Onsager の 2 次元イジングモデル厳密解の論文を読む　その 12（完）

2018.5.6　　鈴木　実

17　SOME PROPERTIES OF FINITE CRYSTALS　有限な結晶の性質

スピン数が有限の場合には，すなわち結晶の大きさが有限の場合には分配関数は温度の解析的な関数になるため，完全な秩序状態からずれれば状態でも有限な確率が存在する．急峻な転移とともに完全な秩序状態への移行は，2 次元スピン格子が 2 つの独立な相互作用の方向に無限に伸びているときに起こる．この節で，Onsager は，2 次元格子結晶が大きくなるにつれて，完全な秩序状態への移行過程がどのように起こるかということを，異なる秩序状態の界面のエネルギーから検討している．

17.1　Boundary Tension　界面張力

界面張力を界面でのエネルギー u で表すことにしよう．u を，i 番目の列と j 番目の列で各列のスピンの方向が異なる場合のエネルギーとして表す．この界面のエネルギーは，相互作用エネルギー J' の符号が反転された場合を考えることによって得られる．これは，以下のように考えれば良い．まず，列間の相互作用エネルギーは，

$$u = +J' \sum_{j=1}^{n} \mu_j \mu_{j+1} \tag{1}$$

である．相互作用のエネルギーが $J' > 0$ で，μ_j と μ_{j+1} の符号が反対である状態のエネルギーは，$J' < 0$ の場合に μ_j と μ_{j+1} が同じ符号の場合と同じであるからである．このような状態は n が偶数のときに安定に存在することはすぐわかる．つまり，$+$ のスピン列と $-$ のスピン列が交互に配置する構成が最もエネルギーの低い状態になって安定する（$J' < 0$ の場合）．

一方，n が奇数の場合には必ず同符号の隣合わせスピン列が少なくとも 1 対存在する．この部分は縫い目 seam に擬せられる．これが境界面の自由エネルギーに相当する．

境界面が存在する時の分配関数を計算しよう．其の場合，式 (O-93) が使える．J' の符号が反転しているから，

$$J'/k_{\mathrm{B}}T = -H' > H^* > 0 \tag{2}$$

であること，転移点以下であるから $|H'| > H^*$ であること，および，n が奇数の場合を考える．一方，γ_r と ω_r の関係を調べるために式 (O-89a) を以下のように変形しよう．

$$\cosh \gamma_r = \cosh 2H' \cosh 2H^* - \sinh 2H' \sinh 2H^* \cos \omega_r \tag{O-89a}$$

$$= \cosh(-2H') \cosh 2H^* - \sinh(-2H') \sinh 2H^* \cos(\pi - \omega_r) \tag{3}$$

式 (3) から，$H' < 0$ の場合の γ_r は，$2|H'| = -2H'$ および $2H^*$ を 2 辺とし，その挟む角が $\pi - \omega_r$ の双極三角形の場合の γ と同じであることがわかる．この関係を図 1 に示す．これから，$r = n$ のときは，$\omega_n = \pi$ であるから，式 (3) から $\cosh \gamma_n = \cosh(2H' + 2H^*)$ となり，式 (2) および $\gamma_r > 0$ であることから，$\gamma_n = -2H' - 2H^* = |2H'| - 2H^*$ となる．$n = 2m + 1$ とすると，$\gamma_n = \gamma_{2m+1} = |2H'| - 2H^*$ であるから，式 (O-93) より，

$$\begin{aligned}
&\ln \lambda_{\max} - \tfrac{1}{2} \ln(2 \sinh 2H) \\
&\qquad = \gamma_1 + \gamma_3 + \cdots + \gamma_{2m-1} + H' + H^* \\
&\qquad = \gamma_1 + \gamma_3 + \cdots + \gamma_{2m-1} - (|H'| - H^*) \\
&\qquad = \gamma_1 + \gamma_3 + \cdots + \gamma_{2m-1} + \tfrac{1}{2}\gamma_{2m+1} - 2(|H'| - H^*)
\end{aligned} \tag{4}$$

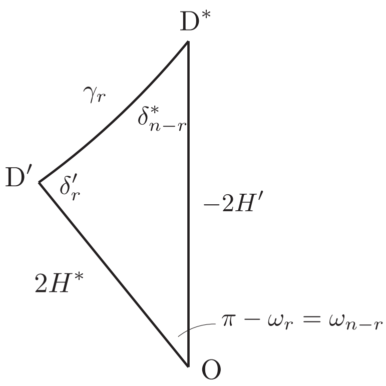

図 1: $H' < 0$ の場合の ω_r と γ_r の関係.

となることがわかる.

図 1 の双曲三角形は，$H' < 0$ のときの γ_r と ω_{n-r} の関係である．$2H' > 0$ の場合には，式 (O-89a) からわかるように，同じ γ_r，同じ 2 辺に対して，ω_r が対応する．図 1 の双曲三角形の角 O は $\pi - \omega_r = \pi - \pi r/n = \pi(n-r)/n = \omega_{n-r}$ となるから，$2H' < 0$ の ω_1，ω_3，$\cdots$，ω_{2m+1} は，$2H' > 0$ の場合の ω_{2m}，ω_{2m-2}，$\cdots$，ω_0 に対応することがわかる．つまり，式 (4) の最後の項を除く γ_r の和 $\gamma_1 + \gamma_3 + \cdots + \gamma_{2m-1}$ は，$2H'$ がプラスの場合に式 (3) で ω_r を $\pi - \omega_r$ で置き換えた $\gamma_0 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_{2m}$ に等しいということである．n が十分大きい場合，その差は無視してもよい．したがって，$2H'$ の符号が負になったときの $\ln \lambda_{\max}$ と正の場合との差は式 (4) の最後の項であることがわかる．すなわち，

$$-2|H'| + 2H^* \tag{5}$$

である.

ここから，H' の符号を反転して考える必要がないので，$H' > 0$ として考える.

式 (5) は，1 列の長さに相当する分配関数の差分である．縦方向（列方向）の 1 個のスピン当りの自由エネルギー σ' は $\ln \lambda_{\max}$ の差分を $\ln \lambda'_{\mathrm{b}}$ で表すと,

$$\frac{\sigma'}{k_{\mathrm{B}}T} = -\ln \lambda'_{\mathrm{b}} = 2(H' - H^*) \tag{O-122a-1}$$

となる．一方，$H' = J'/k_{\mathrm{B}}T$ および $\mathrm{e}^{2H^*} = \coth H$ であるから（[1] の式 (41)）,

$$\sigma' = 2k_{\mathrm{B}}T(H' - H^*) = 2J' - k_{\mathrm{B}}T \ln \coth \frac{J}{k_{\mathrm{B}}T} \tag{O-122a-2}$$

である.

一方，横方向（行方向）の 1 個のスピン当りの自由エネルギー σ は，対称性から H' と H を交換して同じ考え方をすれば良いから，結果の式 (O-122a-1) で H' と H を取り替えればよい．すなわち,

$$\frac{\sigma}{k_{\mathrm{B}}T} = -\ln \lambda_{\mathrm{b}} = 2(H - H'^*) \tag{O-122b}$$

および,

$$\sigma = 2k_{\mathrm{B}}T(H - H'^*) = 2J - k_{\mathrm{B}}T \ln \coth \frac{J'}{k_{\mathrm{B}}T} \tag{6}$$

である.

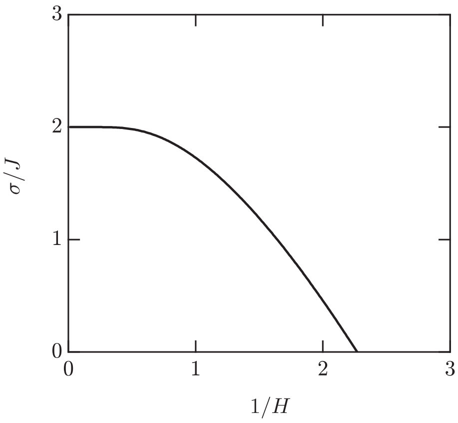

図 2: $J = J'$ の場合の自由エネルギー σ の温度依存性 σ/J-$1/H$.

以上から，縦方向および横方向のスピン 1 個当りの境界面張力のエントロピー $s'_{\rm b}$，$s_{\rm b}$ およびエネルギー $u'_{\rm b}$，$u_{\rm b}$ は，$S = -\partial F/\partial T$ および $F = E - ST$ の関係から，それぞれ次のように表される．

$$s'_{\rm b} = -\frac{\partial \sigma'}{\partial T} = -2k_{\rm B}(H' - H^*) - 2k_{\rm B}T\left(\frac{\partial H'}{\partial T} - \frac{\partial H^*}{\partial T}\right). \tag{7}$$

一方，

$$\frac{\partial H'}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{J'}{k_{\rm B}T}\right) = -\frac{J'}{k_{\rm B}T^2} = -\frac{H'}{T} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial H*}{\partial T} &= \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{1}{2}\ln\coth H\right) = \frac{1}{2}\frac{-\operatorname{cosech}^2 H}{\coth H}\frac{-J}{k_{\rm B}T^2} = \frac{J}{2k_{\rm B}T^2}\frac{\tanh H}{\sinh^2 H}\\ &= \frac{J}{2k_{\rm B}T^2\sinh H\cosh H} = \frac{H}{T\sinh 2H}\end{aligned} \tag{9}$$

であるから

$$\begin{aligned}s'_{\rm b} &= -2k_{\rm B}(H' - H^*) + 2k_{\rm B}H' + \frac{2k_{\rm B}H}{\sinh 2H}\\ &= 2k_{\rm B}\left(H^* + \frac{H}{\sinh 2H}\right)\end{aligned} \tag{O-123-1}$$

となる．さらに，

$$\begin{aligned}u'_{\rm b} = \sigma' + Ts'_{\rm b} &= 2(H' - H^*)k_{\rm B}T + 2k_{\rm B}T\left(H^* + \frac{H}{\sinh 2H}\right)\\ &= 2H'k_{\rm B}T + \frac{2Hk_{\rm B}T}{\sinh 2H} = 2J' + \frac{2J}{\sinh 2H}\end{aligned} \tag{O-123-3}$$

となる．$s_{\rm b}$ と $u_{\rm b}$ は $s'_{\rm b}$ と $u'_{\rm b}$ の式で H' と H を交換することによって得られるから，

$$s_{\rm b} = 2k_{\rm B}\left(H'^* + \frac{H'}{\sinh 2H'}\right), \tag{O-123-2}$$

および

$$u_{\rm b} = 2J + \frac{2J'}{\sinh 2H'} \tag{O-123-4}$$

となる．

式 (6) を用いて計算した $J = J'$ の場合の自由エネルギー σ の温度依存性 σ/J-$1/H$ を図 2 に示す．

17.2 Mean Ordered Length　平均秩序長

臨界点における揺らぎの確率 w はヘルムホルツの自由エネルギーの変化 ΔF を用いて

$$w \propto \mathrm{e}^{-\Delta F/k_\mathrm{B}T} \tag{10}$$

と表すことができる（[2], p.460）．1 原子当りの横方向の張力は式 (O-122b) の σ であるが，これは 1 原子当りのヘルムホルツ自由エネルギーであるから，n 個のスピンによる揺らぎの確率は,

$$w \propto \mathrm{e}^{n\sigma/k_\mathrm{B}T} = \mathrm{e}^{n\ln\lambda_\mathrm{b}} \tag{11}$$

となる．秩序の長さ l_0 は揺らぎが小さくなるほど長くなるから w に反比例する．したがって，$l_0 = w^{-1}$ のように定義する．そうすると,

$$l_0 = \mathrm{e}^{-n\sigma/k_\mathrm{B}T} = \mathrm{e}^{-n\ln\lambda_\mathrm{b}} = \lambda_\mathrm{b}^{-n} \tag{12}$$

となる．これに式 (O-122b) を代入する．$\mathrm{e}^{-2H^*} = \tanh H$ に注意すると,

$$\mathrm{e}^{2n(H-H'^*)} = (\mathrm{e}^{2H}\mathrm{e}^{-2H'^*})^n = (\mathrm{e}^{2H}\tanh H')^n \tag{13}$$

となるから,

$$l_0 = \lambda_\mathrm{b}^{-n} = \mathrm{e}^{2n(H-H'^*)} = (\mathrm{e}^{2H}\tanh H')^n \tag{O-124}$$

という式が得られる．

低温では，$H > H'^*$ であるから，$\mathrm{e}^{2(H-H'^*)} > 1$ となり n が大きくなると $\mathrm{e}^{2(H-H'^*)}$ は指数関数的に増大するから

$$l_0 \gg n \tag{14}$$

となる．逆に，転移点より高い温度では $\mathrm{e}^{2(H-H'^*)} < 1$ となり n が増加すると指数関数的に 0 に近づく．

17.3 The Specific Heat of a Finite Crystal　有限結晶の比熱

有限結晶，つまり n が有限の場合の比熱 C のピーク値を求めよう．ピークは臨界点のとき，すなわち，$H^* = H'$ のときである．したがって，式 (O-17) および式 (O-20) はそれぞれ,

$$\sinh 2H \sinh 2H' = 1 \tag{15}$$

$$\mathrm{gd}\, 2H + \mathrm{gd}\, 2H' = \tfrac{1}{2}\pi \tag{16}$$

となる．$H^* = H'$ であるから，$\delta' = \delta^*$ となるので，これをここでは δ とする．

比熱を計算するための分配関数は，式 (O-95) から

$$\ln\lambda_\mathrm{max} = \frac{n}{2}\ln(2\sinh 2H) + \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n}\gamma_{2r-1} \tag{O-95}$$

と与えられる。以下，途中では簡単のために，γ_{2r-1}，δ_{2r-1}，ω_{2r-1} の添字を省略して，単に γ，δ，ω と書くことにする．

1 原子当りの比熱は式 (O-111b) より、

$$\frac{C}{nNk_\mathrm{B}} = \left(H^2\frac{\partial^2}{\partial H^2} + 2HH'\frac{\partial^2}{\partial H\partial H'} + H^2\frac{\partial^2}{\partial H'^2}\right)\ln\lambda_\mathrm{max} \tag{17}$$

となる．ここで，

$$\frac{\partial^2\gamma}{\partial H^2} = \frac{\partial^2\gamma}{\partial H^{*2}}\left(\frac{\mathrm{d}H^*}{\mathrm{d}H}\right)^2 + \frac{\partial\gamma}{\partial H^*}\frac{\mathrm{d}^2H^*}{\mathrm{d}H^2} \tag{18}$$

および，

$$\frac{\partial^2\gamma}{\partial H\partial H'} = \frac{\partial^2\gamma}{\partial H'\partial H^*}\frac{\mathrm{d}H^*}{\mathrm{d}H} \tag{19}$$

であることに注意し，さらに，[3] の式 (25) と，転移点を扱っているので $H^* = H'$ となることから，

$$\frac{\mathrm{d}H^*}{\mathrm{d}H} = -\sinh 2H^* = -\frac{1}{\sinh 2H} = -\sinh 2H' \tag{20}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2H^*}{\mathrm{d}H^2} = \frac{2\cosh 2H}{\sinh^2 2H} = 2\cosh 2H \sinh^2 2H'^2 \tag{21}$$

である．これを式 (18)，(19) に代入し，さらに，式 (O-112) の第 2 式，第 4 式および第 5 式を代入すると，

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\gamma}{\partial H^2} &= \frac{\partial^2\gamma}{\partial H^{*2}}\sinh^2 2H' + \frac{\partial\gamma}{\partial H^*}2\cosh 2H\sinh^2 2H' \\ &= 4\sin^2\delta'\coth\gamma\sinh^2 2H' + 4\cos\delta'\cosh 2H\sinh^2 2H'\end{aligned} \tag{22}$$

$$\frac{\partial^2\gamma}{\partial H\partial H'} = -\frac{\partial^2\gamma}{\partial H'\partial H^*}\frac{1}{\sinh 2H} = \frac{4\sin^2\delta}{\sinh 2H\sinh\gamma} \tag{23}$$

となる．この式 (22)，(23) と式 (O-112) の第 3 式を式 (17) に代入することにより，

$$\begin{aligned}\frac{C}{nNk_\mathrm{B}} &= H^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}H^2}\{\frac{1}{2}(2\sinh 2H)\} + \frac{1}{2n}\sum_{r=1}^{n}\left(H^2\frac{\partial^2\gamma}{\partial H^2} + 2HH'\frac{\partial^2\gamma}{\partial H\partial H'} + H^2\frac{\partial^2\gamma}{\partial H'^2}\right) \\ &= -\frac{2H^2}{\sinh^2 2H} + \frac{1}{2n}\sum_{r=1}^{n}\big[H^2(4\sin^2\delta\coth\gamma\sinh^2 2H' + 4\cos\delta\sinh^2 2H'\coth 2H) \\ &\qquad + 2HH'\frac{4\sin^2\delta}{\sinh\gamma\sinh 2H} + H'^2 4\sin^2\delta^2\coth\gamma\,\big] \\ &= -\frac{2H^2}{\sinh^2 2H} + \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}\big[(H\sinh 2H')^2(2\sin^2\delta\coth\gamma + 2\cos\delta\coth 2H) \\ &\qquad + 2HH'\sinh 2H'(2\sin^2\delta\,\mathrm{cosech}\,\gamma) + H'^2(2\sin^2\delta\coth\gamma)\,\big] \\ &= -\frac{2H^2}{\sinh^2 2H} + \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}\big[(H' + H\sinh 2H')^2(2\sin^2\delta\coth\gamma) + (H\sinh 2H')^2(2\cos\delta\coth 2H) \\ &\qquad - 4HH'\sinh 2H'\sin^2\delta(\coth\gamma - \,\mathrm{cosech}\,\gamma)\,\big]\end{aligned} \tag{24}$$

となる．

ここで，双曲余弦定理 (O-89a) から

$$\cosh\gamma = \cosh^2 2H' - \sinh^2 2H'\cos\omega = \sinh^2 2H' + 1 - \sinh^2 2H'\cos\omega,,$$

すなわち，

$$\cosh\gamma - 1 = \sinh^2 2H'(1 - \cos\omega),$$

となるので，

$$\sinh^2\frac{\gamma}{2} = \sinh^2 2H'\sin^2\frac{\omega}{2}$$

から，

$$\sinh\frac{\gamma}{2} = \sinh 2H'\sin\frac{\omega}{2} \tag{25}$$

すなわち，

$$\mathrm{cosech}\,\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{\sinh 2H'}\,\mathrm{cosec}\,\frac{\omega}{2} = \sinh 2H\,\mathrm{cosec}\,\frac{(r-\frac{1}{2})\pi}{n} \tag{26}$$

とすることができる．ただし，$\omega/2 = \omega_{2r-1}/2 = (r-\frac{1}{2})\pi/n$ を用いた．

次に，式 (O-17) の $\cosh 2H \tanh 2H^* = 1$ と $H^* = H'$ から，

$$\sinh 2H' \cosh 2H = \cosh 2H' \tag{27}$$

が成り立つ．

また，

$$\coth\gamma - \operatorname{cosech}\gamma = \frac{\cosh\gamma - 1}{\sinh\gamma} = \frac{\sinh^2\frac{\gamma}{2}}{\sinh\frac{\gamma}{2}\cosh\frac{\gamma}{2}} = \tanh\frac{\gamma}{2} \tag{28}$$

と変形することができる．

式 (27)，(28) を式 (24) に代入することにより，

$$\begin{aligned}\frac{C}{nNk_{\mathrm{B}}} = -\frac{2H^2}{\sinh^2 2H} + \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}\big[&(H' + H\sinh 2H')^2(2\sin^2\delta\coth\gamma)\\ &- 4HH'\sinh 2H'\sin^2\delta\tanh\frac{\gamma}{2} + 2H^2\sinh 2H'\cosh 2H'\cos\delta\,\big]\end{aligned} \tag{29}$$

となる．この式は，式 (26) を用いることにより，

$$\begin{aligned}\frac{C}{nNk_{\mathrm{B}}} = -2H^2\sinh^2 2H' &+ (H' + H\sinh 2H')^2\sinh 2H\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}\operatorname{cosec}\frac{(r-\frac{1}{2})\pi}{n}\\ &+ \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}\Big[(H' + H\sinh 2H')^2(2\sin^2\delta_{2r-1}\coth\gamma_{2r-1} - \operatorname{cosech}\frac{\gamma_{2r-1}}{2})\\ &- 4HH'\sinh 2H'\sin^2\delta_{2r-1}\tanh\frac{\gamma_{2r-1}}{2} + H^2\sinh 4H'\cos\delta_{2r-1}\,\Big]\end{aligned} \tag{O-125}$$

