_c s_c(C_c \cdots C_b)s_b \\
&= s_a(C_c \cdots C_a)(C_c \cdots C_b)s_b \\
&= s_a(C_c \cdots C_a)(C_d \cdots C_{c-1})^2(C_c \cdots C_b)s_b \qquad (19)\\
&= s_a(C_d \cdots C_a)(C_d \cdots C_b)s_b \\
&= s_a(C_d \cdots C_a)s_d s_d(C_d \cdots C_b)s_b \\
&= s_d(C_d \cdots C_a)s_a s_d(C_d \cdots C_b)s_b \\
&= P_{ad}P_{bd} \qquad (20)
\end{aligned}
$$

となり，式 (O-48) の第 1 式を導くことができる．式 (19) の部分では，技術的な取り扱いが必要である．まず，式 (3) または式 (4) の関係から，$P_{ac}P_{bc}$ を $(C_c \cdots C_a)(C_c \cdots C_b)$ の形にすることができる．C_d が C_c の右側にあれば，$(C_c \cdots C_{d-1})^2$ を挿入し，左側にあれば，$(C_d \cdots C_{c-1})^2$ を挿入すればよい．式 (19) では，後者の場合に相当する．

例を一二示しておこう．

$c < d < a < b$ の場合は，

$$
\begin{aligned}
P_{ac}P_{bc} &= s_c(C_c \cdots C_a)s_a s_c(C_c \cdots C_b)s_b \\
&= s_a(C_c \cdots C_a)(C_c \cdots C_b)s_b \\
&= s_a(C_c \cdots C_a)(C_c \cdots C_{d+1})^2(C_c \cdots C_b)s_b \\
&= s_a(C_d \cdots C_a)(C_d \cdots C_b)s_b \\
&= s_a(C_d \cdots C_a)s_d s_d(C_d \cdots C_b)s_b \\
&= s_d(C_d \cdots C_a)s_a s_d(C_d \cdots C_b)s_b \\
&= P_{ad}P_{bd} \qquad (21)
\end{aligned}
$$

となる．

$a < c < b < d$ の場合は，

$$
\begin{aligned}
P_{ac}P_{bc} &= s_c(C_c \cdots C_{2n}C_1 \cdots C_a)s_a s_c(C_c \cdots C_b)s_b \\
&= s_a(C_c \cdots C_{2n}C_1 \cdots C_a)(C_c \cdots C_b)s_b \\
&= s_a(C_c \cdots C_{2n}C_1 \cdots C_a)(C_c \cdots C_{d-1})^2(C_c \cdots C_b)s_b \\
&= s_a(C_d \cdots C_{2n}C_1 \cdots C_a)(C_{b+1} \cdots C_{d-1})s_b \\
&= s_a(C_d \cdots C_{2n}C_1 \cdots C_a)s_d s_d(C_{b+1} \cdots C_{d-1})s_b \\
&= s_d(C_d \cdots C_{2n}C_1 \cdots C_a)s_a s_b(C_{b+1} \cdots C_{d-1})s_d \\
&= P_{ad}P_{bd} \qquad (22)
\end{aligned}
$$

となる．

上の例で，d を敢えて 1 を超えて左の方にあるとみなせば，

$$\begin{aligned}P_{ac}P_{bc} &= s_a(C_c\cdots C_a)(C_c\cdots C_b)s_b \\ &= s_a(C_c\cdots C_a)(C_d\cdots C_{2n}C_1\cdots C_{c-1})^2(C_c\cdots C_b)s_b \\ &= s_a(C_d\cdots C_{2n}C_1\cdots C_a)(C_d\cdots C_{2n}C_1\cdots C_b)s_b \\ &= s_a(C_d\cdots C_a)(C_d\cdots C_b)s_b \\ &= s_a(C_d\cdots C_a)s_d^2(C_d\cdots C_b)s_b \\ &= s_d(C_d\cdots C_a)s_a s_d(C_d\cdots C_b)s_b \\ &= P_{ad}P_{bd} \qquad (23)\end{aligned}$$

とすることもできる．

a，b，c，d が特別な大小関係にある場合を確認しておこう．まず，$c=d$ の場合，$a=b$ の場合は trivial である．$a=c$ と $b=c$，$a=d$ と $b=d$ は同じであるから，$a=c$ と $a=d$ の場合を確認する．まず，$a=c$ の場合，

$$\begin{aligned}P_{ac}P_{bc} = P_{aa}P_{ba} &= (-C_a)s_a(C_a\cdots C_b)s_b \\ &= s_a(C_a)(C_a\cdots C_b)s_b \\ &= s_a(C_a)(C_d\cdots C_{a-1})^2(C_a\cdots C_b)s_b \\ &= s_a(C_d\cdots C_a)(C_d\cdots C_b)s_b \\ &= s_d(C_d\cdots C_a)s_d^2(C_d\cdots C_b)s_b \\ &= s_d(C_d\cdots C_a)s_a s_d(C_d\cdots C_b)s_b \\ &= P_{ad}P_{bd} \qquad (24)\end{aligned}$$