と変形することができる．

上式の第 2 の総和は周期 $\omega_{2r-1}/2$ の周期関数の総和である．総和内の第 1 項は，coth および cosec という発散する関数を含んでいるが，両者の差となることにより，発散が解消されている．したがって，第 2 の総和は普通の積分計算が可能である．積分値と総和の差は，総和の前の n^{-1} と差分のオーダー $2/n$ から，n^{-2} である．

最初に，総和として残った第 1 項

$$S_1 = \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}\operatorname{cosec}\frac{(r-\frac{1}{2})\pi}{n} \tag{30}$$

を計算しよう．この項は積分しても発散する．まず，次の三角関数の部分展開を考える（[4] の p.66）．

$$\begin{aligned}\pi\operatorname{cosec}\pi x &= \frac{1}{x} + \sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^r 2x}{x^2 - r^2}\\ &= \frac{1}{x} + \sum_{r=1}^{\infty}(-1)^r\left(\frac{1}{x+r} + \frac{1}{x-r}\right)\\ &= \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\left(\frac{1}{x+r} - \frac{1}{x-r-1}\right)\end{aligned} \tag{31}$$

第 3 式は，括弧内の総和の第 1 項と第 2 項を 1 つずらすことによって得られる．ここで，$x = (2s-1)/2n$ と

おく．そうすると，

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{1}{x}=2n\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)$$

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{1}{x+r}=2n\left(\frac{1}{2nr+1}+\frac{1}{2nr+3}+\cdots+\frac{1}{2nr+2n-1}\right) \tag{32}$$

$$\begin{aligned}\sum_{s=1}^{n}\frac{1}{x-r-1}&=\sum_{s=n}^{1}\frac{1}{x-r-1}\\&=-2n\left(\frac{1}{2nr+1}+\frac{1}{2nr+3}+\cdots+\frac{1}{2nr+2n-1}\right)=-\sum_{s=1}^{n}\frac{1}{x+r}\end{aligned} \tag{33}$$

という関係式が成り立つことがわかる．式 (32)，(33) を式 (31) に代入することにより，

$$\begin{aligned}\sum_{s=1}^{n}\pi\operatorname{cosec}\pi x&=\sum_{s=1}^{n}\sum_{r=0}^{\infty}2\frac{(-1)^r}{x+r}\\&=\sum_{r=0}^{\infty}4n(-1)^r\left(\frac{1}{2nr+1}+\frac{1}{2nr+3}+\cdots+\frac{1}{2nr+2n-1}\right)\end{aligned} \tag{34}$$

と表すことができる．

ここで，ディガンマ関数 $\psi(z)$ の次のような関係式を注目しよう．

$$\psi(z+1)=\frac{1}{z}+\psi(z) \tag{35}$$

この式を $\psi(n+\frac{1}{2})$ に順次適用すると，

$$\begin{aligned}\psi(n+\tfrac{1}{2})&=\frac{2}{2n-1}+\psi(n-\tfrac{1}{2})\\&=\frac{2}{2n-1}+\frac{2}{2n-3}+\psi(n-\tfrac{3}{2})=\cdots\\&=2\left(\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n-3}+\cdots+\frac{1}{3}+\frac{1}{1}\right)+\psi(\tfrac{1}{2})\end{aligned}$$

となり，さらに，

$$\psi(rn+\tfrac{1}{2})=2\left(\frac{1}{2rn-1}+\cdots+\frac{1}{3}+\frac{1}{1}\right)+\psi(\tfrac{1}{2}) \tag{36}$$

$$\psi((r+1)n+\tfrac{1}{2})=2\left(\frac{1}{2(r+1)n-1}+\cdots+\frac{1}{3}+\frac{1}{1}\right)+\psi(\tfrac{1}{2}) \tag{37}$$

という関係が得られる．式 (37) から式 (36) を引いて，

$$\psi((r+1)n+\tfrac{1}{2})-\psi(rn+\tfrac{1}{2})=2\left(\frac{1}{2(r+1)n-1}+\cdots+\frac{1}{2rn+1}\right) \tag{38}$$

となる．この式の右辺を式 (34) と比較して，

$$\frac{1}{n}\sum_{s=1}^{n}\operatorname{cosec}\pi x=\frac{2}{\pi}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\left\{\psi((r+1)n+\tfrac{1}{2})-\psi(rn+\tfrac{1}{2})\right\} \tag{39}$$

という関係が得られる．

一方，ディガンマ関数は次のように漸近展開することができる[1]．

$$\psi(z) = \ln(z - \tfrac{1}{2}) + O(z^{-2}) \tag{40}$$

したがって，式 (39) 右辺のディガンマ関数は

$$\psi((r+1)n + \tfrac{1}{2}) - \psi(rn + \tfrac{1}{2}) = \ln((r+1)n) - \ln(rn) + O(n^{-2}) = \ln\frac{r+1}{r} + O(n^{-2}) \tag{41}$$

とすることができる．これを式 (39) の総和に適用しよう．まず，$r = 0$ の場合は，第 1 項のみに式 (40) を適用して，

$$\psi(n + \tfrac{1}{2}) - \psi(\tfrac{1}{2}) = \ln(n) - \psi(\tfrac{1}{2}) + O(n^{-2}) \tag{42}$$

となる．総和の $r = 1$ 以降に式 (41) を適用すると，式 (41) の最後の式の対数の引数の分数部分の分子分母が交互に逆転することに注意すると，

$$\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^r \left\{\psi((r+1)n + \tfrac{1}{2}) - \psi(rn + \tfrac{1}{2})\right\} = \sum_{r=1}^{\infty}(-1)^r \ln\frac{r+1}{r} = -\ln\left(\frac{2}{1}\frac{2}{3}\frac{4}{3}\frac{4}{5}\cdots\right) \tag{43}$$

となる．この式は次の Wallis の公式（[4], p.84）

$$\prod_{r=1}^{\infty}\frac{2r}{2r-1}\frac{2r}{2r+1} = \frac{\pi}{2} \tag{44}$$

の対数である．したがって，

$$\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^r \left\{\psi((r+1)n + \tfrac{1}{2}) - \psi(rn + \tfrac{1}{2})\right\} = -\ln\frac{\pi}{2} \tag{45}$$

となる．式 (39)，式 (42)，式 (45) および $\psi(\tfrac{1}{2}) = -2\ln 2 - C_E$ から（[5], p.11），

$$\begin{aligned} S_1 = \frac{1}{n}\sum_{s=1}^{n} \operatorname{cosec}\pi x &= \frac{2}{\pi}(\ln n + 2\ln 2 + C_E - \ln\frac{\pi}{2}) + O(n^{-2}) \\ &= \frac{2}{\pi}(\ln\frac{8n}{\pi} + C_E) + O(n^{-2}) \end{aligned} \tag{46}$$

という関係式が得られる．C_E は通常 $\gamma = 0.5772\cdots$ で表されるところのオイラーの定数である．

＊　＊　＊　＊　＊

[1] [5], p. 12 の $\psi(z)$ の漸近展開を次のように変形する．

$$\begin{aligned} \psi(z) &\sim \ln z - \frac{1}{2z} - \frac{1}{12z^2} + \frac{1}{120z^4} + \cdots \\ &= \ln(z - \tfrac{1}{2}) + \ln\frac{z}{z - \frac{1}{2}} - \frac{1}{2z} - \frac{1}{12z^2} + \frac{1}{120z^4} + \cdots \\ &= \ln(z - \tfrac{1}{2}) + \ln\left(1 + \frac{1}{2(z - \frac{1}{2})}\right) - \frac{1}{2z} - \frac{1}{12z^2} + \frac{1}{120z^4} + \cdots \\ &= \ln(z - \tfrac{1}{2}) + \left(\frac{1}{2z}(1 - \frac{1}{4z})^{-1} - \frac{1}{8z^2}(1 - \frac{1}{4z})^{-2} + \frac{1}{24z^3}(1 - \frac{1}{4z})^{-3} + \cdots\right) - \frac{1}{2z} - \frac{1}{12z^2} + \frac{1}{120z^4} + \cdots \\ &= \ln(z - \tfrac{1}{2}) + \left(\frac{1}{2z} + \frac{1}{96z^3} + \frac{1}{64z^4} + \cdots\right) - \frac{1}{2z} - \frac{1}{12z^2} + \frac{1}{120z^4} + \cdots \\ &= \ln(z - \tfrac{1}{2}) - \frac{1}{12z^2} + \frac{1}{96z^3} + \frac{23}{960z^4} + \cdots \end{aligned}$$

式 (O-125) の第 1 の総和は式 (46) により求められる．一方，第 2 の総和は積分により求めることになる．積分するのは,

$$2\sin^2\delta_{2r-1}\coth\gamma_{2r-1} - \operatorname{cosech}\frac{\gamma_{2r-1}}{2} \tag{47}$$

$$\sin^2\delta_{2r-1}\tanh\frac{\gamma_{2r-1}}{2} \tag{48}$$

$$\cos\delta_{2r-1} \tag{49}$$

である．この積分には APPENDIX で与えられている式 (5.1) を用いる．臨界点の場合であるから，$\sinh 2H'\sinh 2H = 1$ となり, ヤコビの楕円関数の母数は $k=1$，補母数は $k'=0$ である．ヤコビの楕円関数の説明は APPENDIX にあるので，詳しい説明はその節に回して，ここではそれを利用することにしよう．

最初に式 (49) から始める．

$\omega_{2r-1} = (2r-1)\pi/n$ であるから，積分では $2\pi/n \to \mathrm{d}\omega$ となることと，式 (O-5.1) と (O-5.2)，およびヤコビのツェータ関数 $Z(u,k)$ で $Z(u,0)=0$ であること (式 (112)) を用いて,

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}\cos\delta_{2r-1} &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\delta\,\mathrm{d}\omega\\ &= \frac{1}{\pi}(-2\mathrm{i}K)(k\,\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a)\coth 2H' - Z(\mathrm{i}a)\coth 2H')\\ &= -\frac{2\mathrm{i}K}{\pi}\{\,\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a)\coth 2H' - \coth 2H'[\,\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{sc}\,(\mathrm{i}a) - \frac{\mathrm{i}\pi a}{2KK'}]\}\end{aligned} \tag{50}$$

となる．式 (O-2.2a, b) から $\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a) = \mathrm{i}\sinh 2H'$，$\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a) = \cosh 2H'$，$\mathrm{sc}\,(\mathrm{i}a) = \mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a)/\,\mathrm{cn}\,(\mathrm{i}a) = \mathrm{i}\sinh 2H'/\cosh 2H'$ であるから,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\delta\,\mathrm{d}\omega &= -\frac{2\mathrm{i}K}{\pi}\{\mathrm{i}\sinh 2H'\coth 2H' - \coth 2H'[\cosh 2H'(\mathrm{i}\sinh 2H'/\cosh 2H') - \frac{\mathrm{i}\pi a}{2KK'}]\\ &= \frac{2K}{\pi}\{\cosh 2H' - \cosh 2H' + \cosh 2H'\frac{\pi a}{2KK'}\} = \cosh 2H'\frac{a}{K'}\end{aligned} \tag{51}$$

となる．$k=1$ で K は発散するが，第 1 項と第 2 項が相殺するために発散が消える．また $k=1$ で $\mathrm{sn}\,u = \tanh u$ であるから，$\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a) = \tanh(\mathrm{i}a) = \mathrm{i}\tan a$ であり，一方，式 (O-2.2) から [2] $\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a) = \mathrm{i}\sinh 2H'$ であるから，$\tan a = \sinh 2H'$ となり，グーデルマン関数の定義により，$a = \mathrm{gd}\,2H'$ である．さらに，$K' = K(0) = \pi/2$ である．以上を代入すると,

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\delta\,\mathrm{d}\omega = \frac{2}{\pi}\cosh 2H'\,\mathrm{gd}\,2H' \tag{52}$$

となる．

* * * * *

次に，式 (48) の積分を考える．

式 (50) の場合と同様に,

$$\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}\sin^2\delta_{2r-1}\tanh\frac{\gamma_{2r-1}}{2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^2\delta\tanh\frac{\gamma}{2}\,\mathrm{d}\omega \tag{53}$$

と積分に変換できる．ここで,

$$\coth\gamma - \frac{1}{\sinh\gamma} = \frac{\cosh\gamma - 1}{\sinh\gamma} = \frac{2\sinh^2\frac{\gamma}{2}}{2\sinh\frac{\gamma}{2}\cosh\frac{\gamma}{2}} = \tanh\frac{\gamma}{2} \tag{54}$$

[2] 臨界点であるから，$H^* = H'$，$k=1$ となり式 (O-2.2a) と式 (O-2.2b) は等しくなる．

とすることができるから，

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^2\delta\tanh\frac{\gamma}{2}\,\mathrm{d}\omega=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^2\delta\coth\gamma\,\mathrm{d}\omega-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^2\delta\,\mathrm{cosech}\,\gamma\,\mathrm{d}\omega \tag{55}$$

となる．この 2 つの積分は，いまは $\delta'=\delta^*=\delta$ であるから，式 (O-5.1) で与えられる．$K=\infty$ であるが，しばらくそのまま残しておくことにすると，

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^2\delta\coth\gamma\,\mathrm{d}\omega&=\frac{1}{\pi}\frac{1}{\sinh^2 2H'}\{-2\mathrm{i}KZ(\mathrm{i}a)\}\\&=-\frac{2\mathrm{i}}{\sinh^2 2H'}\{K\,\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{sc}\,(\mathrm{i}a)-\frac{\mathrm{i}\pi a}{2K'}\}\\&=-\frac{2\mathrm{i}}{\pi\sinh^2 2H'}\{K\cosh 2H'\frac{\mathrm{i}\sinh 2H'}{\cosh 2H'}-\mathrm{i}\,\mathrm{gd}\,2H'\}\\&=\frac{2}{\pi}\frac{K}{\sinh 2H'}-\frac{2}{\pi}\frac{1}{\sinh^2 2H'}\,\mathrm{gd}\,2H'\end{aligned} \tag{56}$$

および

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^2\delta\frac{1}{\sinh\gamma}\,\mathrm{d}\omega&=\frac{1}{\pi}2(K-E)\frac{\mathrm{i}}{k\,\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a)}\\&=\frac{2}{\pi}(K-E)\frac{1}{\sinh 2H'}\end{aligned} \tag{57}$$

となるから，式 (55) に代入することにより，

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^2\delta\tanh\frac{\gamma}{2}\,\mathrm{d}\omega&=\frac{2}{\pi}\frac{K}{\sinh 2H'}-\frac{2}{\pi}\frac{1}{\sinh^2 2H'}\,\mathrm{gd}\,2H'-\frac{2}{\pi}(K-E)\frac{1}{\sinh 2H'}\\&=\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{\sinh 2H'}-\frac{1}{\sinh^2 2H'}\,\mathrm{gd}\,2H'\right)\end{aligned} \tag{58}$$

が得られる．ただし，$E=E(1)=1$ を用いた．

* * * * *

最後に，式 (47) の積分の計算をしよう．そのため，式 (47) を次のように変形する．

$$\begin{aligned}2\sin^2\delta\coth\gamma-\,\mathrm{cosech}\,\frac{\gamma}{2}&=2\sin^2\delta\frac{\cosh^2\frac{\gamma}{2}+\sinh^2\frac{\gamma}{2}}{2\sinh\frac{\gamma}{2}\cosh\frac{\gamma}{2}}-\frac{1}{\sinh\frac{\gamma}{2}}\\&=\sin^2\delta\frac{\sinh\frac{\gamma}{2}}{\cosh\frac{\gamma}{2}}+\frac{\sin^2\delta\cosh\frac{\gamma}{2}-1}{\sinh\frac{\gamma}{2}}\\&=\sin^2\delta\tanh\frac{\gamma}{2}+\frac{(1-\cos^2\delta)\cosh\frac{\gamma}{2}-1}{\sinh\frac{\gamma}{2}}\end{aligned} \tag{59}$$

最後の式の第 1 項はすでに積分を求めた．第 2 項の変形をするまえに，$\cos\delta$ の式を求めておこう．臨界点，すなわち $\delta'=\delta^*=\delta$，$2H^*=2H'$ における双曲第二余弦定理 (O-89b) から，

$$\sinh\gamma\cos\delta=\sinh 2H'\cosh 2H'(1-\cos\omega) \tag{60}$$

となるから，式 (25) を用いて，

$$\cos\delta=\frac{\sinh 2H'\cosh 2H'\sin^2\frac{\omega}{2}}{\sinh\frac{\gamma}{2}\cosh\frac{\gamma}{2}}=\frac{\cosh 2H'\sin\frac{\omega}{2}}{\cosh\frac{\gamma}{2}} \tag{61}$$

となる．したがって，式 (59) の第 2 項は式 (61) を代入することにより，

$$
\begin{aligned}
\frac{(1-\cos^2\delta)\cosh\frac{\gamma}{2}-1}{\sinh\frac{\gamma}{2}} &= \frac{\cosh\frac{\gamma}{2}-1-\cos^2\delta\cosh\frac{\gamma}{2}}{\sinh\frac{\gamma}{2}} \\
&= \frac{\cosh\frac{\gamma}{2}-1}{\sinh\frac{\gamma}{2}} - \left(\frac{\cosh 2H'\sin\frac{\omega}{2}}{\cosh\frac{\gamma}{2}}\right)^2 \frac{\cosh\frac{\gamma}{2}}{\sinh\frac{\gamma}{2}} \\
&= \frac{2\sinh^2\frac{\gamma}{4}}{2\sinh\frac{\gamma}{4}\cosh\frac{\gamma}{4}} - \frac{\cosh^2 2H'\sin\frac{\omega}{2}}{\cosh\frac{\gamma}{2}\sinh 2H'} \\
&= \tanh\frac{\gamma}{4} - \frac{\cosh^2 2H'}{\sinh^2 2H'}\frac{\sinh 2H'\sin\frac{\omega}{2}}{\cosh\frac{\gamma}{2}} \\
&= \tanh\frac{\gamma}{4} - \frac{\cosh^2 2H'}{\sinh^2 2H'}\tanh\frac{\gamma}{2} \qquad (62)
\end{aligned}
$$

となる．途中の変形で，式 (25) を用いた．

次に，双曲三角形の 2 辺 γ と $2H'$ とその間の角 δ に対して双曲余弦定理 (O-89a) を用いると，

$$
\cosh 2H' = \cosh\gamma\cosh 2H' - \sinh\gamma\sinh 2H'\cos\delta \qquad (63)
$$

となる．この式を以下のように順次変形して，

$$
\begin{aligned}
\cosh 2H'(\cosh\gamma-1) &= \sinh\gamma\sinh 2H'\cos\delta \\
\cosh 2H'\sinh^2\frac{\gamma}{2} &= \sinh\frac{\gamma}{2}\cosh\frac{\gamma}{2}\sinh 2H'\cos\delta
\end{aligned}
$$

結局，

$$
\tanh\frac{\gamma}{2} = \tanh 2H'\cos\delta \qquad (64)
$$

という関係式が得られる．

式 (59) と式 (62) および式 (64) を合わせると，結局，

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}\left(2\sin^2\delta_{2r-1}\coth\gamma_{2r-1} - \operatorname{cosech}\frac{\gamma_{2r-1}}{2}\right) \\
=&\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(2\sin^2\delta\coth\gamma - \operatorname{cosech}\frac{\gamma}{2}\right)\mathrm{d}\omega \\
=&\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^2\delta\tanh\frac{\gamma}{2}\,\mathrm{d}\omega + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\tanh\frac{\gamma}{4}\,\mathrm{d}\omega - \frac{\cosh^2 2H'}{\sinh^2 2H'}\tanh 2H'\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\delta\,\mathrm{d}\omega \qquad (65)
\end{aligned}
$$

という積分に分割することができる．

式 (65) の第 1 項と第 3 項の積分はそれぞれ，式 (58) と式 (51) で与えられる．第 2 項は，式 (O-5.1) の積分は利用できないので，実際に積分を実施しないといけない．被積分関数は γ の関数であるのに対し，積分変数は ω であるから，変数を変換する必要がある．

まず，双曲余弦定理 (O-89a) を ω で微分することにより，

$$
\sinh\gamma\frac{\partial\gamma}{\partial\omega} = \sinh^2 2H'\sin\omega \qquad (66)
$$