となり，成り立つ．もう一方の $a=d$ の場合も，

$$\begin{aligned}P_{ac}P_{bc} &= s_a(C_c\cdots C_a)(C_c\cdots C_b)s_b \\ &= s_a(C_c\cdots C_a)(C_c\cdots C_{a-1})^2(C_c\cdots C_b)s_b \\ &= s_a(C_a)(C_a\cdots C_b)s_b \\ &= (-C_a)s_a(C_a\cdots C_b)s_b \\ &= P_{aa}P_{ba} \qquad (25)\end{aligned}$$

となり，成り立つ．

以上で，a と b が 1 から $2n$ の範囲を独立に渡る場合において，第 1 式が成り立つことは示された．第 2 式は，公式 1 と第 1 式を使って次のようにして成り立つことを示すことができる．

$$\begin{aligned}P_{ac}P_{ad} &= (P_{cc}P_{ca}P_{aa})(P_{dd}P_{da}P_{aa}) = (P_{cc}P_{ca}P_{aa})(P_{aa}P_{da}P_{dd}) \\ &= P_{cc}P_{ca}P_{da}P_{dd} = P_{cc}P_{cb}P_{db}P_{dd} = P_{cc}P_{cb}P_{bb}^2P_{db}P_{dd} \\ &= (P_{cc}P_{cb}P_{bb})(P_{bb}P_{db}P_{dd}) = (P_{cc}P_{cb}P_{bb})(P_{dd}P_{db}P_{bb}) \\ &= P_{bc}P_{bd} \qquad (26)\end{aligned}$$

公式 4 すなわち式 (O-46) を用いると，公式 5 から式 (O-49) が得られる．

$$\begin{aligned}P_{ac}P_{b,c+n} &= P_{ad}P_{b,d+n} = P_{ad}P_{b+n,d} \\ P_{ac}P_{a+n,d} &= P_{bc}P_{b+n,d} = P_{bc}P_{b,d+n} \qquad \text{(O-49)}\end{aligned}$$

* * * * *

9.2 P_{ab} の演算

添字の合同

演算子 P_{ab} は，添字に関して完全な $2n$ 周期を有するが，一方，n についても，たとえば両方同時に変化する場合など，限られた範囲で周期的であり，他の面でも準周期的といえる関係式が成り立つ．したがって，Onsager はこのような準周期的な関係を表すためにクロネッカーの記号のような D という記号を導入している．この D という関数は，

$$
\begin{aligned}
D(0) &= D(n) = 1 \\
D(m)\sin\frac{m\pi}{n} &= 0
\end{aligned}
\tag{O-50}
$$

と定義される．第 2 式は，m が 0 または n 以外の場合，というのを数学的に記述しただけで，Onsager の好みである．$2n$ を法とする合同であればクロネッカーの記号を使えるが，n に関する法であるから D という新しい記号を用いている．つまり，ここでは $2n$ を法とする合同を一致といい，n を法とする合同 (congruence) を「合同 (congruence)」と使い分けている．

この合同が重要な意味を持つのは，2 つあるいはそれ以上の P_{ab} と P_{cd} の積において，対応する添字の間の合同関係である．つまり，a と c，b と d の間の合同関係が重要だということである．1 個の P_{ab} の a と b が偶然に合同となっても，$P_{a,a+n} = -CC_a$ というような，それ自身は意味があるけれども，交換関係などにかかわるような重要な意味は持たないということを述べている．

P_{ab} の積

それでは P_{ab} の積について特別な場合を見ておこう．まず，対応する添字が同時に合同な 2 つの P_{ab} の積を考える．最も簡単な例は式 (O-47) および式 (O-46) である．

$$
P_{ab}P_{ab} = 1 \tag{O-47}
$$

これと式 (O-46) から，

$$
P_{ab}P_{a,b+n} = -C \tag{27}
$$

となる．1 と $-C$ は不変基底要素 (invariant basis element) である．任意の数の P_{ab} の積で，対応する添字が同時に合同な P_{ab} の数が偶数の場合，もしまとまっていれば，$P_{ab}^2 = 1$ と $P_{ab}P_{a,b+n} = -C$ の積になるので，やはり同じ 1 と $-C$ となる．まとまっていない場合，交換関係を用いてまとめることができるが，後述する交換関係により符号が変わる場合もある．結局，偶数の，対応する添字が同時に合同な P_{ab} からなる任意数の P_{ab} の積は ± 1 と $\pm C$ となる．