となる．次に，双曲正弦定理 (O-89c) から

$$
\sin\omega = \sinh\gamma\frac{\sin\delta}{\sinh 2H'} \qquad (67)
$$

となるので，これを式 (66) に代入すると，

$$
\frac{\partial\gamma}{\partial\omega} = \sinh 2H'\sin\delta \qquad (68)
$$

となる．これを用いて，式 (65) の第 2 項の積分を以下のように変形する．

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\tanh\frac{\gamma}{4}\,\mathrm{d}\omega =&\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\tanh\frac{\gamma}{4}}{\sinh 2H'\sin\delta}\frac{\partial\gamma}{\partial\omega}\,\mathrm{d}\omega\\ =&\frac{1}{\pi\sinh 2H'}\int_0^{4H'}\frac{\tanh\frac{\gamma}{4}}{\sin\delta}\,\mathrm{d}\gamma\end{aligned} \tag{69}$$

これにより，積分の変数が ω から γ に変換される．

この積分を計算するために，式 (61) に式 (25) を代入して得られる

$$\cos\delta = \frac{\cosh 2H'\sinh\frac{\gamma}{2}}{\sinh 2H'\cosh\frac{\gamma}{2}} \tag{70}$$

という関係を用いて，まず，

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sin\delta} &= \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\delta}}\\ &= \frac{\sinh 2H'\cosh\frac{\gamma}{2}}{\sqrt{\sinh^2 2H'\cosh^2\frac{\gamma}{2}-\cosh^2 2H'\sinh^2\frac{\gamma}{2}}}\\ &= \frac{\sinh 2H'\cosh\frac{\gamma}{2}}{\sqrt{\sinh^2 2H'-\sinh^2\frac{\gamma}{2}}}\end{aligned} \tag{71}$$

という式を得ておこう．

さらに，$\tanh\gamma/4$ を

$$\tanh\frac{\gamma}{4} = \frac{\cosh\frac{\gamma}{2}-1}{\sinh\frac{\gamma}{2}} \tag{72}$$

と表す．式 (71)，(72) を式 (70) に代入すれば，γ の関数に関する積分になる．

積分範囲は双曲三角形を考慮すると得られる．γ すなわち双曲三角形の ω の対辺は，他の 2 辺が $2H^* = 2H'$ であるから，$\omega = 0$ で $\gamma = 0$，$\omega = \pi$ で $\gamma = 4H'$ となることがわかる．ω の積分範囲は 0 から π までであるので，γ の積分範囲は 0 から $4H'$ までとなる．

式 (69) に式 (71) と式 (72) を代入し，途中，$\sinh\gamma/2 = x$ と変数変換し，$\cosh\gamma/2\,\mathrm{d}\gamma = 2\,\mathrm{d}x$，$\sinh 2H' = a$ とおけば (a はここだけの定数)，x の積分範囲は 0 から a となる．次いで，$x^2 = u$ と変数変換し，積分範囲を 0 から a^2 として，変形すると，式 (69) の右辺の積分は，

$$\begin{aligned}\int_0^{4H'}\frac{\tanh\frac{\gamma}{4}}{\sin\delta}\,\mathrm{d}\gamma &= \int_0^{4H'}\frac{\cosh\frac{\gamma}{2}-1}{\sinh\frac{\gamma}{2}}\frac{\sinh 2H'\cosh\frac{\gamma}{2}}{\sqrt{\sinh^2 2H'-\sinh^2\frac{\gamma}{2}}}\,\mathrm{d}\gamma\\ &= 2a\int_0^a\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x\\ &= 2a\int_0^a\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}(\sqrt{x^2+1}+1)}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{2}{a}\int_0^a\left(\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{a^2-x^2}}+\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{(\sqrt{x^2+1}+1)}\right)x\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{a}\int_0^{a^2}\left(\frac{\sqrt{u+1}-1}{\sqrt{a^2-u}}+\frac{\sqrt{a^2-u}}{(\sqrt{u+1}+1)}\right)\mathrm{d}u\\ &= \frac{1}{a}\int_0^{a^2}\sqrt{\frac{u+1}{a^2-u}}\,\mathrm{d}u-\frac{1}{a}\int_0^{a^2}\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{a^2-u}}+\frac{1}{a}\int_0^{a^2}\frac{\sqrt{a^2-u}}{(\sqrt{u+1}+1)}\,\mathrm{d}u\end{aligned} \tag{73}$$

という 3 つの積分に分けられる．

式 (73) の最初の積分は，[3]

$$
\begin{aligned}
\int_0^{a^2}\sqrt{\frac{u+1}{a^2-u}}\,\mathrm{d}u &= 2(a^2+1)\int_{1/a}^{\infty}\left\{\frac{1}{1+t^2}-\frac{1}{(1+t^2)^2}\right\}\mathrm{d}t \\
&= 2(a^2+1)\left\{\Big[\tan^{-1}t\Big]_{1/a}^{\infty}-\left[\frac{t}{2(t^2+1)}+\tan^{-1}t\right]_{1/a}^{\infty}\right\} \\
&= 2(a^2+1)\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\frac{1}{a}\right)+\frac{a}{2(a^2+1)}\right\} \\
&= \cosh^2 2H'\,\mathrm{gd}\,2H'+\sinh 2H' \qquad (74)
\end{aligned}
$$

となる．ただし，$\pi/2-\tan^{-1}1/a=\ \mathrm{gd}\,2H'$ である[4]．

式 (73) の第 2 項の積分はすぐに得られて，

$$
\int_0^{a^2}\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{a^2-u}}=\Big[-2\sqrt{a^2-u}\Big]_0^{a^2}=2a=2\sinh 2H' \qquad (75)
$$

となる．

式 (73) の第 3 項の積分は，

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{a^2}\frac{\sqrt{a^2-u}}{(\sqrt{u+1}+1)}\,\mathrm{d}u \\
=&2\left[-\frac{a}{2}+\frac{1+a^2}{2}\frac{\pi}{2}-\frac{1+a^2}{2}\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\right] \\
&\quad -2\left[-a+\frac{\pi}{2}-\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}+a\ln\frac{\sqrt{1+a^2}+1}{2(\sqrt{1+a^2}+1+a^2)}-a\ln\frac{1}{2+a^2+a^2}\right] \\
=&a+(1+a^2)\frac{\pi}{2}-\pi-\{(1+a^2)-2\}\sin^{-1}\frac{1}{\cosh 2H'}-2a\ln\frac{1}{2\cosh 2H'}+2a\ln\frac{1}{2\cosh^2 2H'} \\
=&\sinh 2H'+\frac{\pi}{2}\cosh^2 2H'-\pi-(\sinh^2 2H'-1)\,\mathrm{gd}\,2H-2\sinh 2H'\ln\cosh 2H' \qquad (76)
\end{aligned}
$$

---

[3] この積分では，$\sqrt{\dfrac{u+1}{a^2-u}}=t$ とおく．そうすると，$u=\dfrac{a^2t^2-1}{t^2+1}$ から，$\mathrm{d}u=\dfrac{2(a^2+1)t}{(t^2+1)^2}\mathrm{d}t$ となり，積分範囲は $1/a$ から ∞ までとなる．そうすると，数学公式 I（[6] の p.78）より，

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{a}\int_0^{a^2}\sqrt{\frac{u+1}{a^2-u}}\,\mathrm{d}u &= 2(a^2+1)\int_{1/a}^{\infty}\left\{\frac{1}{1+t^2}-\frac{1}{(1+t^2)^2}\right\}\mathrm{d}t \\
&= 2(a^2+1)\left\{\big[\tan^{-1}t\big]_{1/a}^{\infty}-\left[\frac{t}{2(t^2+1)}\tan^{-1}t\right]_{1/a}^{\infty}\right\}
\end{aligned}
$$

となる．

[4]

$$
\tan^{-1}\frac{1}{\sinh 2H'}=\theta
$$

とおく．そうすると，

$$
\tan(\frac{\pi}{2}-\theta)=\sinh 2H'
$$

となり，定義により，$\frac{\pi}{2}-\theta=\ \mathrm{gd}\,2H'$ となる．

となる[5]．ただし，$\sin^{-1}(1/\cosh 2H') = \mathrm{gd}\,2H$ である[6]．

式 (74)，(75)，(76) を式 (73) に代入することにより，

$$\begin{aligned}
\int_0^{4H'} \frac{\tanh\frac{\gamma}{4}}{\sin\delta}\,\mathrm{d}\gamma &= \frac{1}{\sinh 2H'}\{\cosh^2 2H'\,\mathrm{gd}\,2H' + \sinh 2H' - 2\sinh 2H' \\
&\quad + \sinh 2H' + \frac{\pi}{2}\cosh^2 2H' - \pi - (\sinh^2 2H' - 1)\,\mathrm{gd}\,2H - 2\sinh 2H' \ln\cosh 2H'\} \\
&= \frac{1}{\sinh 2H'}\{\cosh^2 2H'\,\mathrm{gd}\,2H' + \frac{\pi}{2}\cosh^2 2H' - \pi - (2\sinh^2 2H' - \cosh^2 2H')\,\mathrm{gd}\,2H \\
&\quad - 2\sinh 2H' \ln\cosh 2H'\} \\
&= \frac{1}{\sinh 2H'}\{\cosh^2 2H'(\,\mathrm{gd}\,2H' + \frac{\pi}{2} + \,\mathrm{gd}\,2H) - \pi - 2\sinh^2 2H'\,\mathrm{gd}\,2H - 2\sinh 2H' \ln\cosh 2H'\} \\
&= \frac{1}{\sinh 2H'}\{\pi\cosh^2 2H' - \pi - 2\sinh^2 2H'\,\mathrm{gd}\,2H - 2\sinh 2H' \ln\cosh 2H'\} \\
&= \frac{1}{\sinh 2H'}\{\sinh^2 2H'(\frac{\pi}{2} - \,\mathrm{gd}\,2H) + \pi - \pi\} - 2\sinh 2H' \ln\cosh 2H' \\
&= 2\sinh 2H'\,\mathrm{gd}\,2H' - 2\ln\cosh 2H' \qquad (77)
\end{aligned}$$

となるので，最終的に

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \tanh\frac{\gamma}{4}\,\mathrm{d}\omega = \frac{2}{\pi}\left(\,\mathrm{gd}\,2H' - \frac{1}{\sinh 2H'}\ln\cosh 2H'\right) \qquad (78)$$

が得られる．

式 (65) の積分に式 (58)，(78)，(52) を代入すると，

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(2\sin^2\delta\coth\gamma - \,\mathrm{cosech}\,\frac{\gamma}{2}\right)\mathrm{d}\omega \\
=&\frac{2}{\pi}\left\{\left(\frac{1}{\sinh 2H'} - \frac{1}{\sinh^2 2H'}\,\mathrm{gd}\,2H'\right) + \left(\,\mathrm{gd}\,2H' - \frac{1}{\sinh 2H'}\ln\cosh 2H'\right) - \frac{\cosh^2 2H'}{\sinh^2 2H'}\,\mathrm{gd}\,2H'\right\} \qquad (79)
\end{aligned}$$

となる．

---

[5] この積分では，$\sqrt{u+1}+1 = v$ とおく．そうすると，$u = (v-1)^2 - 1$ から，$\mathrm{d}u = 2(v-1)\,\mathrm{d}v$ となり，積分範囲は 2 から $b = \sqrt{a^2+1}+1$ までとなる．そうすると，

$$\begin{aligned}
\int_0^{a^2} \frac{\sqrt{a^2-u}}{(\sqrt{u+1}+1)}\,\mathrm{d}u &= \int_2^b \frac{\sqrt{a^2+2v-v^2}}{v}2(v-1)\,\mathrm{d}v \\
&= 2\left\{\int_2^b \sqrt{a^2+2v-v^2}\,\mathrm{d}v - \int_2^b \frac{\sqrt{a^2+2v-v^2}}{v}\,\mathrm{d}v\right\}
\end{aligned}$$

となる．この積分は数学公式 I（[6] の p.122）により次のような結果を得る．

$$\int_2^b \sqrt{a^2+2v-v^2}\,\mathrm{d}v = \left[\frac{2v-2}{4}\sqrt{a^2+2v-v^2} - \frac{1+a^2}{2}\sin^{-1}\frac{1-v}{\sqrt{1+a^2}}\right]_2^b$$

$$\int_2^b \frac{\sqrt{a^2+2v-v^2}}{v}\,\mathrm{d}v = \left[\sqrt{a^2+2v-v^2} - \sin^{-1}\frac{1-v}{\sqrt{1+a^2}} + a\ln\left(\frac{v}{2(v+a^2+\sqrt{a^2(a^2+2v-v^2)})}\right)\right]_2^b$$

[6]

$$\sin^{-1}\frac{1}{\cosh 2H'} = \theta$$

とおくと，

$$\sin\theta = \cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \,\mathrm{sech}\,2H'$$

となり，定義により，

$$\frac{\pi}{2} - \theta = \,\mathrm{gd}\,2H'$$

となる．すなわち，

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \,\mathrm{gd}\,2H' = \frac{\pi}{2} - \,\mathrm{gd}\,2H^* = \,\mathrm{gd}\,2H$$

である．

以上の積分結果を用いて，式 (O-125) 右辺の 2 つめ総和を積分に変換してから式 (52)，(58)，および式 (79) をその部分に代入すると，

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}\Big[(H'+H\sinh 2H')^2(2\sin^2\delta_{2r-1}\coth\gamma_{2r-1}-\operatorname{cosech}\frac{\gamma_{2r-1}}{2})\\
&\qquad -4HH'\sinh 2H'\sin^2\delta_{2r-1}\tanh\frac{\gamma_{2r-1}}{2}+H^2\sinh 4H'\cos\delta_{2r-1}\,\Big]\\
=&(H'+H\sinh 2H')^2\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\Big(2\sin^2\delta\coth\gamma-\operatorname{cosech}\frac{\gamma}{2}\Big)\,\mathrm{d}\omega\\
&\qquad -4HH'\sinh 2H'\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^2\delta\tanh\frac{\gamma}{2}\,\mathrm{d}\omega+H^2\sinh 4H'\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\delta\,\mathrm{d}\omega\\
=&\frac{2}{\pi}\Bigg[(H'+H\sinh 2H')^2\left(\frac{1}{\sinh 2H'}-\frac{1}{\sinh^2 2H'}\operatorname{gd}2H'+\operatorname{gd}2H'-\frac{1}{\sinh 2H'}\ln\cosh 2H'-\frac{\cosh^2 2H'}{\sinh^2 2H'}\operatorname{gd}2H'\right)\\
&\qquad -4HH'\sinh 2H'\left(\frac{1}{\sinh 2H'}-\frac{1}{\sinh^2 2H'}\operatorname{gd}2H'\right)+H^2\sinh 4H'\cosh 2H'\operatorname{gd}2H'\Bigg]\\
=&\frac{2}{\pi}[\sinh 2H(H'-H\sinh 2H')^2-\sinh^2 2H(H'-H\sinh 2H')^2\operatorname{gd}2H'-\sinh 2H\ln\cosh 2H'\\
&\qquad -\sinh^2 2H(H'+H\sinh 2H')^2\operatorname{gd}2H'+2H^2\cosh^2 2H'\operatorname{gd}2H']\\
=&\frac{2}{\pi}[\sinh 2H(H'-H\sinh 2H')^2-\sinh^2 2H(2H'^2+2H^2\sinh^2 2H')\operatorname{gd}2H'-\sinh 2H\ln\cosh 2H'\\
&\qquad +2H^2\cosh^2 2H'\operatorname{gd}2H']\\
=&\frac{2}{\pi}[\sinh 2H(H'-H\sinh 2H')^2-2(H'\sinh 2H)^2\operatorname{gd}2H'+2(H\sinh 2H')^2\operatorname{gd}2H'-\sinh 2H\ln\cosh 2H']\\
=&\frac{2}{\pi}[\sinh 2H(H'-H\sinh 2H')^2-2(H'\sinh 2H)^2\operatorname{gd}2H'-2(H\sinh 2H')^2\operatorname{gd}2H+\pi(H\sinh 2H')^2\\
&\qquad -\sinh 2H\ln\cosh 2H']
\end{aligned}
\tag{80}
$$

となる．ただし，$\sinh 2H'\sinh 2H=1$ と $\operatorname{gd}2H+\operatorname{gd}2H'=\pi/2$ を用いた．式 (46) と式 (80) を式 (O-125) に代入し，$-\sinh 2H\ln\cosh 2H'$ を最初の総和の中に移動すると，最終的に，

$$
\begin{aligned}
\frac{C}{nNk_{\mathrm{B}}}&=-2H^2\sinh^2 2H'+\frac{2}{\pi}[(H'+H\sinh 2H')^2\sinh 2H(\ln\frac{8n}{\pi}+C_E)+O(n^{-2})\\
&\qquad +\sinh 2H(H'-H\sinh 2H')^2-2(H'\sinh 2H)^2\operatorname{gd}2H'\\
&\qquad -2(H\sinh 2H')^2\operatorname{gd}2H+\pi(H\sinh 2H')^2-\sinh 2H\ln\cosh 2H']\\
&=\frac{2}{\pi}[(H'+H\sinh 2H')^2\sinh 2H(\ln n+\ln\frac{8}{\pi\cosh 2H'}+C_E)+O(n^{-2})\\
&\qquad +\sinh 2H(H'-H\sinh 2H')^2-2(H'\sinh 2H)^2\operatorname{gd}2H'-2(H\sinh 2H')^2\operatorname{gd}2H]
\end{aligned}
\tag{O-126}
$$

が得られる．

転移温度で比熱 C/nNk_{B} は $\ln n$ の弱い発散を示す．正方対称の場合，$H=H'=\frac{1}{2}\ln\cot\pi/8$ となる（式 (O-39a)）ので，$\sinh 2H=\sinh 2H'=1$，$\operatorname{gd}2H=\operatorname{gd}2H'=\pi/4$ であることに注意すると，式 (O-126) は，

$$
\begin{aligned}
\frac{C}{nNk_{\mathrm{B}}}&\sim\frac{2}{\pi}(2H')^2(\ln\frac{2^{5/2}n}{\pi}+C_E)-H'^2\pi]\\
&=\frac{2}{\pi}[(\ln\cot\frac{\pi}{8})^2(\ln n+\ln\frac{2^{5/2}}{\pi}+C_E-\frac{\pi}{4})\\
&=0.494539\ln n+0.187903
\end{aligned}
\tag{O-127}
$$

となる．

18 APPENDIX

本節では，楕円関数を用いた積分の数学的手法をまとめている．楕円積分と楕円関数の解説はネットのアーカイブから E. T. Whittaker and G. N. Watson, “A Course of Modern Analysis”, Harris Hancock, “Lectures on the theory of elliptic functions”，Harris Hancock, “Elliptic Integrals” の pdf 版がダウンロード可能である [7, 8, 9]．特に，E. T. Whittaker and G. N. Watson は Onsager も引用しており，楕円関数において種々の表記が存在する煩わしさががあるが，Onsager はこの E. T. Whittaker and G. N. Watson の表記を標準にしている．この本は現在でも amazon.com からも入手可能である．

18.1 General Notation

18.1.1 楕円テータ関数

後で述べるヤコビの楕円関数は楕円積分の逆関数としても定義されるが，ここで定義される楕円テータ関数 $\vartheta_r(z|\tau)$ $(r=1,2,3,4)$ を用いても定義される．楕円関数は一般的には二周期関数の 1 つとして分類されるが，その意味ではここの楕円テータ関数による定義が一般的と言える．総和による定義は擬二周期関数を表している．$\vartheta_4(z|\tau)$ はしばしば $\vartheta_0(z|\tau)$ とも表記される．