一方，次の恒等式 (O-51) を見てみよう．

$$
P_{11}\cdots P_{nn} = (-1)^n C \tag{O-51}
$$

この式の左辺は異なる因子から構成され，同時に合同な P_{ab} は 1 個しかないから，これと偶数個の同時に合同な P_{ab} の積を作れば，奇数個の同時に合同な P_{ab} を含む P_{ab} の積を用いても不変基底要素の ± 1 と $\pm C$ を得ることができる．

9.3 P_{ab} の交換関係

P_{ab} の交換関係を導くために，次の P_{ab} 積の添字の交換に関する関係式が導かれている．出発点は次の式である．

$$P_{ab}P_{bb} = -P_{ab}C = -s_a(C_{a+1}\cdots C_{b-1})s_bC_b \tag{28}$$

この式で，P_{ab} と P_{bb} を交換するということは第 2 式で，C_b を左端まで移動することであるが，途中 C_b と非可換な演算子は少なくとも s_b が 1 つある．もし，$a = b - n$ あるいは $a = b + n$ なら $s_a = s_{b\pm n} = s_b$ も非可換であるが，非可換な演算子が 2 個存在することになり全体としては可換になる．つまり，合同 congruent を $\equiv$ という記号で表すと，もし，$a \equiv b$ なら s_b は 2 個存在して符号反転せず，$a \not\equiv b$ なら 1 個のみ存在して符号反転する．したがって，

$$P_{ab}P_{bb} = -(-1)^{D(a-b)}P_{bb}P_{ab} \tag{29}$$

と表すことができる．ここで公式 5 を用いると，

$$P_{ab}P_{bb} = P_{ac}P_{bc}, \quad P_{bb}P_{ab} = P_{bc}P_{ac}, \tag{30}$$

が成り立つから，これを式 (29) に代入すると，

$$P_{ac}P_{bc} = -(-1)^{D(a-b)}P_{bc}P_{ac} \tag{31}$$

となる．

前の添字が wild card の場合は次のようにすればよい．

$$P_{aa}P_{ab} = (-C_a)s_a(C_{a+1}\cdots C_{b-1})s_b = -(-1)^{D(a-b)}s_a(C_{a+1}\cdots C_{b-1})s_b(-C_a) = -(-1)^{D(a-b)}P_{ab}P_{aa} \tag{32}$$

この式に公式 5 を用いると

$$P_{ca}P_{cb} = -(-1)^{D(a-b)}P_{cb}P_{ca} \tag{33}$$

となり，前の添字が wild card の場合も同様の関係が成り立つ．

以上の関係式を用いると，P_{ac} と P_{bd} の積の間の対応する添字を交換する関係式を得ることができる．途中で公式 5 と式 (31) を用いることにより，

$$\begin{aligned}
P_{ac}P_{bd} &= P_{ac}P_{ad}^2P_{bd} = (P_{ac}P_{ad})P_{ad}P_{bd} \\
&= (P_{bc}P_{bd})P_{ad}P_{bd} = P_{bc}(P_{bd}P_{ad})P_{bd} \\
&= P_{bc}(-(-1)^{D(a-b)}P_{ad}P_{bd})P_{bd} \\
&= -(-1)^{D(a-b)}P_{bc}P_{ad}(P_{bd}P_{bd}) \\
&= -(-1)^{D(a-b)}P_{bc}P_{ad}
\end{aligned} \tag{34}$$

となる．

また，後の添字の交換も以下のようにして示すことができる．

$$\begin{aligned}
P_{ac}P_{bd} &= P_{ac}P_{bc}^2P_{bd} = (P_{ac}P_{bc})P_{bc}P_{bd} \\
&= (P_{ad}P_{bd})P_{bc}P_{bd} = P_{ad}(P_{bd}P_{bc})P_{bd} \\
&= P_{ad}(-(-1)^{D(c-d)}P_{bc}P_{bd})P_{bd} \\
&= -(-1)^{D(c-d)}P_{ad}P_{bc}(P_{bd}P_{bd}) \\
&= -(-1)^{D(c-d)}P_{ad}P_{bc}
\end{aligned} \tag{35}$$