パラメータ τ のかわりにノーム (nome) q を用いる場合もある．

$$q = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\tau} \tag{81}$$

τ あるいは q を用いて楕円テータ関数 $\vartheta_r(z|\tau)$ $(r=1,2,3,4)$ は次のように定義される．

$$\begin{aligned}
\vartheta_1(z|\tau) &= \vartheta_1(z,q) = \vartheta_1(z) = -\vartheta_2(z+\tfrac{1}{2}\pi) \\
&= 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \exp((n+\tfrac{1}{2})^2\pi\mathrm{i}\tau)\sin(2n+1)z = 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2}\sin(2n+1)z && \text{(O-1.1-1)}\\
\vartheta_2(z|\tau) &= \vartheta_2(z,q) = \vartheta_2(z) = \vartheta_1(z+\tfrac{1}{2}\pi) \\
&= 2\sum_{n=0}^{\infty}\exp((n+\tfrac{1}{2})^2\pi\mathrm{i}\tau)\cos(2n+1)z = 2\sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2}\cos(2n+1)z && \text{(O-1.1-2)}\\
\vartheta_3(z|\tau) &= \vartheta_3(z,q) = \vartheta_3(z) = \vartheta_4(z+\tfrac{1}{2}\pi) \\
&= 1+2\sum_{n=1}^{\infty}\exp(n^2\pi\mathrm{i}\tau)\cos 2nz = 1+2\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}\cos 2nz && \text{(O-1.1-3)}\\
\vartheta_4(z|\tau) &= \vartheta_4(z,q) = \vartheta_4(z) = \vartheta_3(z+\tfrac{1}{2}\pi) \\
&= 1+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\exp(n^2\pi\mathrm{i}\tau)\cos 2nz = 1+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}\cos 2nz && \text{(O-1.1-4)}
\end{aligned}$$

ここで，他の本、例えば寺澤寛一 [10] では変数 z が πz で置き換えられている．つまり引数が $1/\pi$ 倍になる．

この論文の楕円テータ関数では，1 つの周期は π または 2π であり，もう一つの周期は 1 周期毎に一定の因数が掛かる準周期性で，その周期は $\pi\tau$ または $2\pi\tau$ である．完全な二周期関数ではないので，擬二周期関数と呼ばれる．したがって，この楕円テータ関数の比を作ると，準周期 (quasi-period) が周期に変わって二周期関数になる．

実数軸上の楕円テータ関数を 3 種類の q について，図 3 から図 5 に示す．数値計算のプログラムは付録に示した．

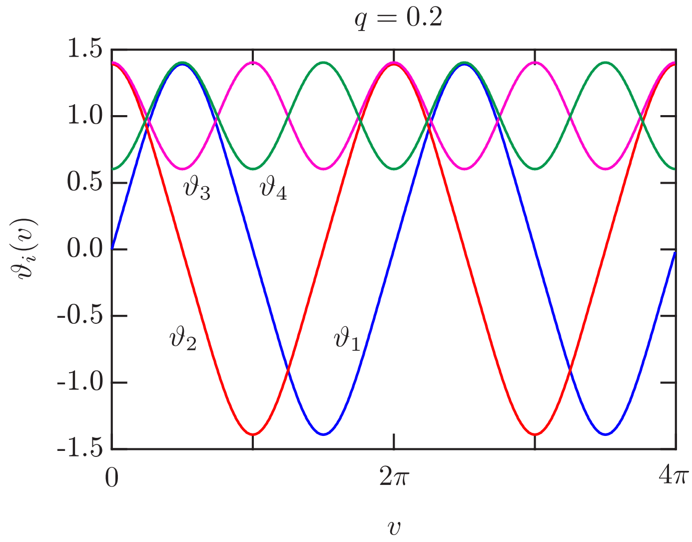

図 3: 楕円テータ関数 $\vartheta_i(u)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$．$q = 0.2$ の場合．

楕円テータ関数の擬周期性［[10], p.539］

$M(z) = q^{-1}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}z}$，$N(z) = q^{-1/4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}$ とすると，

$$\begin{array}{ll}
\vartheta_1(z+\pi) = -\vartheta_1(z); & \vartheta_1(z+\pi\tau) = -M\vartheta_1(z) \\
\vartheta_2(z+\pi) = -\vartheta_2(z); & \vartheta_2(z+\pi\tau) = M\vartheta_2(z) \\
\vartheta_3(z+\pi) = \vartheta_3(z); & \vartheta_3(z+\pi\tau) = M\vartheta_3(z) \\
\vartheta_4(z+\pi) = \vartheta_4(z); & \vartheta_4(z+\pi\tau) = -M\vartheta_4(z) \\
\vartheta_1(z+\frac{1}{2}\pi) = \vartheta_2(z); & \vartheta_1(z+\frac{1}{2}\pi\tau) = \mathrm{i}N\vartheta_4(z) \\
\vartheta_2(z+\frac{1}{2}\pi) = -\vartheta_1(z); & \vartheta_2(z+\frac{1}{2}\pi\tau) = N\vartheta_3(z) \\
\vartheta_3(z+\frac{1}{2}\pi) = \vartheta_4(z); & \vartheta_3(z+\frac{1}{2}\pi\tau) = N\vartheta_2(z) \\
\vartheta_4(z+\frac{1}{2}\pi) = \vartheta_3(z); & \vartheta_4(z+\frac{1}{2}\pi\tau) = \mathrm{i}N\vartheta_1(z)
\end{array} \tag{82}$$

定数は，紛らわしいが，ϑ_1，ϑ_2，ϑ_3，ϑ_4 で表す．

$$\vartheta_r = \vartheta_r(0); \quad \vartheta_r'' = \vartheta_r''(0); \quad (r = 2, 3, 4) \tag{O-1.1-3}$$

楕円テータ関数の $\vartheta_i(z)$ の周期，準周期，関数の偶奇性

$$\begin{array}{cccc}
\vartheta_1(z) & \vartheta_2(z) & \vartheta_3(z) & \vartheta_4(z) \\
2\pi & 2\pi & \pi & \pi \\
\pi\tau & \pi\tau & \pi\tau & \pi\tau \\
\text{奇} & \text{偶} & \text{偶} & \text{偶}
\end{array} \tag{83}$$

楕円テータ関数の $\vartheta_i(z)$ の零点（基本周期内，全て 1 位，極は持たない）［[10], p.540］

$$\begin{array}{cccc}
\vartheta_1(z) & \vartheta_2(z) & \vartheta_3(z) & \vartheta_4(z) \\
0 & \frac{1}{2}\pi & \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi\tau & \frac{1}{2}\pi\tau \\
\pi & \frac{3}{2}\pi & &
\end{array} \tag{84}$$

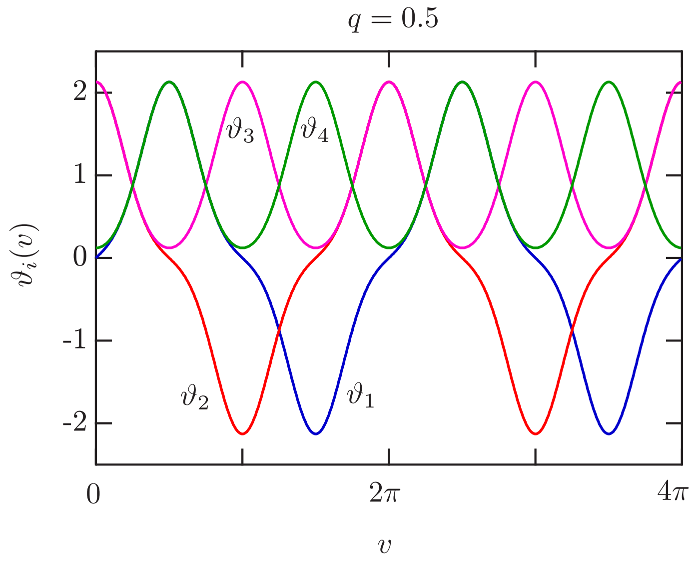

図 4: 楕円テータ関数 $\vartheta_i(u)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$．$q = 0.5$ の場合．

18.1.2　ヤコビのテータ関数

以下の楕円テータ関数 $\vartheta_i(z)$ の変数 z とヤコビのテータ関数 $\Theta(u|)$，$\Theta_1(u|)$，$\mathrm{H}\,(u|)$，$\mathrm{H}_1\,(u|)$ の変数 u の関係は

$$z = \frac{\pi}{2K}u \tag{85}$$

である．この二つのテータ関数の違いは変数が定数倍 $(\pi/2K)$ になっていることだけである．つまり，楕円テータ関数の主たる周期が 2π，ヤコビのテータ関数の主たる周期が $4K$ で，変数はそれぞれの周期に合わせて変換される．ヤコビのテータ関数は次のように定義される．$m = k^2$，$m_1 = k'^2$ とする．

$$\begin{aligned}
&\mathrm{H}\,(u) = \mathrm{H}\,(u|m) = \vartheta_1(z) \\
&\mathrm{H}_1\,(u) = \mathrm{H}_1\,(u|m) = \vartheta_2(z) = \mathrm{H}\,(u+K) \\
&\Theta_1(u) = \Theta_1(u|m) = \vartheta_3(z) = \Theta(u+K) \\
&\Theta(u) = \Theta(u|m) = \vartheta_4(z)
\end{aligned} \tag{86}$$

ヤコビのテータ関数の周期，準周期，関数の偶奇性

$$\begin{array}{cccc}
\mathrm{H}\,(u) & \mathrm{H}_1\,(u) & \Theta_1(u) & \Theta(u) \\
4K & 4K & 2K & 2K \\
2\mathrm{i}K' & 2\mathrm{i}K' & 2\mathrm{i}K' & 2\mathrm{i}K' \\
\text{奇} & \text{偶} & \text{偶} & \text{偶}
\end{array} \tag{87}$$

ヤコビのテータ関数の零点（全て 1 位，極は持たない）

$$\begin{array}{cccc}
\mathrm{H}\,(u) & \mathrm{H}_1\,(u) & \Theta_1(u) & \Theta(u) \\
0 & K & K + \mathrm{i}K' & \mathrm{i}K' \\
2K & 3K & &
\end{array} \tag{88}$$

18.1.3　周期，母数，補母数

ここの周期，母数，補母数はヤコビの楕円関数に関するものである．ヤコビの楕円関数は次に説明されているが，基本的に 3 種類あって，周期は $4K$ または $2K$ である．もう一つの周期が，$2i'K$ または $4iK$ である．式

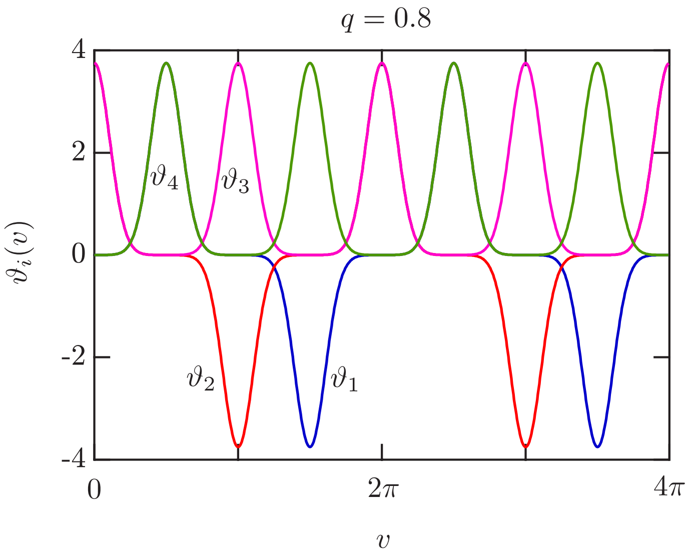

図 5: 楕円テータ関数 $\vartheta_i(u)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$． $q = 0.8$ の場合．

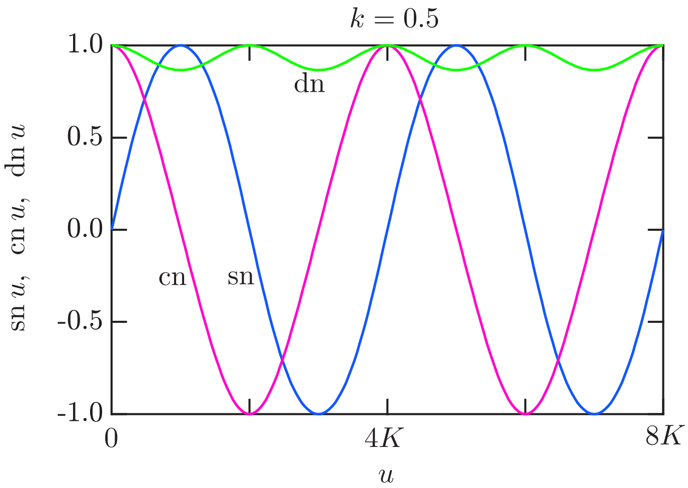

図 6: ヤコビの楕円関数 $\mathrm{sn}\,u$， $\mathrm{cn}\,u$， $\mathrm{dn}\,u$． $k = 0.5$ の場合．

(O-1.2) はヤコビ楕円関数の周期，母数，補母数と楕円テータ関数との関係を示す．

$$2K = \vartheta_3^2 \pi; \quad 2\mathrm{i}K' = \vartheta_3^2 \pi\tau, \tag{O-1.2-1}$$

$$k = \sin\theta = \frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3^2}; \tag{O-1.2-2}$$

$$k' = \cos\theta = \frac{\vartheta_4^2}{\vartheta_3^2}, \tag{O-1.2-3}$$

$$q = \mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}\tau}; \quad \tau = \mathrm{i}K'/K. \tag{O-1.2-4}$$

$k^2 + k'^2 = 1$ であるから，上のように表現することができる．1 つの θ で表すことができる．通常，q は小さな数になるので，q による展開式は急速に収束し，数値計算で使用される．

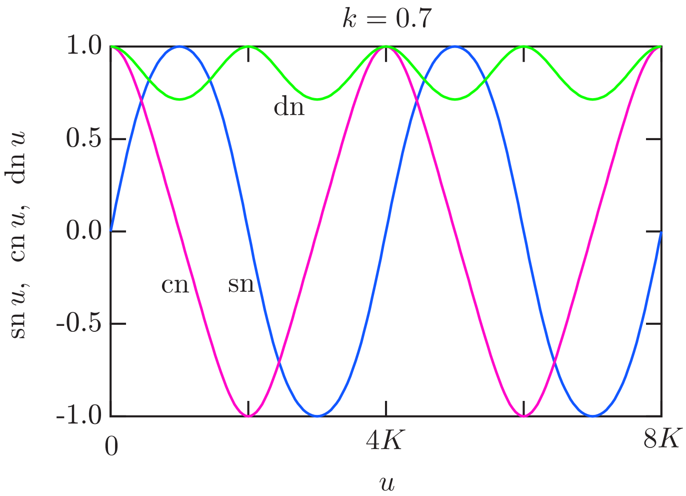

図 7: ヤコビの楕円関数 $\mathrm{sn}\,u$, $\mathrm{cn}\,u$, $\mathrm{dn}\,u$. $k = 0.7$ の場合.

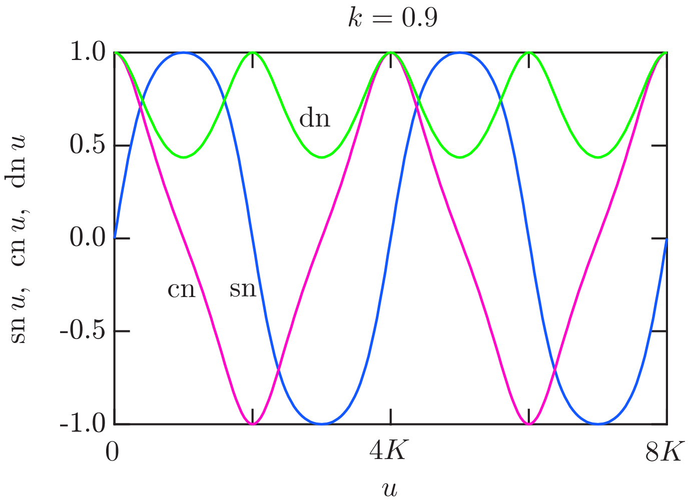

図 8: ヤコビの楕円関数 $\mathrm{sn}\,u$, $\mathrm{cn}\,u$, $\mathrm{dn}\,u$. $k = 0.9$ の場合.

18.1.4 ヤコビの楕円関数

ヤコビの楕円関数の定義として，最初に $\mathrm{sn}\,u$ を楕円積分の逆関数として定義する場合もある．下記は楕円テータ関数を用いる場合である．

$$\mathrm{sn}\,(u,k) = \mathrm{sn}\,u = \mathrm{sn}\,(\vartheta_3^2 z) = \frac{\vartheta_3}{\vartheta_2}\frac{\vartheta_1(z)}{\vartheta_4(z)} = \frac{1}{\sqrt{k}}\frac{\vartheta_1(z)}{\vartheta_4(z)} = \frac{1}{\sqrt{k}}\frac{H(u)}{\Theta(u)}; \tag{O-1.3-1}$$

$$\mathrm{cn}\,(u,k) = \mathrm{cn}\,u = \mathrm{sn}\,(\vartheta_3^2 z) = \frac{\vartheta_4}{\vartheta_2}\frac{\vartheta_2(z)}{\vartheta_4(z)} = \frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{k}}\frac{\vartheta_2(z)}{\vartheta_4(z)} = \frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{k}}\frac{H_1(u)}{\Theta(u)}; \tag{O-1.3-2}$$

$$\mathrm{dn}\,(u,k) = \mathrm{dn}\,u = \mathrm{sn}\,(\vartheta_3^2 z) = \frac{\vartheta_4}{\vartheta_3}\frac{\vartheta_3(z)}{\vartheta_4(z)} = \sqrt{k'}\frac{\vartheta_3(z)}{\vartheta_4(z)} = \sqrt{k'}\frac{\Theta_1(u)}{\Theta(u)}; \tag{O-1.3-3}$$

$$\mathrm{am}\,u = \sin^{-1}(\,\mathrm{sn}\,u) = \cos^{-1}(\,\mathrm{cn}\,u); \tag{O-1.3-4}$$

$$k = \frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3^2}, \quad k' = \frac{\vartheta_4^2}{\vartheta_3^2}, \quad z = \frac{u}{\vartheta_3^2}. \tag{O-1.3-5}$$

am は振幅関数と呼ばれる．

実数軸上のヤコビの楕円関数を図 6 から図 8 に示す．数値計算のプログラムは付録に示した．

ヤコビの楕円関数の周期性に関する関係式

$$\begin{aligned}\mathrm{sn}\,(u+2K) &= -\,\mathrm{sn}\,u \\ \mathrm{cn}\,(u+2K) &= -\,\mathrm{cn}\,u \\ \mathrm{dn}\,(u+2K) &= \ \mathrm{dn}\,u\end{aligned} \tag{89}$$

ヤコビの楕円関数の周期 1，周期 2，関数の偶奇性

$$\begin{array}{cccc} & \mathrm{sn}\,u & \mathrm{cn}\,u & \mathrm{dn}\,u \\ \text{周期 1} & 4K & 4K & 2K \\ \text{周期 2} & 2\mathrm{i}K' & 2K+2\mathrm{i}K' & 4\mathrm{i}K' \\ \text{偶奇性} & \text{奇} & \text{偶} & \text{偶}\end{array} \tag{90}$$

ヤコビの楕円関数の零点，極（全て 1 位），留数（[7], p.504, [10], p.549）

$$\begin{array}{ccccccc} & \mathrm{sn}\,u & & \mathrm{cn}\,u & & \mathrm{dn}\,u & \\ \text{零点} & 0 & 2K & K & 3K & K+\mathrm{i}K' & K+3\mathrm{i}K' \\ \text{極} & \mathrm{i}K' & 2K+\mathrm{i}K' & \mathrm{i}K' & 2K+\mathrm{i}K' & \mathrm{i}K' & 3\mathrm{i}K' \\ \text{留数} & k^{-1} & -k^{-1} & -\mathrm{i}k^{-1} & \mathrm{i}k^{-1} & -\mathrm{i} & \mathrm{i}\end{array} \tag{91}$$

sn, cn, dn 以外にも次の種類のヤコビ楕円関数がある．これを楕円関数のグレイシャー記法という．

$$\begin{aligned}&\mathrm{cd}\,u = \frac{\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{dn}\,u}, \quad \mathrm{dc}\,u = \frac{\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{cn}\,u}, \quad \mathrm{ns}\,u = \frac{1}{\mathrm{sn}\,u} \\ &\mathrm{sd}\,u = \frac{\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{dn}\,u}, \quad \mathrm{nc}\,u = \frac{1}{\mathrm{cn}\,u}, \quad \mathrm{ds}\,u = \frac{\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{sn}\,u} \\ &\mathrm{nd}\,u = \frac{1}{\mathrm{dn}\,u}, \quad \mathrm{sc}\,u = \frac{\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{cn}\,u}, \quad \mathrm{cs}\,u = \frac{\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{sn}\,u}\end{aligned} \tag{O-1.4}$$