このように，2 つの P_{ab} 積において，対応する添字の交換をすると，添字が合同でない場合は符号反転する．

以上の関係式を用いて，P_{ac} と P_{bd} の交換関係を導くことができる．最初に前の添字の交換，次に後の添字の交換をすることに注意して，

$$\begin{aligned}
P_{ac}P_{bd} &= -(-1)^{D(a-b)}P_{bc}P_{ad} \\
&= [-(-1)^{D(a-b)}][-(-1)^{D(c-d)}]P_{bd}P_{ac} \\
&= (-1)^{D(a-b)+D(c-d)}P_{bd}P_{ac}
\end{aligned} \tag{36}$$

となる．すなわち，次の交換関係が成り立つ．

＊ ＊ ＊ ＊ ＊

公式 6

$$P_{ac}P_{bd} = (-1)^{D(a-b)+D(c-d)}P_{bd}P_{ac} \tag{O-52}$$

この交換関係は，a, b, c, d が 0 から $2n$ まで亘って独立に変化しても成り立つ．すなわち，大小関係が任意の組み合わせのおいて成り立つ．このことは，公式 5 の導出で確認されており，公式 6 の導出においても，添字の大小関係に依存することは用いられていないことからも明らかである．

9.4 P_{ab} の作用

P_{ab} を関数 (ベクトル) $\psi(\mu_1, \cdots, \mu_n)$ に作用させたとき，a と b の大小関係によって結果が変わる．この節では，それをまとめているが，まとめ方が Onsager の好みに沿って簡潔にまとめられているので，ここではそれを確認しておこう．

まず，$a < b$ と $a > b$ の場合の P_{ab} の定義を再掲する．$1 \le a, b \le 2n$ の範囲において，

$a < b$ のとき

$$P_{ab} = s_a(C_{a+1} \cdots C_{b-1})s_b \tag{37}$$

$b < a$ のとき

$$\begin{aligned}
P_{ab} &= s_a(C_{a+1} \cdots C_{2n}C_1 \cdots C_{b-1})s_b && (38) \\
&= s_a(C_b \cdots C_a)s_b && (39)
\end{aligned}$$

(A)　P_{ab} が作用して $-\mu_a\mu_b\psi$ となる場合　＊ ＊ ＊ ＊ ＊

P_{ab} が $\psi(\mu_1, \cdots, \mu_n)$ に作用するとき，P_{ab} を構成する一連の演算子において右側の演算子から作用するので，s_b に関しては符号反転のことを考える必要はない．一方，s_a が作用する前に C_a が作用すれば $-\mu_a$ が演算の結果として得られる．したがって，式 (37) の場合，$(C_{a+1} \cdots C_{b-1})$ の中に C_a が存在の有無を確かめる必要がある．実際には C_a でもよいが，むしろ C_{a+n} か C_{a-n} を探すことになる．これを式 (37) の場合と，式 (38) または式 (39) の場合にわけて考えてみよう．

まず，$a < b$ の場合を考える．式 (37) から，$C_{a+n}(= C_a)$ が $(C_{a+1} \cdots C_{b-1})$ あるのは，

$$a + n \le b - 1; \quad 0 < a < n \tag{40}$$

のときである．

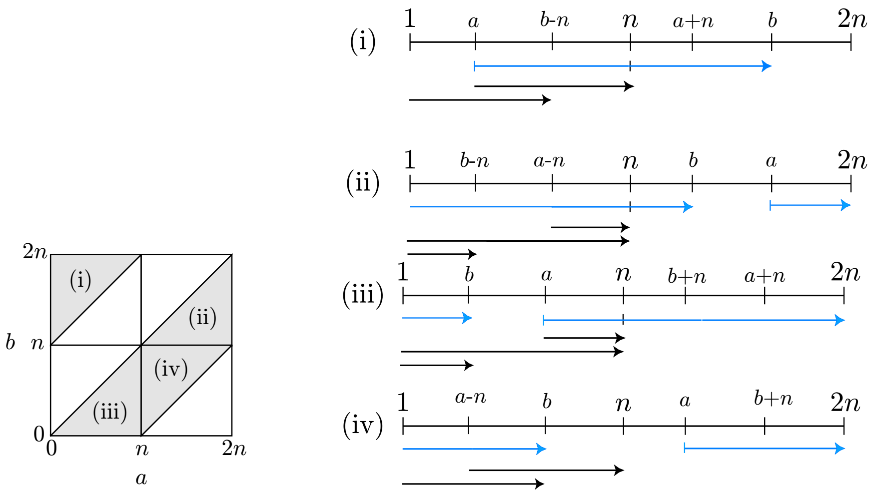

図 1: (左)：C_a が $(C_{a+1}\cdots C_{b-1})$ の範囲に含まれるための a と b の条件を示す式 (39)-(41) の示す範囲．(右)：左の領域 (i)–(iv) における $(C_{a+1}\cdots C_{b-1})$ の範囲（青色）とそれと等価な $1\sim n$ における $(C_{a+1}\cdots C_{b-1})$ 範囲