一般にグレイシャー記法では，p, q, r を s, c, d, n のうちの任意の 3 個とすると，

$$\mathrm{pq}\,u = \frac{\mathrm{pr}\,u}{\mathrm{qr}\,u} \tag{92}$$

である．同じ文字が並んだときは 1 とする．例えば，

$$\mathrm{nd}\,u = \frac{\mathrm{nn}\,u}{\mathrm{dn}\,u} = \frac{1}{\mathrm{dn}\,u} \tag{93}$$

である．

ヤコビの楕円関数の留数 ([11], p.572)

u	0	K	$\mathrm{i}K'$	$K+\mathrm{i}K'$	$2K$	$3K$
$\mathrm{sn}\,u$	$-$	$-$	k^{-1}	$-$	$-$	$-$
$\mathrm{cn}\,u$	$-$	$-$	$-\mathrm{i}k^{-1}$	$-$	$-$	$-$
$\mathrm{dn}\,u$	$-$	$-$	$-\mathrm{i}$	$-$	$-$	$-$
$\mathrm{cd}\,u$	$-$	$-$	$-$	$-k^{-1}$	$-$	$-$
$\mathrm{sd}\,u$	$-$	$-$	$-$	$-\mathrm{i}(kk')^{-1}$	$-$	$-$
$\mathrm{nd}\,u$	$-$	$-$	$-$	$-\mathrm{i}k'^{-1}$	$-$	$-$
$\mathrm{dc}\,u$	$-$	-1	$-$	$-$	$-$	1
$\mathrm{nc}\,u$	$-$	$-k'^{-1}$	$-$	$-$	$-$	k'^{-1}
$\mathrm{sc}\,u$	$-$	$-k'^{-1}$	$-$	$-$	$-$	$-k'^{-1}$
$\mathrm{ns}\,u$	1	$-$	$-$	$-$	-1	$-$
$\mathrm{ds}\,u$	1	$-$	$-$	$-$	-1	$-$
$\mathrm{cs}\,u$	1	$-$	$-$	$-$	1	$-$

(94)

次の等式が成り立つ.

$$\begin{aligned}\mathrm{sn}^2\,u+\mathrm{cn}^2\,u&=1\\ \mathrm{dn}^2\,u+k^2\,\mathrm{sn}^2\,u&=1\end{aligned} \tag{O-1.5}$$

ヤコビの楕円関数の加法定理 ([10], p.552)

$$\mathrm{sn}\,(u+v)=\frac{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,v\,\mathrm{dn}\,v+\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,u\,\mathrm{sn}^2\,v} \tag{95}$$

$$\mathrm{cn}\,(u+v)=\frac{\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{cn}\,v-\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{dn}\,v}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,u\,\mathrm{sn}^2\,v} \tag{96}$$

$$\mathrm{dn}\,(u+v)=\frac{\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{dn}\,v-k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{cn}\,v}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,u\,\mathrm{sn}^2\,v} \tag{97}$$

ヤコビの楕円関数の倍角定理 ([8], p.368)

$$\mathrm{sn}\,2u=\frac{2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{1-k^2\,\mathrm{sn}^4\,u}=\frac{2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{cn}^2\,u+\mathrm{sn}^2\,u\,\mathrm{dn}^2\,u} \tag{98}$$

$$\mathrm{cn}\,2u=\frac{\mathrm{cn}^2\,u-\mathrm{sn}^2\,u\,\mathrm{dn}^2\,u}{1-k^2\,\mathrm{sn}^4\,u}=\frac{\mathrm{cn}^2\,u-\mathrm{sn}^2\,u\,\mathrm{dn}^2\,u}{\mathrm{cn}^2\,u+\mathrm{sn}^2\,u\,\mathrm{dn}^2\,u} \tag{99}$$

$$\mathrm{dn}\,2u=\frac{\mathrm{dn}^2\,u-k^2\,\mathrm{sn}^2\,u\,\mathrm{cn}^2\,u}{1-k^2\,\mathrm{sn}^4\,u}=\frac{\mathrm{dn}^2\,u-k^2\,\mathrm{sn}^2\,u\,\mathrm{cn}^2\,u}{\mathrm{cn}^2\,u+\mathrm{sn}^2\,u\,\mathrm{dn}^2\,u} \tag{100}$$

ヤコビの楕円関数の半角定理 ([8], p.368)

$$\mathrm{sn}^2\,\frac{u}{2}=\frac{1-\mathrm{cn}\,u}{1+\mathrm{dn}\,u} \tag{101}$$

$$\mathrm{cn}^2\,\frac{u}{2}=\frac{\mathrm{cn}\,u+\mathrm{dn}\,u}{1+\mathrm{dn}\,u} \tag{102}$$

$$\mathrm{dn}^2\,\frac{u}{2}=\frac{\mathrm{cn}\,u+\mathrm{dn}\,u}{1+\mathrm{cn}\,u}=\frac{k'^2+\mathrm{dn}\,u+k^2\,\mathrm{cn}\,u}{1+\mathrm{dn}\,u} \tag{103}$$

ヤコビの虚数変換 ([8], p.247)

$$\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}u,k)=\mathrm{i}\,\mathrm{sc}\,(u,k'),\qquad \mathrm{sn}\,(u,k')=-\mathrm{i}\,\mathrm{sc}\,(\mathrm{i}u,k) \tag{104}$$

$$\mathrm{cn}\,(\mathrm{i}u,k)=\mathrm{nc}\,(u,k'),\qquad \mathrm{cn}\,(u,k')=\mathrm{nc}\,(\mathrm{i}u,k) \tag{105}$$

$$\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}u,k)=\mathrm{dc}\,(u,k'),\qquad \mathrm{dn}\,(u,k')=\mathrm{dc}\,(\mathrm{i}u,k) \tag{106}$$

ヤコビの楕円関数の微分 ([10], p.551)

$$\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{d}u} = \mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u, \quad \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{cd}\,u}{\mathrm{d}u} = -k'^2\,\mathrm{sd}\,u\,\mathrm{nd}\,u, \quad \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{dc}\,u}{\mathrm{d}u} = k'^2\,\mathrm{sc}\,u\,\mathrm{nc}\,u \quad \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{ns}\,u}{\mathrm{d}u} = -\,\mathrm{ds}\,u\,\mathrm{cs}\,u$$

$$\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{d}u} = -\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,u, \quad \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{sd}\,u}{\mathrm{d}u} = \mathrm{cd}\,u\,\mathrm{nd}\,u, \quad \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{nc}\,u}{\mathrm{d}u} = \mathrm{sc}\,u\,\mathrm{dc}\,u \quad \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{ds}\,u}{\mathrm{d}u} = -\,\mathrm{cs}\,u\,\mathrm{ns}\,u$$

$$\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{d}u} = -k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u, \quad \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{nd}\,u}{\mathrm{d}u} = k^2\,\mathrm{sd}\,u\,\mathrm{cd}\,u, \quad \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{sc}\,u}{\mathrm{d}u} = \mathrm{dc}\,u\,\mathrm{nc}\,u \quad \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{cs}\,u}{\mathrm{d}u} = -\,\mathrm{ns}\,u\,\mathrm{ds}\,u \tag{O-1.6-1}$$

ヤコビの楕円関数の四半周期 K シフト ([8], p.245)

$$\begin{cases} \mathrm{sn}\,(u+K) = \dfrac{\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{dn}\,u} \\ \mathrm{cn}\,(u+K) = -\,k'\dfrac{\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{dn}\,u} \\ \mathrm{dn}\,(u+K) = \dfrac{k'}{\mathrm{dn}\,u} \end{cases} \tag{107}$$

ヤコビの楕円関数の第 2 周期の半周期 $\mathrm{i}K'$ シフト ([8], p.246)

$$\begin{cases} \mathrm{sn}\,(u+\mathrm{i}K') = \dfrac{1}{k\,\mathrm{sn}\,u} \\ \mathrm{cn}\,(u+\mathrm{i}K') = -\,\dfrac{\mathrm{i}\,\mathrm{dn}\,u}{k\,\mathrm{sn}\,u} \\ \mathrm{dn}\,(u+\mathrm{i}K') = -\,\mathrm{i}\dfrac{\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{sn}\,u} \end{cases} \tag{108}$$

$k=0$ および $k=1$ におけるヤコビの楕円関数 ([11], p.571)

$$\begin{array}{lll} & k=0 & k=1 \\ \mathrm{sn}\,u & \sin u & \tanh u \\ \mathrm{cn}\,u & \cos u & \mathrm{sech}\,u \\ \mathrm{dn}\,u & 1 & \mathrm{sech}\,u \\ \mathrm{am}\,u & u & \mathrm{gd}\,u \end{array} \tag{109}$$

18.1.5 第 1 種不完全楕円積分

第 1 種不完全楕円積分 $F(\varphi,k)$ の定義は

$$F(\varphi,k) = \int_0^{\varphi} \frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{\sin\varphi} \frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}\,\mathrm{d}t \tag{O-1.6-1}$$

で与えられる．引数の順序を Osager 論文と逆にして，岩波の数学公式 I や，より一般的な教科書などと同じくした．k は母数である．

第 1 種完全楕円積分 $K(k)$ は

$$K(k) = F(\frac{\pi}{2},k) \tag{O-1.6-2}$$

と定義される．補母数の場合，

$$K(k') = K' \tag{O-1.6-2}$$

とする．

18.1.6　第 2 種不完全楕円積分

第 2 種不完全楕円積分 $F(\varphi,k)$ の定義は

$$E(\varphi,k)=\int_0^{\varphi}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi=\int_0^{\sin\varphi}\sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}}\,\mathrm{d}t \tag{O-1.7-2}$$

で与えられる．

$\sin\varphi=\ \mathrm{sn}\,u$ とおくと，$\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi=\ \mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u\ \mathrm{d}u$ すなわち $\mathrm{d}\varphi=\ \mathrm{dn}\,u\ \mathrm{d}u$ である．また，$1-k^2\sin^2\varphi=\ \mathrm{dn}^2\,u$ であるから，

$$E(\varphi,k)=\int_0^u\ \mathrm{dn}^2\,u\,\mathrm{d}u \tag{110}$$

と表すことができる．

第 2 種楕円積分 $E(\varphi,k)$ の変数を $\sin\varphi=\ \mathrm{sn}\,u$ により u に変換した関数をヤコビのエプシロン関数といい，$\mathscr{E}(u,k)$ と書くと，

$$\mathscr{E}(u,k)=\mathscr{E}(u)=\int_0^u\ \mathrm{dn}^2\,u\,\mathrm{d}u=\int_0^{\mathrm{sn}\ u}\sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}}\,\mathrm{d}t \tag{O-1.7-3}$$

である．

18.1.7　ヤコビのツェータ関数

ヤコビのツェータ関数 $Z(u)$ は次のように定義される ([10], 557).

$$\begin{aligned}Z(u)&=Z(u,k)\\&=\frac{\mathrm{d}\ln\Theta(u)}{\mathrm{d}u}=\frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)} \qquad (111)\\&=\frac{\vartheta_4'(v)}{\vartheta_4(v)}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}=\frac{\vartheta_4'(v)}{\vartheta_4(v)}\frac{\pi}{2K}=\frac{\vartheta_4'(\frac{\pi}{2K}u)}{\vartheta_4(\frac{\pi}{2K}u)}\frac{\pi}{2K}=\frac{\vartheta_4'(\frac{u}{\vartheta_3^2})}{\vartheta_4(\frac{u}{\vartheta_3^2})}\frac{\pi}{\vartheta_3^2} \qquad (\text{O-1.7-1})\end{aligned}$$

実数軸上のヤコビのツェータ関数 $Z(u)$ を 5 つの k の値に関して，図 9 に示す．数値計算のプログラムは付録に示した．

ヤコビのツェータ関数の主な性質［[11], p.595］

$$\begin{cases}Z(-u)=-Z(u)\\Z(u+2K)=Z(u)\\Z(u+2\mathrm{i}K')=Z(u)-\dfrac{\mathrm{i}\pi}{K}\\Z(K-u)=-Z(K+u)\\Z(u,0)=0\\Z(u,1)=\tanh u\end{cases} \tag{112}$$

以上の性質から，$Z(0)=Z(K)=0$ が成り立つ．

ヤコビのツェータ関数の極と零点（n，m は整数）

$$\begin{array}{ll}Z(u)\ \text{の零点} & 2mK\\Z(u)\ \text{の極} & 2mK+(2n+1)\mathrm{i}K'\end{array} \tag{113}$$

$Z'(u)$ は二周期関数（楕円関数）である［[10], p.558］．実際，リュービルの定理を用いて，

$$Z'(u) = \operatorname{dn}^2 u - \frac{E}{K} \tag{114}$$

が成り立つ．これを積分すると，式 (O-1.6) と比較して，

$$\mathscr{E}(u) = Z(u) + \frac{E}{K}u = \int_0^u \operatorname{dn}^2 u \, du \tag{O-1.7-4}$$

が成り立つ．

ヤコビのツェータ関数の加法定理 ([10]，p.558)

$$Z(u+v) = Z(u) + Z(v) - k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{sn}(u+v) \tag{115}$$

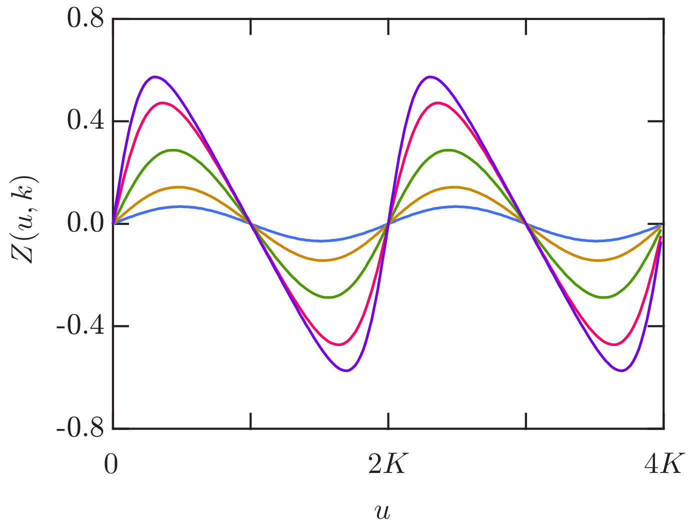

図 9: 実数軸上のヤコビのツェータ関数．振幅の小さい方から，$k = 0.5$，0.7, 0.9, 0.99, 0.999 である．

18.1.8　第 3 種完全楕円積分

ルジャンドル-ヤコビの標準形とは別に，ヤコビの第 3 種不完全楕円積分があり，$\Pi(u, a, k)$ あるいは単に $\Pi(u)$ として次のように表される．

$$\Pi(u, a, k) = \int_0^u \frac{k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a \operatorname{sn}^2 u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u} \tag{116}$$

$\Pi(u, a, k)$ はルジャンドル-ヤコビの標準形から第 1 種不完全楕円積分を差し引いて定数 $\operatorname{cn} a \operatorname{dn} a / \operatorname{sn} a$ を掛けたものである ([8], p.420).

式 (95) から，

$$\operatorname{sn}(u \pm a) = \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a \pm \operatorname{sn} a \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 a} \tag{117}$$

であるから，

$$\operatorname{sn}(u+a) + \operatorname{sn}(u-a) = \frac{2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 a} \tag{118}$$

である．したがって，

$$\Pi(u, a, k) = \frac{1}{2} \int_0^u \frac{1}{2} k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn} u \{ \operatorname{sn}(u+a) + \operatorname{sn}(u-a) \} \tag{119}$$

である．一方，式 (115) から

$$Z(u+a)-Z(u-a)=2Z(a)-k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,u\{\,\mathrm{sn}\,(u+a)+\,\mathrm{sn}\,(u-a)\} \tag{120}$$

これから，

$$\begin{aligned}\Pi(u,a,k)&=\int_0^u[Z(a)+\frac{1}{2}\{Z(u-a)-Z(u+a)\}]\,\mathrm{d}u\\&=\int_0^u[Z(a)+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\{\ln\Theta(u-a)-\ln\Theta(u+a)\}]\,\mathrm{d}u\\&=Z(a)u+\frac{1}{2}\ln\frac{\Theta(u-a)}{\Theta(u+a)}\end{aligned} \tag{121}$$

となる．$\Theta(u)$ は周期 $2K$ の偶関数であるから $\Theta(K-a)=\Theta(-K+a)=\Theta(K+a)$ となり，

$$\Pi(K,a,k)=\int_0^K\frac{k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{sn}^2\,u}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,a\,\mathrm{sn}^2\,u}=Z(a)K \tag{O-1.8}$$

となる．

18.2 Uniformizing Substitution

Fig. 4 に示される双曲三角形の 2 辺を $2H'$ と $2H^*$，その間の角を ω，ω の対辺を $\cosh\gamma$ とするとき，δ' と δ^*，および $2H'$ と $2H^*$ は楕円関数を用いて 2 個の変数 u と $\mathrm{i}a$ で表すことができる．

$2H'$ と $2H^*$ の大小は，臨界点に関して低温域か高温域を決定する．楕円関数の母数 k は $\sinh 2H'$ と $\sinh 2H^*$ の比で決まる．したがって，低温域と高温域で母数 k の定義が異なる．

最初に低温域を考える．低温域では，$H'>H^*$ であるから，

$$k=\sin\Theta_0=\frac{\sinh 2H^*}{\sinh 2H'}=\frac{1}{\sinh 2H\sinh 2H'}<1 \tag{O-2.1a-1}$$

となる．

$\sinh 2H'$ や $\sin\delta'$ はヤコビの楕円関数を介することによって新しい変数 a や u に統一的に表現することが可能である．実際，

$$\sinh 2H'=-\mathrm{i}\sin(2\mathrm{i}H')=-\mathrm{i}\,\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a) \tag{122}$$

$$\sin\delta'=\,\mathrm{sn}\,u \tag{123}$$

とおくことができる．これにより，新しい変数 a と u が定義できる．まず，式 (111) から，

$$\mathrm{am}\,(\mathrm{i}a)=2\mathrm{i}H' \tag{124}$$

とすることができる．ここで，

$$a=2K_0'y \tag{125}$$

として，新しい変数 y を定義することにより，

$$\mathrm{am}\,(\mathrm{i}a)=\,\mathrm{am}\,(2\mathrm{i}K_0'y)=2\mathrm{i}H' \tag{O-2.1a-2}$$

とすることができる．

次に，式 (123) から，

$$\mathrm{am}\,u=\delta' \tag{O-2.1a-3}$$

とすることができる．

以上から $\sinh 2H'$ や $\sin\delta'$ などを以下のように，u および ia を用いて表すことができる．

$$
\begin{aligned}
&\sin\delta' = \ \mathrm{sn}\, u \\
&\cos\delta' = \ \mathrm{cn}\, u \\
&\sin\delta^* = \frac{\sinh 2H^*}{\sinh 2H'}\sin\delta' = k\,\mathrm{sn}\, u \\
&\cos\delta^* = \sqrt{1-\sin^2\delta^*} = \sqrt{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\, u} = \ \mathrm{dn}\, u \\
&\sinh 2H' = -\mathrm{i}\sin 2\mathrm{i}H' = -\mathrm{i}\,\mathrm{sn}\,\mathrm{i}a \\
&\sinh 2H^* = \frac{\sinh 2H^*}{\sinh 2H'}\sinh 2H' = -\mathrm{i}k\,\mathrm{sn}\,\mathrm{i}a \\
&\cosh 2H' = \cos 2\mathrm{i}H' = \ \mathrm{cn}\,\mathrm{i}a \\
&\cosh 2H^* = \sqrt{1+\sinh^2 2H^*} = \sqrt{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,\mathrm{i}a} = \ \mathrm{dn}\,\mathrm{i}a
\end{aligned}
\tag{O-2.2a-1}
$$

$\cos\delta' < 0$ の場合も同様に定義できる．

$\sinh 2H'$ と $\sinh 2H^*$ に対してグーデルマン関数を使って，

$$
\begin{aligned}
g' &= \ \mathrm{gd}\, 2H' \\
g &= \ \mathrm{gd}\, 2H
\end{aligned}
\tag{O-2.3}
$$

と定義すると，

$$\tan g' = \sinh 2H' \tag{126}$$

$$\cot g = \frac{1}{\sinh 2H} = \sinh 2H^* \tag{127}$$

となる．式 (127) から，

$$\frac{\pi}{2} - \ \mathrm{gd}\, 2H = \ \mathrm{gd}\, 2H^* \tag{O-2.3}$$

という関係が得られる．$\cosh^2 x = \sinh^2 x 1$ および $\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$ という関係から，

$$
\begin{aligned}
\cosh 2H' \quad &= \sqrt{\sinh^2 2H'+1} = \sqrt{1-\ \mathrm{sn}^2\,\mathrm{i}a} = \ \mathrm{cn}\,\mathrm{i}a \\
&= \sqrt{\sinh^2 2H'+1} = \sqrt{\tan^2 g'+1} = \sec g' \\
\cosh 2H^* \quad &= \sqrt{\sinh^2 2H^*+1} = \sqrt{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,\mathrm{i}a} = \ \mathrm{dn}\ \ \mathrm{i}a \\
&= \sqrt{\sinh^2 2H^*+1} = \sqrt{\cot^2 g+1} = \ \mathrm{cosec}\, g
\end{aligned}
\tag{O-2.2a-2}
$$

などの関係式が得られる．

次に，高温域では $H' < H^*$ である．双曲正弦定理 (O-89c) から，

$$\frac{\sin\delta'}{\sin\delta^*} = \frac{\sinh 2H'}{\sinh 2H^*} = k \tag{128}$$

であるので，この場合は，$\sin\delta^* = \ \mathrm{sn}\, u$ でなければならない．かつ，

$$\mathrm{am}\,(\mathrm{i}a) = \ \mathrm{am}\,(2\mathrm{i}K_0' y) = 2\mathrm{i}H^* \tag{O-2.1a-2}$$

とする．

そうすると，結局，式 (O-2.2a) の場合と同様にして，

$$
\begin{aligned}
\sin\delta^* &= \mathrm{sn}\, u \\
\cos\delta^* &= \mathrm{cn}\, u \\
\sin\delta' &= \frac{\sinh 2H'}{\sinh 2H^*}\sin\delta^* = k\,\mathrm{sn}\, u \\
\cos\delta' &= \sqrt{1-\sin^2\delta'} = \sqrt{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\, u} = \mathrm{dn}\, u \\
\sinh 2H^* &= -\mathrm{i}\sin 2\mathrm{i}H^* = -\mathrm{i}\,\mathrm{sn}\,\mathrm{i}a \\
\sinh 2H' &= \frac{\sinh 2H'}{\sinh 2H^*}\sinh 2H^* = -\mathrm{i}k\,\mathrm{sn}\,\mathrm{i}a \\
\cosh 2H^* &= \cos 2\mathrm{i}H^* = \mathrm{cn}\,\mathrm{i}a \\
\cosh 2H' &= \sqrt{1+\sinh^2 2H'} = \sqrt{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,\mathrm{i}a} = \mathrm{dn}\, u
\end{aligned}
\tag{O-2.2b}
$$

さらに，

$$
\begin{aligned}
\cosh 2H^* &= \sqrt{\sinh^2 2H^*+1} = \sqrt{1-\,\mathrm{sn}^2\,\mathrm{i}a} = \mathrm{cn}\,\mathrm{i}a \\
&= \sqrt{\sinh^2 2H^*+1} = \sqrt{\cot^2 g+1} = \mathrm{cosec}\, g \\
\cosh 2H' &= \sqrt{\sinh^2 2H'+1} = \sqrt{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,\mathrm{i}a} = \mathrm{dn}\ \ \mathrm{i}a \\
&= \sqrt{\sinh^2 2H'+1} = \sqrt{\tan^2 g+1} = \sec g'
\end{aligned}
\tag{O-2.2a}
$$

などの関係式が成り立つ．

＊　＊　＊　＊　＊

双曲三角形で，2 辺 $2H'$ と $2H^*$ に対し，その間の角 ω が決まれば，双曲余弦定理で対辺の長さ γ が決定される．低温域，高温域に共通である．ω と γ の関数も u と $\mathrm{i}a$ を用いて表すことができる．Fig. 4 の双曲三角形 $\mathrm{OD'D^*}$ において，角 O，D′，D* に順次双曲余弦定理 (O-89a) を適用すると，

$$\cosh\gamma = \cosh 2H'\cosh 2H^* - \sinh 2H'\sinh 2H^*\cos\omega \tag{129}$$

$$\cosh 2H' = \cosh\gamma\cosh 2H^* - \sinh\gamma\sinh 2H^*\cos\delta' \tag{130}$$

$$\cosh 2H^* = \cosh\gamma\cosh 2H' - \sinh\gamma\sinh 2H'\cos\delta^* \tag{131}$$

であるから，すなわち，

$$
\begin{pmatrix}
1 & 0 & \sinh 2H'\sinh 2H^* \\
\cosh 2H^* & -\sinh 2H^*\cos\delta' & 0 \\
\cosh 2H' & -\sinh 2H'\cos\delta^* & 0
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
\cosh\gamma \\ \sinh\gamma \\ \cos\omega
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
\cosh 2H'\cosh 2H^* \\ \cosh 2H' \\ \cosh 2H^*
\end{pmatrix}
\tag{132}
$$

となる．クラメルの公式を用いてこれを解いて式 (O-2.2a) または式 (O-2.2b) を代入することによって，

$$\begin{aligned}\cosh\gamma &= \frac{\cosh 2H^*\cos\delta' - k\cosh 2H'\cos\delta^*}{\cosh 2H'\cos\delta' - k\cosh 2H^*\cos\delta^*} = \frac{\mathrm{cn}\,\mathrm{i}a\,\mathrm{dn}\,u - k\,\mathrm{dn}\,\mathrm{i}a\,\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{dn}\,\mathrm{i}a\,\mathrm{dn}\,u - k\,\mathrm{cn}\,\mathrm{i}a\,\mathrm{cn}\,u}\\ &= \frac{\mathrm{cn}\,\mathrm{i}a\,\mathrm{dn}\,u - k\,\mathrm{dn}\,\mathrm{i}a\,\mathrm{cn}\,u}{M} \qquad \text{(O-2.4-1)}\\ \sinh\gamma &= \frac{\sinh 2H^*(1-k^2)}{\cosh 2H'\cos\delta' - k\cosh 2H^*\cos\delta^*} = \frac{-k'^2\,\mathrm{sn}\,\mathrm{i}a}{\mathrm{dn}\,\mathrm{i}a\,\mathrm{dn}\,u - k\,\mathrm{cn}\,\mathrm{i}a\,\mathrm{cn}\,u}\\ &= \frac{-k'^2\,\mathrm{sn}\,\mathrm{i}a}{M} \qquad \text{(O-2.4-2)}\\ \cos\omega &= \frac{k\cosh 2H^*\cos\delta' - \cosh 2H'\cos\delta^*}{\cosh 2H'\cos\delta' - k\cosh 2H^*\cos\delta^*} = \frac{k\,\mathrm{cn}\,\mathrm{i}a\,\mathrm{dn}\,u - \mathrm{dn}\,\mathrm{i}a\,\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{dn}\,\mathrm{i}a\,\mathrm{dn}\,u - k\,\mathrm{cn}\,\mathrm{i}a\,\mathrm{cn}\,u}\\ &= -\frac{\mathrm{dn}\,\mathrm{i}a\,\mathrm{cn}\,u - k\,\mathrm{cn}\,\mathrm{i}a\,\mathrm{dn}\,u}{M} \qquad \text{(O-2.4-3)}\\ \sin\omega &= \frac{\sin\delta^*}{\sinh 2H^*}\sinh\gamma = \frac{(1-k^2)\,\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{dn}\,\mathrm{i}a\,\mathrm{dn}\,u - k\,\mathrm{cn}\,\mathrm{i}a\,\mathrm{cn}\,u}\\ &= \frac{k'^2\,\mathrm{sn}\,u}{M} \qquad \text{(O-2.4-4)}\end{aligned}$$

ただし，

$$M = \mathrm{dn}\,\mathrm{i}a\,\mathrm{dn}\,u - k\,\mathrm{cn}\,\mathrm{i}a\,\mathrm{cn}\,u \tag{133}$$

である．

次に，ω と γ の u, a に関する微分を求めよう．式 (O-2.4-4) を u で微分すると，

$$\frac{\partial}{\partial u}\sin\omega = \frac{k'^2}{M^2}\{\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{d}u}M - \mathrm{sn}\,u\frac{\partial M}{\partial u}\} \tag{134}$$

である．ここで，式 (122) から，

$$\frac{\partial M}{\partial u} = \mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a)\{-k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\} - k\{-\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,u\} = k\,\mathrm{sn}\,u\{-k\,\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{cn}\,u + \mathrm{cn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{dn}\,u\} \tag{135}$$

$$= kM\,\mathrm{sn}\,u\cosh\gamma \tag{136}$$

となる．したがって，式 (O-1.4) を使って，

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{d}u}M - \mathrm{sn}\,u\frac{\partial M}{\partial u}\\ &= \mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u\{\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{dn}\,u - k\,\mathrm{cn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{cn}\,u\} - k\,\mathrm{sn}^2\,u\{-k\,\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{cn}\,u + \mathrm{cn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{dn}\,u\}\\ &= \mathrm{cn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{dn}\,u(-k\,\mathrm{sn}^2\,u - k\,\mathrm{cn}^2\,u) + \mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{cn}\,u(k^2\,\mathrm{sn}^2\,u + \mathrm{dn}^2\,u)\\ &= \mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{cn}\,u - k\,\mathrm{cn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{dn}\,u = -M\cos\omega \qquad (137)\end{aligned}$$

となる．一方，

$$\frac{\partial}{\partial u}\sin\omega = \cos\omega\frac{\partial\omega}{\partial u} \tag{138}$$

であるから，式 (134)，(136) を用いて，

$$\begin{aligned}\frac{\partial\omega}{\partial u} &= \frac{1}{\cos\omega}\frac{\partial}{\partial u}\sin\omega = \frac{k'^2}{\cos\omega M^2}\{\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{d}u}M - \mathrm{sn}\,u\frac{\partial M}{\partial u}\}\\ &= -\frac{k'^2}{M} \qquad \text{(O-2.5-1)}\end{aligned}$$

を得る．

同様にして，式 (O-2.4-4) から，

$$\frac{\partial}{\partial a}\sin\omega = \cos\omega\frac{\partial\omega}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a}\frac{k'^2\,\mathrm{sn}\,u}{M} = -\frac{k'^2\,\mathrm{sn}\,u}{M^2}\frac{\partial M}{\partial a} \tag{139}$$

となる．また，

$$\frac{\partial M}{\partial a} = -\mathrm{i}k^2 \,\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{cn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{dn}\,u + \mathrm{i}k\,\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{cn}\,u \tag{140}$$

$$= \mathrm{i}k\,\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a)\{-k\,\mathrm{cn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{dn}\,u + \,\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{cn}\,u\} = -\mathrm{i}k\,\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a)M\cos\omega \tag{141}$$

であるから，

$$\frac{\partial \omega}{\partial a} = \frac{\mathrm{i}kk'^2}{M}\,\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{sn}\,u \tag{O-2.5-2}$$

となる．

次に，式 (O-2.4-2) を u で微分すると，

$$\frac{\partial}{\partial u}\sinh\gamma = \cosh\gamma\frac{\partial\gamma}{\partial u} = \mathrm{i}\frac{k'^2\,\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a)}{M^2}\frac{\partial M}{\partial u} = \mathrm{i}\frac{k'^2 k}{M}\,\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{sn}\,u\cosh\gamma \tag{142}$$

である．したがって，

$$\frac{\partial \gamma}{\partial u} = \frac{\mathrm{i}kk'^2}{M}\,\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{sn}\,u \tag{O-2.5-2}$$

となる．

最後に，同じく式 (O-2.4-2) を a で微分すると，

$$\frac{\partial}{\partial a}\sinh\gamma = \cosh\gamma\frac{\partial\gamma}{\partial a} = \mathrm{i}\frac{k'^2}{M^2}\{\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a)}{\mathrm{d}a}M - \,\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a)\frac{\partial M}{\partial a}\} \tag{143}$$

であり，

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a)}{\mathrm{d}a}M - \,\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a)\frac{\partial M}{\partial a}\\
=&\mathrm{i}\,\mathrm{cn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a)\{\,\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{dn}\,u - k\,\mathrm{cn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{cn}\,u\} - \mathrm{i}k\,\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a)\{-k\,\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{cn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{dn}\,u + \,\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{cn}\,u\}\\
=&\mathrm{i}\,\mathrm{cn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{dn}\,u\{\,\mathrm{dn}^2\,(\mathrm{i}a) + k^2\,\mathrm{sn}^2\,(\mathrm{i}a)\} - \mathrm{i}k\,\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{cn}\,u\{\,\mathrm{cn}^2\,(\mathrm{i}a) + \,\mathrm{sn}^2\,(\mathrm{i}a)\}\\
=&\mathrm{i}\{\,\mathrm{cn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{dn}\,u - k\,\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{cn}\,u\} = \mathrm{i}M\cosh\gamma
\end{aligned} \tag{144}$$

から，

$$\frac{\partial\gamma}{\partial a} = \frac{k'^2}{M} \tag{O-2.5-1}$$

となる．

以上をまとめると，

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial\omega}{\partial u} &= \frac{\partial\gamma}{\partial a}\\
\frac{\partial\gamma}{\partial u} &= \frac{\partial\omega}{\partial a}
\end{aligned} \tag{O-2.5}$$

となる．これは，$(\omega, \mathrm{i}\gamma)$ を $(u, \mathrm{i}a)$ の関数とした場合におけるコーシー-リーマンの関係式である．$(\omega, \mathrm{i}\gamma)$ が $(u, \mathrm{i}a)$ の正則な関数である範囲では $(\omega, \mathrm{i}\gamma)$ と $(u, \mathrm{i}a)$ の間に等角写像が成り立つ．

式 (2.6) は，一般的には成り立つが，いまの場合，γ は ω の関数であるから，式 (O-2.4) と等角写像は両立しない．式 (O-2.4) から式 (2.6) を導くことはできない．Onsager も式 (2.6) を may be と書いている．

18.3 Alternative Substitution

この小節では，母数と周期を変換して，数値計算の収束を高速にするランデン変換について述べられている．

ところが，Onsager はランデン変換と書いているが，ランデン変換 [12] を適用しても式 (O-3.1) のような変換式は得られない．実際には，式 (O-3.1) はガウス変換 [13] を用いると導くことができる．ガウス変換はし

ばしばランデン変換と同一に扱われるので，Onsager はランデン変換と記述したものと考えられる．一方，式 (O-3.2) 以降の変換には上昇ランデン変換が使われている．

楕円積分のランデン変換とガウス変換についてはすでに述べている [12, 13] ので，ここでは変換手法については簡略に記述することにしよう．

18.3.1 ガウス変換

ガウス変換は，次の第 1 種楕円積分 $F(\phi, k)$ に対し，

$$F(\phi, k) = \int_0^\phi \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin\theta}} \tag{145}$$

変数変換

$$(1 + k)\sin\theta = (1 + k\sin^2\theta)\sin\psi \tag{146}$$

により，$F(\phi, k) = u_0$ の母数を増減させる変換である．変換後の第 1 種楕円積分を $F(\phi_1, k_1) = u_1$ と書くことにする．また，変換前の母数を k_0，ランデン変換後の母数を k_1 とする．そうすると，ガウス変換により，第 1 種楕円積分とその母数は次のように変換される（計算の詳細は [13] に述べた）．

$$\int_0^\phi \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin\theta}} = \frac{1}{1 + k} \int_0^{\phi_1} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1 - k_1^2 \sin\psi}} \tag{147}$$

母数は，

$$k_1' = \frac{1 - k_0}{1 + k_0}, \qquad k_1 = \frac{2\sqrt{k_0}}{1 + k_0} \tag{148}$$

と変換される．この式は式 (O-3.1) と一致する．この場合，k_1 は増加し，k_1' は減少する．この母数の変換は上昇ランデン変換の場合と同じである．

ガウス変換を $F(\phi, k)$ を用いて表すことにしよう．そうすると，式 (147) は

$$F(\phi_0, k_0) = \frac{1}{1 + k_0} F(\phi_1, k_1) = \frac{1 + k_1'}{2} F(\phi_1, k_1) \tag{149}$$

$$F(\phi_1, k_1) = (1 + k_0) F(\phi_0, k_0) = \frac{2}{1 + k_1'} F(\phi_0, k_0) \tag{150}$$

と表すことができる．この変換式はランデン変換とは微妙に異なるので注意を要する．

ヤコビの楕円関数は第 1 種不完全楕円積分で定義することができるから，式 (147) あるいは式 (149) の ϕ と ϕ_1 の関係をみておこう．式 (146) の変数変換の関係から，

$$(1 + k)\sin\phi = (1 + k\sin^2\phi)\sin\phi_1 \tag{151}$$

である．この関係はランデン変換とは異なる．

最も大きな違いは第 1 種完全楕円積分の場合である．完全楕円積分では $\phi = \pi/2$ であるから，式 (151) から $\phi_1 = \pi/2$ となる．つまり，ガウス変換は第 1 種完全楕円積分から母数の異なるもう一つの第 1 種完全楕円積分に変換する．ガウス変換はこのことから，第 1 種完全楕円積分の変換に都合が良いことがわかる．ランデン変換の場合は，上昇ランデン変換の場合に $\phi_1 = \pi$ となるが，下降ランデン変換では一般に k の関数となって完全楕円積分にはならないため，不都合な場合がある．

18.3.2　ランデン変換

上昇ランデン変換では，式 (146) に対し，変数変換

$$\sin(2\psi-\theta)=k\sin\theta \tag{152}$$

により，積分を変換すると，母数はガウス変換の場合と同じく，式 (148) で変換される．このランデン変換（今の場合は上昇ランデン変換）では，母数は大きくなり，補母数は小さくなる．その結果，上で述べたガウス変換の場合と同じ表記を用いると，

$$F(\phi_0,k_0)=(1+k_1')F(\phi_1,k_1)=\frac{2}{1+k_0}F(\phi_1,k_1) \tag{153}$$

$$F(\phi_1,k_1)=\frac{1}{1+k_1'}F(\phi_0,k_0)=\frac{1+k_0}{2}F(\phi_0,k_0) \tag{154}$$

となる．ガウス変換の場合の式 (149)，(150) と比較すると，係数が 2 だけ違う以外は同じである．

＊　＊　＊　＊　＊

以上の準備をしておいて，k_1 を $2H'$，$2H^*$ で表そう．まず，$k=1/\sinh 2H\sinh 2H'<1$ の場合を考える．そうすると，

$$k_1'=\frac{1-k_0}{1+k_0}=\frac{\sinh 2H\sinh 2H'-1}{\sinh 2H\sinh 2H'+1} \tag{O-3.1-1}$$

$$k_1=\frac{2\sqrt{k_0}}{1+k_0}=\frac{2\sqrt{\sinh 2H\sinh 2H'}}{\sinh 2H\sinh 2H'+1} \tag{O-3.1-2}$$

である．

以下の変形には，式 (O-17) の $\sinh 2H\sinh 2H^*=1$，$\tanh 2H\cosh 2H^*=1$ を用いる．式 (O-3.1-1) の二乗は次の第１式のように変形できることに注意しよう．そうすると，

$$\begin{aligned}
k_1'^2&=\frac{-(\sinh 2H+\sinh 2H')^2+(\sinh^2 2H+1)(\sinh^2 2H'+1)}{-(\sinh 2H-\sinh 2H')^2+(\sinh^2 2H+1)(\sinh^2 2H'+1)}\\
&=\frac{-(\sinh 2H+\sinh 2H')^2+\cosh^2 2H\cosh^2 2H'}{-(\sinh 2H-\sinh 2H')^2+\cosh^2 2H\cosh^2 2H'}\\
&=\frac{(1+\sinh 2H'\sinh 2H^*)^2-(\cosh^* 2H\cosh 2H')^2}{(1-\sinh 2H'\sinh 2H^*)^2-(\cosh^* 2H\cosh 2H')^2}\\
&=\frac{(1+\sinh 2H'\sinh 2H^*+\cosh 2H^*\cosh 2H')(1+\sinh 2H'\sinh 2H^*-\cosh 2H^*\cosh 2H')}{(1-\sinh 2H'\sinh 2H^*+\cosh 2H^*\cosh 2H')(1-\sinh 2H'\sinh 2H^*-\cosh 2H^*\cosh 2H')}\\
&=\frac{\{(1+\cosh(2H'+2H^*)\}\{(1-\cosh(2H'-2H^*)\}}{\{(1+\cosh(2H'-2H^*)\}\{(1-\cosh(2H'+2H^*)\}}\\
&=\frac{\cosh^2(H'+H^*)\sinh^2(H'-H^*)}{\cosh^2(H'-H^*)\sinh^2(H'+H^*)}\\
&=\coth^2(H'+H^*)\tanh^2(H'-H^*)
\end{aligned} \tag{155}$$