次に，$b<a$ の場合は，式 (38)，(39) から，C_{a-n} が今度は $(C_1\cdots C_{b-1})$ の中か，C_{a+n} が $(C_{a+1}\cdots C_{2n})$ の中にある条件は，

$$a-n\le b-1,\quad b<a;\qquad a>n \tag{41}$$

または

$$a+n\le 2n; \tag{42}$$

のときである．ここで示された範囲は，図 1 の左に灰色で示される部分に相当し，(i) が $a<b$ の場合，(ii)，(iii)，(iv) が $b<a$ の場合である．この範囲にあれば，P_{ab} の s_a はベクトルに作用して $-\mu_a$ となる．したがって，演算結果は，図 1 左の (i) に相当する場合 $(a<b)$ には，P_{ab} の C_j 列は C_{a+1} から C_{b-1} まで (図 1 右の (i) の 1 番目の青い矢印) であるが，これは等価的に C_{a+1} から C_n まで (図 1 右 (i) の 2 番目の黒い矢印) と，$C_{n+1}=C_1$ から $C_{b-1}=C_{b-n-1}$ まで (図 1 右 (i) の 3 番目の黒い矢印) の C_j 列の和に等しく，図 1(i) から明らかなように，C_{a+1} から C_{b-1} が重複するから，結局，

$$(P_{ab},\ \psi(\mu_1,\cdots,\mu_n))=-\mu_a\mu_b\psi(-\mu_1,\cdots,-\mu_a,\mu_{a+1},\cdots,\mu_{b-1},-\mu_b,\cdots,-\mu_n) \tag{43}$$

となる．図 1(iv) も同様に同じ結果をもつ．

図 1 左の (ii) と (iii) に相当する場合には，$b<a$ の場合で，図 1 右 (ii) と (iii) から明らかなように，P_{ab} の C_j 列は C_{a+1} から C_{b-1} までのうち，C_1 から C_{b-1} までと C_{a+1} から C_n が重複するから，

$$(P_{ab},\ \psi(\mu_1,\cdots,\mu_n))=-\mu_a\mu_b\psi(\mu_1,\cdots,\mu_a,-\mu_{a+1},\cdots,-\mu_{b-1},\mu_b,\cdots,\mu_n) \tag{44}$$

となる．

＊　＊　＊　＊　＊

(B)　P_{ab} が作用して $\mu_a\mu_b\psi$ となる場合

P_{ab} が作用して $\mu_a\mu_b\psi$ と負符号が現れない場合は，$(C_{a+1}\cdots C_{b-1})$ の範囲に C_a が含まれない場合で，これ

は (A) 以外の範囲になる．すなわち，

$a < b$ のとき

$$a + n > b - 1 \quad \text{かつ} \quad a - n < 1 \tag{45}$$

$b < a$ のとき

$$a + n > 2n \quad \text{かつ} \quad a - n < b - 1 \tag{46}$$

である．式 (44) と式 (45) で示される範囲を図 2 の左図に示す．

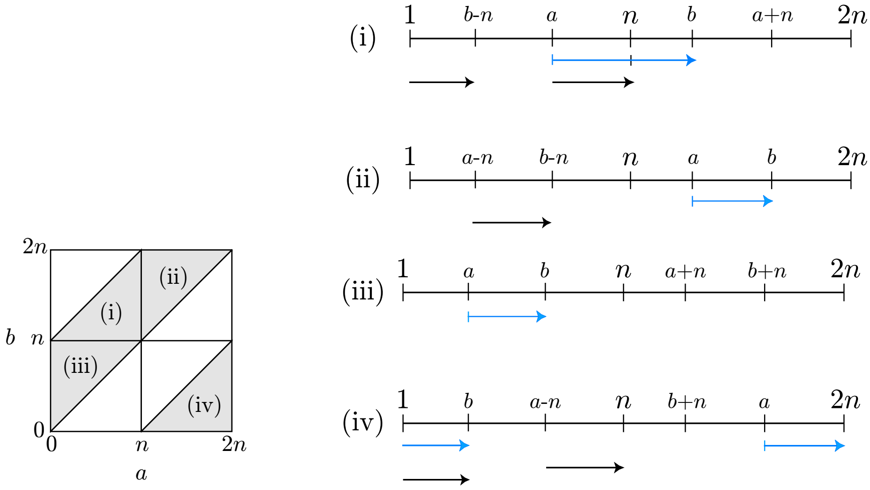

図 2: (左)：C_a が $(C_{a+1} \cdots C_{b-1})$ の範囲に含まれないための a と b の条件を示す式 (39)-(41) の示す範囲．(右)：左の領域 (i)–(iv) における $(C_{a+1} \cdots C_{b-1})$ の範囲（青色）とそれと等価な $1 - n$ における $(C_{a+1} \cdots C_{b-1})$ 範囲