となる．したがって，

$$k_1'=\coth(H'+H^*)|\tanh(H'-H^*)| \tag{O-3.1-1}$$

を得る．

次に，グーデルマン関数の定義と式 (O-2.2b) から，

$$\sin g=\operatorname{sech}2H^*,\quad \cos g=\frac{\cot g}{\operatorname{cosec} g}=\frac{\sinh 2H^*}{\cosh 2H^*} \tag{156}$$

$$\cos g'=\operatorname{sech}2H',\quad \sin g=\frac{\tan g'}{\sec g'}=\frac{\sinh 2H'}{\cosh 2H'} \tag{157}$$

$$\cos(g+g') = \cos g\cos g' - \sin g\sin g' = \frac{1}{\sinh 2H'\sinh 2H^*}(\sinh 2H^* - \sinh 2H') \tag{158}$$
$$\cos(g-g') = \cos g\cos g' + \sin g\sin g' = \frac{1}{\sinh 2H'\sinh 2H^*}(\sinh 2H^* + \sinh 2H') \tag{159}$$

したがって，

$$\frac{\cos(g+g')}{\cos(g-g')} = \frac{\sinh 2H^* - \sinh 2H'}{\sinh 2H^* + \sinh 2H'} = \frac{1/\sinh 2H\sinh 2H' - 1}{1/\sinh 2H\sinh 2H' + 1} = \frac{k_0-1}{k_0+1} \tag{160}$$

となり，

$$\frac{|\cos(g+g')|}{\cos(g-g')} = \frac{1-k_0}{1+k_0} \tag{O-3.1-2}$$

が得られる．低温域に関しても，同様にして同じ結果が得られる．

ガウス変換による周期 K および K' と $\tau = \mathrm{i}K'/K$ の変換をみておこう．ガウス変換では，式 (151) により，$\phi_1 = \phi = \pi/2$ であるから，$K_0 = F(\pi/2, k_0)$，$K_1 = F(\pi/2, k_1)$ で，かつ式 (149) から，ガウス変換すると，

$$F(\frac{\pi}{2}, k_0) = \frac{1}{1+k_0}F(\frac{\pi}{2}, k_1) \tag{161}$$

であるから，

$$K_0 = \frac{1}{1+k_0}K_1 \tag{162}$$

となる．k_1 は式 (148) で与えられる．すなわち，

$$K_1 = (1+k_0)K_0 \tag{O-3.1-3}$$

である．

次に K_0' と K_1' を考えてみよう．K_1' は，K_0 にガウス変換を施して k_0 が k_1 に変換されたときの $F(\pi/2, k_1')$ である．したがって，$F(\pi/2, k_0')$ から見たとき，母数は k_0' から k_1' に減少している．したがって，$F(\pi/2, k_0')$ にそのまま，ガウス変換を施しても $F(\pi/2, k_1')$ は得られない．

そこで，$F(\pi/2, k_1')$ にガウス変換を施した場合を考えてみよう．このとき，ガウス変換によって，母数は増加する．増加して，k_0' になるのかはすぐにはわからない．同じように，$F(\pi/2, k_0')$ にガウス逆変換を施す場合についても当てはまる．ガウス逆変換によって，k_0' は減少するが，k_1' になるのかはすぐにはわからない．

そこで，ガウス逆変換する場合を具体的に考えてみよう．これは，式 (148) および式 (149)，(150) で添字 1 と 0 を交換することで逆変換の関係式が得られる．式 (148) から k_0 と k_0' を解くと，

$$k_0 = \frac{1-k_1'}{1+k_1'}, \qquad k_0' = \frac{2\sqrt{k_1'}}{1+k_1'} \tag{163}$$

となるので，この式の添字 1 と 0 を交換して，

$$k_1 = \frac{1-k_0'}{1+k_0'}, \qquad k_1' = \frac{2\sqrt{k_0'}}{1+k_0'} \tag{164}$$

となる．これがガウス逆変換の母数変換式である．また，式 (149) で添字 1 と 0 を交換すると，

$$F(\phi_1, k_1) = \frac{1}{1+k_1}F(\phi_0, k_0) = \frac{1+k_0'}{2}F(\phi_0, k_0) \tag{165}$$

となる．したがって，$K(k_0')$ をガウス逆変換するとき，今の場合に母数は，式 (163) および式 (164) の k_0 が k_0' であることに十分注意すると，

$$\frac{1-k_0}{1+k_0}, \tag{166}$$

となる．これは，K_0 にガウス変換を施したときの k'_1 と同じである．つまり，ガウス逆変換によって，母数は k'_0 から k'_1 に変換されることがこれからわかる．このことは，ガウス変換によって，$K(k_0)$ が $K(k_1)$ に変換されるとき，それに伴って変化する $K(k'_0)$ と $K(k'_1)$ の関係は，$K(k'_1)$ が $K(k'_0)$ からガウス逆変換されるということである．つまり，ガウス変換とガウス逆変換が母数と補母数の間で双対の関係にある．

今の関係は，式 (165) から

$$K(k'_1) = \frac{1+k_0}{2} K(k'_0) = \frac{1}{1+k'_1} K(k'_0) \tag{167}$$

となるから，結局,

$$K'_1 = \frac{1+k_0}{2} K'_0 = \frac{1}{1+k'_1} K'_0 \tag{O-3.1-4}$$

が得られる．

式 (O-3.1-4) と式 (O-3.1-5) を用いると，

$$\tau_1 = \frac{\mathrm{i}K'_1}{K_1} = \frac{\mathrm{i}\frac{1}{2}(k_0+1)K'_0}{(k_0+1)K_0} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{i}K'_0}{K_0} = \frac{\tau_0}{2} = \frac{\tau}{2} \tag{O-3.1-5}$$

となる．

＊ ＊ ＊ ＊ ＊

式 (O-2.1b-2) から，

$$\mathrm{i}a_0 = \int_0^{2\mathrm{i}H^*} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-k_0^2\sin^2\theta}} = F(2\mathrm{i}H^*, k_0) \tag{168}$$

である．これにランデン変換を施すと，

$$\mathrm{i}a_0 = \frac{2}{1+k_0}\int_0^{\phi_1} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-k_1^2\sin^2\theta}} = \frac{2}{1+k_0}F(\phi_1, k_1) = \frac{2}{1+k_0}\mathrm{i}a_1 \tag{169}$$

となる．これから，式 (O-2.1b) より，

$$\mathrm{i}a_1 = \frac{1+k_0}{2}\mathrm{i}a_0 = \frac{1+k_0}{2}2\mathrm{i}yK'_0 = 2\mathrm{i}yK'_1 \tag{O-3.2}$$

となる．

式 (O-2.2b) から，

$$u_0 = u = \int_0^{\delta^*} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-k_0^2\sin^2\theta}} = F(\delta^*, k_0) \tag{170}$$

であるから，これにランデン変換を施すと，

$$u_0 = F(\delta^*, k_0) = \frac{2}{1+k_0}F(\phi_1, k_1) = \frac{2}{1+k_0}u_1 \tag{171}$$

である．ここで，ϕ_1 は式 (152) から

$$\sin(2\phi_1 - \delta^*) = k_0 \sin\delta^* \tag{172}$$

である．式 (O-2.2b-1) から $k_0\sin\delta^* = \sin\delta'$ であるから，

$$\sin(2\phi_1 - \delta^*) = \sin\delta' \tag{173}$$

となり，これから，

$$\mathrm{am}\,(u_1, k_1) = \phi_1 = \frac{1}{2}(\delta^* + \delta') \tag{O-3.3-2}$$

となる．

　同様に，式 (O-2.2b) から

$$\mathrm{i}a_0 = \int_0^{2\mathrm{i}H^*} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-k_0^2\sin^2\theta}} = F(2\mathrm{i}H^*, k_0) \tag{174}$$

であるから，これにランデン変換を施すと，

$$\mathrm{i}a_1 = F(2\mathrm{i}H^*, k_0) = \frac{2}{1+k_0}F(\phi_1, k_1) = \frac{2}{1+k_0}\mathrm{i}a_1 \tag{175}$$

となる．このとき，ϕ_1 は式 (152) から，

$$\sin(2\phi_1 - 2\mathrm{i}H^*) = k_0 \sin 2\mathrm{i}H^* \tag{176}$$

である．$k_0 = \sin 2\mathrm{i}H' / \sin 2\mathrm{i}H^*$ であるから，

$$\sin(2\phi_1 - 2\mathrm{i}H^*) = \sin 2\mathrm{i}H' \tag{177}$$

となり，

$$\phi_1 = \mathrm{i}(H^* + H') \tag{178}$$

である．結局，

$$\mathrm{am}\,(\mathrm{i}a_1, k_1) = \phi_1 = \mathrm{i}(H^* + H') \tag{O-3.3-1}$$

となる．

＊　＊　＊　＊　＊

　ここで，第１種不完全楕円積分

$$\int_0^{\varphi} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

に，変数変換

$$\sin\varphi = \frac{\cos\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} \tag{179}$$

を施して変数を φ から θ に変換すると ([9], p.32)，

$$\begin{aligned}\int_0^{\varphi} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} &= -\int_{\pi/2}^{\theta} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} - \int_0^{\theta} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} \\ &= K(k) - u = K - u\end{aligned} \tag{180}$$

という関係が成り立つ．[7]ここで，$u = F(\theta, k)$ である．上の関係式で，母数を k_1 としよう．そうすると，$u_1 = F(\theta, k_1)$ として，

$$F(\varphi, k_1) = K_1 - u_1 \tag{181}$$

という関係が成り立つ．

---

[7]式 (168) から，

$$\sin\theta = \frac{\cos\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \tag{F-1}$$

が成り立つ．同じく，式 (168) から，

$$\cos\varphi = \frac{k'\sin\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} \tag{F-2}$$

この式で，$u_1 = \mathrm{i}a_1$ のとき，つまり，$\mathrm{i}a_1 = F(\theta, k_1)$ のとき，

$$\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a_1, k_1) = \sin\theta \tag{182}$$

$$\mathrm{cn}\,(\mathrm{i}a_1, k_1) = \cos\theta \tag{183}$$

かつ，式 (O-3.3-1) から

$$\mathrm{sn}\,(ia_1, k_1) = \mathrm{i}\sinh(H' + H^*) \tag{184}$$

$$\mathrm{cn}\,(ia_1, k_1) = \cosh(H' + H^*) \tag{185}$$

が成り立つので,

$$\sin\theta = \mathrm{i}\sinh(H' + H^*) \tag{186}$$

$$\cos\theta = \cosh(H' + H^*) \tag{187}$$

である．また，同じく式 (181) で $u_1 = \mathrm{i}a_1$ として，

$$\mathrm{sn}\,(K_1 - \mathrm{i}a_1) = \sin\varphi \tag{188}$$

$$\mathrm{cn}\,(K_1 - \mathrm{i}a_1) = \cos\varphi \tag{189}$$

が成り立つ．前頁脚注の式 (F1) に式 (186)，(187) を代入すると，

$$\sin\varphi = \frac{\cos\theta}{\sqrt{1 - k_1^2 \sin^2\theta}} = \frac{\cosh(H' + H^*)}{\sqrt{1 + k_1^2 \sinh^2(H' + H^*)}} \tag{190}$$

となる．一方，式 (O-3.1-1) から

$$\begin{aligned} k_1^2 &= 1 - k'^2 = 1 - \coth^2(H' + H^*)\tanh^2(H' - H^*) \\ &= \frac{\sinh^2(H' + H^*)\cosh^2(H' - H^*) - \cosh^2(H' + H^*)\sinh^2(H' - H^*)}{\sinh^2(H' + H^*)\cosh^2(H' - H^*)} \end{aligned} \tag{191}$$

となる．式 (190) を二乗してから，これに式 (191) を代入すると，

$$\begin{aligned} \sin^2\varphi &= \frac{\cosh^2(H' + H^*)}{1 + k_1^2 \sinh(H' + H^*)} \\ &= \frac{\cosh^2(H' + H^*)\cosh^2(H' - H^*)}{\cosh^2(H' - H^*) + \sinh(H' + H^*)\cosh^2(H' - H^*) - \cosh^2(H' + H^*)\sinh(H' - H^*)} \\ &= \frac{\cosh^2(H' + H^*)\cosh^2(H' - H^*)}{\cosh^2(H' - H^*)\{1 + \sinh^2(H' + H^*)\} - \cosh^2(H' + H^*)\sinh^2(H' - H^*)} \\ &= \frac{\cosh^2(H' - H^*)}{\cosh^2(H' - H^*) - \sinh^2(H' - H^*)} = \cosh^2(H' - H^*) \\ &= \cos^2(\mathrm{i}[H' - H^*]) \end{aligned} \tag{192}$$

が成り立つ．ここで，式 (168) を微分して，式 (F-2) を代入すると，

$$\begin{aligned} \cos\varphi \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\theta} &= \frac{-(1 - k^2)\sin\theta}{(1 - k^2 \sin^2\theta)^{3/2}} = -\frac{k'^2 \sin^2\theta}{1 - k^2 \sin^2\theta} \frac{1}{\sin\theta} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\theta}} \\ &= -\frac{\cos^2\varphi}{\sin\theta} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\theta}} \end{aligned} \tag{F-3}$$

となるから，これを整理すると

$$\frac{\sin\theta}{\cos\varphi} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\theta} = -\frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\theta}} \tag{F-4}$$

となる．これに式 (F-1) を代入すると，

$$\frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\theta} = -\frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\theta}} \tag{F-5}$$

となる．これを積分すると，式 (180) の第 1 式が得られる．積分範囲は φ が 0 から φ まで，対して θ は $\pi/2$ から θ までである．

となる．$0 < \varphi < \pi/2$ とすると，

$$\sin\varphi = \cos(\mathrm{i}[H' - H^*]) \tag{193}$$

したがって，

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \mathrm{i}|H' - H^*| \tag{194}$$

となり，式 (188) より，

$$\mathrm{am}\,(K_1 - \mathrm{i}a_1) = \frac{\pi}{2} - \mathrm{i}|H' - H^*| \tag{O-3.4-1}$$

を得る．

* * * * *

式 (180) で $u = u_1$ とする．そうすると，式 (O-3.3-2) より，

$$\sin\theta = \mathrm{sn}\,u_1 = \sin\frac{\delta' + \delta^*}{2}, \qquad \cos\theta = \mathrm{cn}\,u_1 = \cos\frac{\delta' + \delta^*}{2}, \tag{195}$$

が成り立つ．

一方，式 (O-2.2b) から

$$\sin\delta^* = \mathrm{sn}\,u_0 \qquad \sin\delta' = k_0\,\mathrm{sn}\,u_0 \tag{196}$$

である．したがって，

$$k_0 = \frac{\sin\delta'}{\mathrm{sn}\,u_0} = \frac{\sin\delta'}{\sin\delta^*} \tag{197}$$

である．これを式 (148) に代入すると，次のように変形できる．

$$k_1' = \frac{1 - k_0}{1 + k_0} = \frac{\sin\delta^* - \sin\delta'}{\sin\delta^* + \sin\delta'} \tag{198}$$

$$\begin{aligned}
k_1^2 &= 1 - k_1'^2 \\
&= 1 - \left(\frac{\sin\delta^* - \sin\delta'}{\sin\delta^* + \sin\delta'}\right)^2 = \frac{4\sin\delta^*\sin\delta'}{(\sin\delta^* + \sin\delta')^2} \\
&= \frac{4\sin\dfrac{\delta^*}{2}\sin\dfrac{\delta'}{2}\cos\dfrac{\delta^*}{2}\cos\dfrac{\delta'}{2}}{\sin^2\dfrac{\delta' + \delta^*}{2}\cos^2\dfrac{\delta' - \delta^*}{2}} \\
&= \frac{\left(\cos\dfrac{\delta' + \delta^*}{2} + \cos\dfrac{\delta' - \delta^*}{2}\right)\left(\cos\dfrac{\delta' - \delta^*}{2} - \cos\dfrac{\delta' + \delta^*}{2}\right)}{\sin^2\dfrac{\delta' + \delta^*}{2}\cos^2\dfrac{\delta' - \delta^*}{2}} \\
&= \frac{\cos^2\dfrac{\delta' - \delta^*}{2} - \cos^2\dfrac{\delta' + \delta^*}{2}}{\sin^2\dfrac{\delta' + \delta^*}{2}\cos^2\dfrac{\delta' - \delta^*}{2}}
\end{aligned} \tag{199}$$

ここで，式 (179) から，

$$\sin^2\varphi = \frac{\cos^2\theta}{1 - k^2\sin^2\theta} \tag{200}$$

となり，いま母数が k_1 の場合を考えているので，式 (195) で k を k_1 とし，これに式 (195) を代入すると，

$$\sin^2\varphi = \frac{\cos^2\dfrac{\delta' + \delta^*}{2}\cos^2\dfrac{\delta' - \delta^*}{2}}{\cos^2\dfrac{\delta' - \delta^*}{2} - \cos^2\dfrac{\delta' - \delta^*}{2} + \cos^2\dfrac{\delta' + \delta^*}{2}} = \cos^2\frac{\delta' - \delta^*}{2} \tag{201}$$

となる．したがって，

$$\sin\varphi = \cos\frac{\delta' - \delta^*}{2} \tag{202}$$

であるから，

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{|\delta' - \delta^*|}{2} \tag{203}$$

となり，式 (180) から，

$$\mathrm{am}\,(K_1 - u_1) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}|\delta' - \delta^*| \tag{O-3.4-2}$$

が得られる．

* * * * *

式 (3.4) の第 3 式は式 (2.6) と関係していると思われるが，この式も導かれない．

* * * * *

次に，式 (O-3.5) を導こう．

式 (O-2.2) とグーデルマン関数の定義から，

$$\begin{aligned} \sin g &= \frac{1}{\cosh 2H^*}, \quad \cos g = \frac{\sinh 2H'}{\cosh 2H'} \\ \cos g' &= \frac{1}{\cosh 2H'}, \quad \sin g' = \frac{\sinh 2H^*}{\cosh 2H^*} \end{aligned} \tag{204}$$

が成り立つ．式 (O-3.3-1) から，

$$\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a_1) = \sin(\mathrm{i}[H' + H^*]) = \mathrm{i}\sinh(H' + H^*) \tag{205}$$

$$\mathrm{cn}\,(\mathrm{i}a_1) = \cos(\mathrm{i}[H' + H^*]) = \cosh(H' + H^*) \tag{206}$$

である．また，式 (O-3.4-1) から，

$$\mathrm{sn}\,(K_1 - \mathrm{i}a_1) = \cos(\mathrm{i}|H' - H^*|) = \cosh(H' - H^*) \tag{207}$$

$$\mathrm{cn}\,(K_1 - \mathrm{i}a_1) = \sin(\mathrm{i}|H' - H^*|) = \mathrm{i}\sinh|H' + H^*| \tag{208}$$

である．一方，次の関係が一般に成り立つ (式 (107), [8], p.245).

$$\mathrm{sn}\,(u + K) = \frac{\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{dn}\,u} \tag{209}$$

$$\mathrm{cn}\,(u + K) = -k'\frac{\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{dn}\,u} \tag{210}$$

$$\mathrm{dn}\,(u + K) = \frac{k'}{\mathrm{dn}\,u} \tag{211}$$

式 (209)，(210) で，母数を k_1 とし，$u = -\mathrm{i}a_1$ とおくと，それぞれの左辺は式 (207)，(208) と一致し，cn，dn が偶関数，sn が奇関数であることに注意すると，

$$\frac{\mathrm{cn}\,(\mathrm{i}a_1)}{\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a_1)} = \cosh(H' - H^*) \tag{212}$$

$$k_1'\frac{\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a_1)}{\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a_1)} = \mathrm{i}\sinh|H' - H^*| \tag{213}$$

となる．

低温域 $H' > H^*$ の場合を考えよう．式 (205)，(206)，および式 (212)，(213) から，

$$\frac{1}{2}(\cosh 2H' + \cosh 2H^*) = \cosh(H'+H^*)\cosh(H'-H^*) = \frac{\mathrm{cn}^2\,(\mathrm{i}a_1)}{\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a_1)} \tag{214}$$

$$\frac{1}{2}(\cosh 2H' - \cosh 2H^*) = \sinh(H'+H^*)\sinh(H'-H^*) = -k_1'\frac{\mathrm{sn}^2\,(\mathrm{i}a_1)}{\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a_1)} \tag{215}$$