P_{ab} が作用して得られる演算結果は，図 2 左図の領域 (ii)，(iii) の場合は，図 1 の場合と同様の考えにより，

$$(P_{ab}, \psi(\mu_1, \cdots, \mu_n)) = \mu_a \mu_b \psi(\mu_1, \cdots, \mu_a, -\mu_{a+1}, \cdots, -\mu_{b-1}, \mu_b, \cdots, \mu_n) \tag{47}$$

となり，図 2 の領域 (i)，(iv) の場合は，

$$(P_{ab}, \psi(\mu_1, \cdots, \mu_n)) = \mu_a \mu_b \psi(-\mu_1, \cdots, -\mu_a, \mu_{a+1}, \cdots, \mu_{b-1}, -\mu_b, \cdots, -\mu_n) \tag{48}$$

となる．

* * * * *

Onsager による表現

ここで，Onsager が論文で表している領域の区分を見てみよう．まず，式 (O-53a) で示されている

$$\sin \frac{(b - a - \frac{1}{2})\pi}{n} > 0 \tag{49}$$

の示す範囲は，

$$a < b < a + n, \quad \text{または} \quad a - 2n < b < a - n, \tag{50}$$

となり，図 2 左の灰色部分に一致する．

また，式 (O-53b) で示されている

$$\sin \frac{(b - a - \frac{1}{2})\pi}{n} < 0 \tag{51}$$

の示す範囲は,

$$a+n<b<a+2n, \quad \text{または} \quad a-n<b<a, \tag{52}$$

となり,図 1 左の灰色部分に一致する.

Onsager は,さらに,両者の領域区分とは独立に別の領域を次のように定義している.一方は,

$$\cot\frac{(a-\frac{1}{2})\pi}{n} > \cot\frac{(b-\frac{1}{2})\pi}{n} \tag{53}$$

となり,この領域は図 3 左図で灰色で示す部分である.

もう一つの領域は次の式で示される.

$$\cot\frac{(a-\frac{1}{2})\pi}{n} < \cot\frac{(b-\frac{1}{2})\pi}{n} \tag{54}$$

この領域は図 3 右図で灰色で示す部分である.

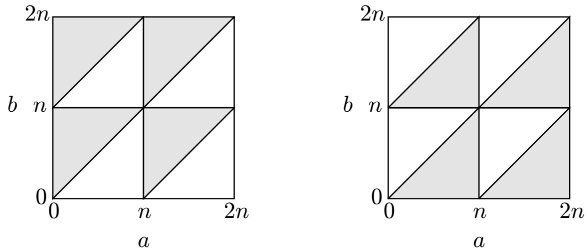

図 3: 左図:式 (52) で示される領域.右図:式 (53) で示される領域.

さて,Onsager は

$$\cot\frac{(a-\frac{1}{2})\pi}{n} > \cot\frac{(b-\frac{1}{2})\pi}{n} \quad \text{かつ} \quad \sin\frac{(b-a-\frac{1}{2})\pi}{n} > 0 \tag{55}$$

の場合は式 (O-53a) が成り立つ,としている.これはいまの場合,図 3 左図と図 2 左図の共通部分で,図 2 左図の (ii) と (iii) の部分に対応する.演算結果の式 (47) は式 (O-53a) と一致する.

同様に,

$$\cot\frac{(a-\frac{1}{2})\pi}{n} > \cot\frac{(b-\frac{1}{2})\pi}{n} \quad \text{かつ} \quad \sin\frac{(b-a-\frac{1}{2})\pi}{n} < 0 \tag{56}$$

の場合は図 3 左図と図 1 左図の共通部分で,図 1 左図の (i) と (iv) の部分に対応する.演算結果の式 (43) は式 (O-53b) と一致する.

次に,

$$\cot\frac{(a-\frac{1}{2})\pi}{n} < \cot\frac{(b-\frac{1}{2})\pi}{n} \quad \text{かつ} \quad \sin\frac{(b-a-\frac{1}{2})\pi}{n} > 0 \tag{57}$$

の場合は図 3 右図と図 2 左図の共通部分で,図 2 左図の (i) と (iv) の部分に対応する.演算結果の式 (48) である.

$$\cot\frac{(a-\frac{1}{2})\pi}{n} < \cot\frac{(b-\frac{1}{2})\pi}{n} \quad \text{かつ} \quad \sin\frac{(b-a-\frac{1}{2})\pi}{n} < 0 \tag{58}$$

の場合は図 3 左図と図 1 左図の共通部分で,図 1 左図の (ii) と (iii) の部分に対応する.演算結果の式 (44) である.

以上で,式 (O-53a),式 (O-53b),およびその下の記述が P_{ab} の定義に基づく計算と一致することがわかる.

領域に分けて示すと,本文に見られるようにかなり冗長になる.一方,Onsager 論文の表現は簡潔で洗練されている.

$$* \quad * \quad * \quad * \quad *$$

本節末尾で，Onsager はベクトル基底の式 (O-41) に P_{ab} が作用した場合に触れている．そこで次の sgn 関数が用いられている．

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1; & x < 0 \\ 0; & x = 0 \\ 1; & x > 0. \end{cases} \tag{59}$$

この sgn 関数を用いると

$$\operatorname{sgn}\left[\sin\frac{(j-\frac{1}{2})\pi}{n}\right] = \begin{cases} -1; & n < j \leq 2n \\ 1; & 1 \leq j \leq n. \end{cases} \tag{60}$$

となる．

さて，次に，P_{ab} が

$$\psi(\mu_1, \cdots, \mu_n) = \mu_{j_1}\mu_{j_2}\cdots\mu_{j_k} \tag{61}$$

に作用する場合を考えてみよう．P_{ab} の s_a と s_b は符号をつけて $\mu_a\mu_b$ として ψ に因子として加えられる．符号は，$(C_{a+1}\cdots C_{b-1})$ の中に C_a または C_b が含まれていればその都度 -1 を掛ければよい．同様に，ψ の中の μ_{j_h} $(h = 1, \cdots, k)$ についても，C_{j_h} が $(C_{a+1}\cdots C_{b-1})$ の中に含まれていればその都度 -1 を掛ければよい．そこで，$1 \leq a, b \leq 2n$ であるから，$(C_{a+1}\cdots C_{b-1})$ の添字を a と b を n を法として畳み込んだときの C_j 列の中に C_{j_h} の有無を調べなければならない．畳み込んだ C_j 列は $a < b$ と $b < a$ の場合に分けて図 1 と図 2 にすでに示した．図 1，図 2 に示す範囲に合わせて，これを具体的に見てみよう．

(A)　$\sin\frac{(b-a-\frac{1}{2})\pi}{n} > 0$ のとき

(i) $j_h < b - n$　または　$j_h > a$

図 1(i) から明らかなように上の範囲は C_{j_h} が畳み込んだ C_j 列の中にある条件である．この条件を大小関係が対応し，かつ $1 \leq j_h \leq n$ に零点を 1 個しか持たない sin 関数を用いて表すと，

$$\sin\frac{(j_h - b + n + \frac{1}{2})\pi}{n} < 0 \ \text{ または } \ \sin\frac{(j_h - a - \frac{1}{2})\pi}{n} > 0 \tag{62}$$

となる．$\frac{1}{2}$ の前の符号は，$\frac{1}{2}$ を除いた時の分子を 0 とする j_h が条件式を満たすように決めれば良い．上の第 1 式の場合は，$j_h = b - n$ のとき満たさず，$j_h = b - n - 1$ のときに満たすためには符号は $+$ でなければならない．もう一方のほうも同様である．式 (62) の範囲は，$b - n < a$ であることに注意すると，明らかに次のように 1 つの式にまとめることができる．

$$\sin\frac{(j_h - b + n + \frac{1}{2})\pi}{n}\sin\frac{(j_h - a - \frac{1}{2})\pi}{n} > 0 \tag{63}$$

すなわち，

$$\sin\frac{(j_h - a - \frac{1}{2})\pi}{n}\sin\frac{(j_h - b + \frac{1}{2})\pi}{n} < 0 \tag{64}$$

となる．これが成り立つとき，μ_{j_h} の符号が反転するのであるから，

$$\operatorname{sgn}\left[\sin\frac{(j_h - a - \frac{1}{2})\pi}{n}\sin\frac{(j_h - b + \frac{1}{2})\pi}{n}\right]\mu_{j_h} \tag{65}$$

とすればよいことがわかる．$a \pm n$ や $b \pm n$ が 1 つあれば sin の符号が変わり，2 つなら変わらないことに注意すればその他の範囲が 2 つに分かれている場合も同じようになることがわかる．

(ii) $j_h > a - n$　または　$j_h < b - n$

(i) の場合と同様に，

$$\sin\frac{(j_h - a + n - \frac{1}{2})\pi}{n} > 0 \ \text{ かつ } \ \sin\frac{(j_h - b + n + \frac{1}{2})\pi}{n} < 0 \tag{66}$$

とすることができる．1 つの式にまとめると，

$$\sin\frac{(j_h-a+n-\frac{1}{2})\pi}{n}\sin\frac{(j_h-b+n+\frac{1}{2})\pi}{n}<0 \tag{67}$$

となり，結局，

$$\sin\frac{(j_h-a-\frac{1}{2})\pi}{n}\sin\frac{(j_h-b+\frac{1}{2})\pi}{n}<0 \tag{68}$$

となって，式 (64) と同じ条件式が得られる．

(iii) は (ii) と，(iv) は (i) と同じ取扱いでやはり式 (64) と同じ条件式が得られる．

(B)　$\sin\frac{(b-a-\frac{1}{2})\pi}{n}<0$ のとき

この場合の特徴として，C_a と c_b が C_j 列の両端にあることがあげられる．

(i) $j_h \le a$　または　$j_h \ge b-n$

この不等式を sin 関数を用いて表そう．等号が含まれているので $\frac{1}{2}$ の前の符号が違うことに注意すると，

$$\sin\frac{(j_h-a-\frac{1}{2})\pi}{n}<0 \;\text{ または }\; \sin\frac{(j_h-b+n+\frac{1}{2})\pi}{n}>0 \tag{69}$$

となる．したがって，1 つの式にまとめると，

$$\sin\frac{(j_h-a-\frac{1}{2})\pi}{n}\sin\frac{(j_h-b+n+\frac{1}{2})\pi}{n}>0 \tag{70}$$

となる．整理して，結局，

$$\sin\frac{(j_h-a-\frac{1}{2})\pi}{n}\sin\frac{(j_h-b+\frac{1}{2})\pi}{n}<0 \tag{71}$$

となる．

(ii) $b-n \le j_h \le a-n$

この不等式を sin 関数を用いて表す．上と同じく，等号が含まれているので $\frac{1}{2}$ の前の符号が違うことに注意すると，

$$\sin\frac{(j_h-b+n+\frac{1}{2})\pi}{n}>0 \;\text{ かつ }\; \sin\frac{(j_h-a+n-\frac{1}{2})\pi}{n}<0 \tag{72}$$

となる．したがって，

$$\sin\frac{(j_h-b+n+\frac{1}{2})\pi}{n}\sin\frac{(j_h-a+n-\frac{1}{2})\pi}{n}<0 \tag{73}$$

となり，結局，

$$\sin\frac{(j_h-a-\frac{1}{2})\pi}{n}\sin\frac{(j_h-b+\frac{1}{2})\pi}{n}<0 \tag{74}$$

と同じ式になる．

(A) の場合と同じように，(iii) は (ii) と同じ，(iv) は (i) と同じである．

結局，a と b の値如何にかかわらず，C_{j_h} が $(C_{a+1}\cdots C_{b-1})$ に含まれる条件は式 (64) になる．したがって，符号反転に関しては式 (65) で表され，これを $h=1$ から k までの積をとればよい．

一方，s_b は P_{ab} の右端にあるので，C_b の存在如何に符号反転はかかわらない．しかし，s_a については C_a が $(C_{a+1}\cdots C_{b-1})$ に含まれていれば符号反転する．上に述べたように，(A) の場合は C_a も C_b も含まれないが，(B) の場合は両方含まれる．したがって，s_b の符号反転を条件に含めるには，

$$\mathrm{sgn}\left[\sin\frac{(b-a-\frac{1}{2})\pi}{n}\right] \tag{75}$$

とすればよいことがわかる．

以上のことを全部合わせて，$\mu_a\mu_b\mu_{h_1}\cdots\mu_{h_k}$ の符号に反映させるには式 (65) を $h=1$ から k までと式 (75) を掛ければよい．sgn の積はまとめて 1 つにして sgn 関数に入れれば良いから，結局，次の結果が得られる．

$$(P_{ab},\ \mu_{h_1}\cdots\mu_{h_k}) = \mathrm{sgn}\left[\sin\frac{(b-a-\frac{1}{2})\pi}{n}\prod_{h=1}^{k}\sin\frac{(j_h-a-\frac{1}{2})\pi}{n}\sin\frac{(j_h-b+\frac{1}{2})\pi}{n}\right]\mu_a\mu_b\mu_{h_1}\cdots\mu_{h_k} \tag{76}$$

以上により，Onsager の与えた式 (O-54) が導かれた．長々と条件を分けてそれぞれの式を書くことをしないで，Onsager はたった 1 つの式で表している．