となる．式 (214)，(215) の差と和をとることにより，

$$\cosh 2H' = \frac{\mathrm{cn}^2\,(\mathrm{i}a_1) + k_1'\,\mathrm{sn}^2\,(\mathrm{i}a_1)}{\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a_1)} \tag{216}$$

$$\cosh 2H^* = \frac{\mathrm{cn}^2\,(\mathrm{i}a_1) - k_1'\,\mathrm{sn}^2\,(\mathrm{i}a_1)}{\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a_1)} \tag{217}$$

となる．同様にして，

$$\frac{1}{2}(\sinh 2H' + \sinh 2H^*) = \sinh(H'+H^*)\cosh(H'-H^*) = -\mathrm{i}\,\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a_1)\frac{\mathrm{cn}\,(\mathrm{i}a_1)}{\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a_1)} \tag{218}$$

$$\frac{1}{2}(\sinh 2H' - \sinh 2H^*) = \sinh(H'-H^*)\cosh(H'+H^*) = -k_1'\,\mathrm{cn}\,(\mathrm{i}a_1)\frac{\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a_1)}{\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a_1)} \tag{219}$$

となる．式 (218)，(219) の差と和をとることにより，

$$\sinh 2H' = -\mathrm{i}(1+k_1')\frac{\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a_1)\,\mathrm{cn}\,(\mathrm{i}a_1)}{\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a_1)} \tag{220}$$

$$\sinh 2H^* = -\mathrm{i}(1-k_1')\frac{\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a_1)\,\mathrm{cn}\,(\mathrm{i}a_1)}{\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a_1)} \tag{221}$$

となる．以上で，ヤコビの楕円関数による表示ができたので，$\cos(g-g')$ と $\sin(g-g')$ をヤコビの楕円関数で表すことをしよう．式 (204) を用いると，

$$\begin{aligned}\cos(g-g') &= \cos g\cos g' + \sin g\sin g' = \frac{1}{\cosh 2H'}\frac{\sinh 2H^*}{\cosh 2H^*} + \frac{1}{\cosh 2H^*}\frac{\sinh 2H'}{\cosh 2H'} \\ &= \frac{\sinh 2H' + \sinh 2H^*}{\cosh 2H'\cosh 2H^*}\end{aligned} \tag{222}$$

となる．ここで，式 (216)，(217)，(220)，(221) から

$$\sinh 2H' + \sinh 2H^* = \frac{-2\mathrm{i}\,\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a_1)\,\mathrm{cn}\,(\mathrm{i}a_1)}{\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a_1)} \tag{223}$$

$$\begin{aligned}\cosh 2H'\cosh 2H^* &= \frac{\mathrm{cn}^4\,(\mathrm{i}a_1) - k_1'^2\,\mathrm{cn}^4\,(\mathrm{i}a_1)}{\mathrm{dn}^2\,(\mathrm{i}a_1)} = \frac{\mathrm{cn}^4\,(\mathrm{i}a_1) - \mathrm{sn}^4\,(\mathrm{i}a_1) + k_1^2\,\mathrm{sn}^4\,(\mathrm{i}a_1)}{\mathrm{dn}^2\,(\mathrm{i}a_1)} \\ &= \frac{\mathrm{cn}^2\,(\mathrm{i}a_1) - \mathrm{sn}^2\,(\mathrm{i}a_1) + k_1^2\,\mathrm{sn}^4\,(\mathrm{i}a_1)}{\mathrm{dn}^2\,(\mathrm{i}a_1)} = \frac{\mathrm{cn}^2\,(\mathrm{i}a_1) - \mathrm{sn}^2\,(\mathrm{i}a_1)\,\mathrm{dn}^2\,(\mathrm{i}a_1)}{\mathrm{dn}^2\,(\mathrm{i}a_1)}\end{aligned} \tag{224}$$

となる．式 (223)，(224) を式 (222) に代入して，ヤコビの楕円関数の倍角定理 (98)，(99) と比較すること，および式 (O-3.2) を用いることにより，

$$\mathrm{i}\cos(g-g') = \frac{2\,\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a_1)\,\mathrm{cn}\,(\mathrm{i}a_1)\,\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a_1)}{\mathrm{cn}^2\,(\mathrm{i}a_1) - \mathrm{sn}^2\,(\mathrm{i}a_1)\,\mathrm{dn}^2\,(\mathrm{i}a_1)} = \mathrm{sc}\,(2\mathrm{i}a_1) = \mathrm{sc}\,(4\mathrm{i}yK_1') \tag{O-3.5-1}$$

を得る．

高温域の $H' < H^*$ の場合は，H' と H^* を交換した場合に相当するので，式 (222) により結果は変わらない．

次に，同様にして，

$$
\begin{aligned}
\sin(g-g') = \sin g \cos g' - \cos g \sin g' &= \frac{1}{\cosh 2H^* \cosh 2H'} - \frac{\sinh 2H^* \sinh 2H'}{\cosh 2H^* \cosh 2H'} \\
&= \frac{1-\sinh 2H^* \sinh 2H'}{\cosh 2H^* \cosh 2H'} \\
&= \frac{\mathrm{dn}^2\,(\mathrm{i}a_1) + k_1^2\,\mathrm{sn}^2\,(\mathrm{i}a_1)\,\mathrm{cn}^2\,(\mathrm{i}a_1)}{\mathrm{cn}^2\,(\mathrm{i}a_1) - \,\mathrm{sn}^2\,(\mathrm{i}a_1)\,\mathrm{dn}^2\,(\mathrm{i}a_1)} \\
&= \frac{1-k_1^2\,\mathrm{sn}^4\,(\mathrm{i}a_1)}{\mathrm{cn}^2\,(\mathrm{i}a_1) - \,\mathrm{sn}^2\,(\mathrm{i}a_1)\,\mathrm{dn}^2\,(\mathrm{i}a_1)} \\
&= \mathrm{nc}\,(2\mathrm{i}a_1)
\end{aligned}
\tag{O-3.5-2}
$$

を得る．

また，前の式から直接に，

$$
\begin{aligned}
\sin(g+g') = \sin g \cos g' + \cos g \sin g' &= \frac{1}{\cosh 2H^* \cosh 2H'} + \frac{\sinh 2H^* \sinh 2H'}{\cosh 2H^* \cosh 2H'} \\
&= \frac{1+\sinh 2H^* \sinh 2H'}{\cosh 2H^* \cosh 2H'} \\
&= \frac{\mathrm{dn}^2\,(\mathrm{i}a_1) - k_1^2\,\mathrm{sn}^2\,(\mathrm{i}a_1)\,\mathrm{cn}^2\,(\mathrm{i}a_1)}{\mathrm{cn}^2\,(\mathrm{i}a_1) - \,\mathrm{sn}^2\,(\mathrm{i}a_1)\,\mathrm{dn}^2\,(\mathrm{i}a_1)} \\
&= \mathrm{dc}\,(2\mathrm{i}a_1)
\end{aligned}
\tag{O-3.5-3}
$$

を得る．

$\sin(g-g')$ と $\sin(g+g')$ の導出過程からわかるように，両方共，H' と H^* に関して対照であるから，上の式は，両方の温度域で成り立つ．

＊　＊　＊　＊　＊

式 (O-3.6) は高温域と低温域の両方に共通する統一表記に関することである．高温域と低温域でそれぞれ表式が異なるれば取り扱いが二重になって煩瑣となるから，両方の温度領域でも 1 つの k で表すことができれば都合がよい．両方の温度領域は，H' と H^*，δ' と δ^* の交換により，変換することができる．一方，k は高温域では，$k = \sinh 2H' / \sinh 2H^* < 1$，高温域では，$k = \sinh 2H^* / \sinh 2H' < 1$ となって対称的ではない．ところが，ランデン変換（あるいはガウス変換）により母数を k_1 に変換すれば，式 (O-3.1-1) のように対称的になって，両方の領域で共通に使える母数になることがわかる．式 (O-3.6) では式 (O-3.1-1) の絶対値を外して k_1'' と新しく定義している．

18.4 Discussions of the Parameters

式 (O-4.1) は，ヤコビの虚数変換の式 (104)-(106) に式 (O-1.4) を適用すれば得られる．

ヤコビの虚数変換式を用いると、以下のように，パラメータの計算ができる式を導くことができる．

式 (104) から，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{sn}\,(a_0, k_0') = -\mathrm{i}\frac{\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a_0, k_0)}{\mathrm{cn}\,(\mathrm{i}a_0, k_0)} &= -\mathrm{i}\frac{\sin 2\mathrm{i}H'}{\cos 2\mathrm{i}H'} = \frac{\sinh 2H'}{\cosh 2H'} \\
&= \tanh 2H' = \sin\ \mathrm{gd}\, 2H' = \sin g'
\end{aligned}
\tag{225}
$$

となる．したがって，

$$
\mathrm{am}\,(a_0, k_0') = \ \mathrm{gd}\, 2H' = g' \tag{O-4.2-1}
$$

を得る．これから，$k_0' = (1-k_0^2)^{1/2} = (1-\sin^2\Theta_0)^{1/2} = \cos\Theta_0$ として，

$$a_0 = \int_0^{g'} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-\cos^2\Theta_0\sin^2\theta}} = F(g', \cos\Theta_0) \tag{O-4.2-2}$$

となる．

これと同様に有用な公式はランデン変換で導かれる．また，そこから楕円角 (elliptic angle) という不変数が出てくる．式 (O-3.4)，(O-3.5) から以下のようにしてこれが導かれる．

まず，$k_1' = \cos\Theta_1$ であることに注意して，ヤコビの虚数変換と式 (O-3.3-1) から，

$$\begin{aligned}\mathrm{sn}\,(a_1, k_1') &= -\mathrm{i}\frac{\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a_1, k_1)}{\mathrm{cn}\,(\mathrm{i}a_1, k_1)} = -\mathrm{i}\frac{\sin(\mathrm{i}[H'+H^*])}{\cos(\mathrm{i}[H'+H^*])} = \frac{\sinh(H'+H^*)}{\cosh(H'+H^*)} \\ &= \tanh(H'+H^*) = \sin\ \mathrm{gd}\,(H'+H^*)\end{aligned} \tag{226}$$

となる．したがって，

$$\mathrm{am}\,(a_1, \cos\Theta_1) = \ \mathrm{gd}\,(H'+H^*) \tag{O-4.3}$$

を得る．また，式 (O-3.2) から，$a_1 = 2yK_1'$ であるので，上の式から，

$$\mathrm{am}\,(a_1, k_1') = \ \mathrm{am}\,(2yK_1', k_1') \tag{227}$$

である．

また，同様にしてヤコビの虚数変換と式 (O-3.5-2) を用いて，

$$\mathrm{cn}\,(2a_1, \cos\Theta_1) = \frac{1}{\mathrm{cn}\,(2\mathrm{i}a_1, k_1)} = \sin(g-g') \tag{228}$$

であるので，

$$\mathrm{am}\,(2a_1, \cos\Theta_1) = \ \mathrm{am}\,(4yK_1', k_1') = \frac{\pi}{2} - g + g' \tag{O-4.4}$$

が得られる．

* * * * *

Onsager によると，もう 1 段階上のランデン変換は，ヤコビの楕円関数を楕円テータ関数の比で表した場合に上手く表現されるという．ここで述べられているのは，臨界点に比較的近い温度領域での数値計算に使われる展開式に関わるものである．

まず，母数 k_2' は次のように表される．

$$k_2' = \frac{1-k_1}{1+k_1} \tag{229}$$

より，

$$\cos\Theta_2 = \frac{1-\sin\Theta_1}{1+\sin\Theta_1} \tag{230}$$

となるから，$\sin\Theta_1$ を解くと，

$$\sin\Theta_1 = \frac{1-\cos\Theta_2}{1+\cos\Theta_2} = \frac{\sin^2\frac{\Theta_2}{2}}{\cos^2\frac{\Theta_2}{2}} = \tan^2\frac{\Theta_2}{2} \tag{231}$$

となる．一方，式 (O-3.1) と式 (O-2.2b) より，

$$\begin{aligned}\sin\Theta_1 &= \frac{2\sqrt{\sinh 2H\sinh 2H'}}{1+\sinh 2H\sinh 2H'} = \frac{2\sqrt{\tan g\tan g'}}{1+\tan g\tan g'} = \frac{\sqrt{\sin 2g\sin 2g'}}{\cos g\cos g' + \sin g\sin g'} \\ &= \frac{\sqrt{\sin 2g\sin 2g'}}{\cos(g-g')}\end{aligned} \tag{232}$$

となって，式 (231)，(232) から，

$$\tan^2\frac{\Theta_2}{2}=\sin\Theta_1=\frac{\sqrt{\sin 2g\sin 2g'}}{\cos(g-g')} \tag{O-4.5a}$$

を得る．この式は原論文で誤植がある．

次の式 (O-4.5b) と (O-4.5c) で，それぞれ左辺に $\mathrm{sn}\,(a_2,\cos\Theta_2)$ と $\mathrm{sn}\,(2a_2,\cos\Theta_2)$ があるが，$\mathrm{sn}\,(2a_2,\cos\Theta_2)$ と $\mathrm{sn}\,(4a_2,\cos\Theta_2)$ でなければ右辺を導けない．実際，式 (O-1.3) にあるヤコビの楕円関数と楕円テータ関数の関係，さらに，$a_2=2yK_2'$ と $\vartheta_3^2=2K_2'/\pi$(母数が k_2' だから) の関係から，$a_2/\vartheta_3^2=(2yK_2')/(2K_2'/\pi)=\pi y$ となることに注意すれば,

$$\mathrm{sn}\,(a_2,k_2)=\frac{1}{\sqrt{k_2'}}\frac{\vartheta_1(\pi y|\tau_2')}{\vartheta_4(\pi y|\tau_2')} \tag{233}$$

となり，式 (O-4.5b) とは相容れないからである．したがって，ここでは，式 (O-4.5b) と (O-4.5b) の左辺を $\mathrm{sn}\,(2a_2,\cos\Theta_2)$ および $\mathrm{sn}\,(4a_2,\cos\Theta_2)$ として計算しよう．

ランデン変換によって a_2 は a_0 と，

$$a_2=\frac{1+k_1}{2}a_1=\frac{(1+k_1)}{2}\frac{(1+k_0)}{2}a_0,\quad a_0=2yK_0' \tag{234}$$

という関係をもつ．母数 k_2 は,

$$\cos\Theta_2=k_2'=\frac{1-k_1}{1+k_1},\quad k_1=\frac{2\sqrt{k_0}}{1+k_0} \tag{235}$$

という関係にある．また，ガウス変換では，母数の変換はランデン変換と同じだから,

$$K_2=(1+k_1)K_1=(1+k_1)(1+k_0)K_0, \tag{236}$$

$$K_2'=\frac{1+k_1}{2}K_1'=\frac{(1+k_1)}{2}\frac{(1+k_0)}{2}K_0' \tag{237}$$

である．したがって,

$$\tau_2=\frac{\mathrm{i}K_2'}{K_2}=\frac{1}{4}\frac{\mathrm{i}K_0'}{K_0}=\frac{\tau_0}{4} \tag{238}$$

となる．母数が k_2' のときは,

$$\tau_2'=\frac{\mathrm{i}K_2}{K_2'}=-\frac{K_2}{\mathrm{i}K_2'}=-\frac{1}{\tau_2} \tag{239}$$

である．一方で,

$$\tau_2'=\frac{\mathrm{i}K_2}{K_2'}=\frac{\mathrm{i}(1+k_1')(1+k_0')K_0}{\frac{1}{4}(1+k_1')(1+k_0')K_0'}=-\frac{4K_0}{\mathrm{i}K_0'}=-\frac{4}{\tau_0} \tag{240}$$

である．

式 (O-1.3-1) から，母数が k_2' のとき,

$$\mathrm{sn}\,(u,k_2')=\frac{1}{\sqrt{k_2'}}\frac{\vartheta_1(u/\vartheta_3^2|\tau_2')}{\vartheta_4(u/\vartheta_3^2|\tau_2')}=\frac{1}{\sqrt{k_2'}}\frac{\vartheta_1(\pi u/2K_2'|-4/\tau_0)}{\vartheta_4(\pi u/2K_2'|-4/\tau_0)} \tag{241}$$

である．したがって，$u=2a_2=4yK_2'$ のとき，$k_2'=\cos\Theta_2$ であるから,

$$(\cos\Theta_2)^{1/2}\,\mathrm{sn}\,(2a_2,\cos\Theta_2)=\frac{\vartheta_1(2\pi y|-4/\tau_0)}{\vartheta_4(2\pi y|-4/\tau_0)} \tag{O-4.5b-1}$$

となる．これにランデン変換を施す.

楕円テータ関数に関するランデン変換をまとめておこう (NIST Digital Library of Mathematic Functions [14]).

$$A = \frac{1}{\vartheta_4(0|2\tau)} \tag{242}$$

$$\vartheta_1(2z|2\tau) = A\vartheta_1(z|\tau)\vartheta_2(z|\tau) \tag{243}$$

$$\vartheta_2(2z|2\tau) = A\vartheta_1(\frac{1}{4} - z|\tau)\vartheta_1(\frac{1}{4} + z|\tau) \tag{244}$$

$$\vartheta_3(2z|2\tau) = A\vartheta_3(\frac{1}{4} - z|\tau)\vartheta_3(\frac{1}{4} + z|\tau) \tag{245}$$

$$\vartheta_4(2z|2\tau) = A\vartheta_3(z|\tau)\vartheta_4(z|\tau) \tag{246}$$

式 (243) と (246) を式 (O-4.5b-1) の右辺に適用すると,

$$(\cos\Theta_2)^{1/2}\,\mathrm{sn}\,(2a_2, \cos\Theta_2) = \frac{\vartheta_1(\pi y| - 2/\tau_0)\vartheta_2(\pi y| - 2/\tau_0)}{\vartheta_3(\pi y| - 2/\tau_0)\vartheta_4(\pi y| - 2/\tau_0)} = \frac{\dfrac{\vartheta_1(\pi y| - 2/\tau_0)}{\vartheta_4(\pi y| - 2/\tau_0)}\dfrac{\vartheta_2(\pi y| - 2/\tau_0)}{\vartheta_4(\pi y| - 2/\tau_0)}}{\dfrac{\vartheta_3(\pi y| - 2/\tau_0)}{\vartheta_4(\pi y| - 2/\tau_0)}} \tag{247}$$

となる．ヤコビの楕円関数の母数 k と楕円テータ関数の τ は $K(k)$ と $K(k')$ を通して対応している．すなわち, k_0 と τ_0, k'_0 と τ'_0, 以下, k_1 と τ_1, k'_1 と τ'_1 という具合である．いま, 楕円テータ関数のパラメータは $-2/\tau_0$ であるから,

$$-\frac{2}{\tau_0} = -2\frac{K_0}{\mathrm{i}K'_0} = \frac{\mathrm{i}(k'_0 + 1)K_0}{\frac{1}{2}(k'_0 + 1)K_0} = \frac{\mathrm{i}K_1}{K'_1} = \tau'_1 \tag{248}$$

となる．これはヤコビの楕円関数の母数が k'_1 に対応していることを示している．

一方, ヤコビの楕円関数の引数 u のほうは,

$$u = \vartheta_3^2 z = (\pi y)(2K'_1/\pi) = 2yK'_1 = a_1 \tag{249}$$

である．これを式 (247) の第 3 式に代入し, 式 (O-1.3) を用いると,

$$(\cos\Theta_2)^{1/2}\,\mathrm{sn}\,(2a_2, \cos\Theta_2) = \frac{\sqrt{k'_1}\,\mathrm{sn}\,(a_1, k'_1)\sqrt{\dfrac{k'_1}{k_1}}\,\mathrm{cn}\,(a_1, k'_1)}{\dfrac{1}{\sqrt{k_1}}\,\mathrm{dn}\,(a_1, k'_1)} = k'_1\frac{\mathrm{sn}\,(a_1, k'_1)\,\mathrm{cn}\,(a_1, k'_1)}{\mathrm{dn}\,(a_1, k'_1)} \tag{250}$$

となる．これにヤコビの虚数変換式 (104)–(106) を適用すると,

$$-\mathrm{i}k'_1\frac{\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a_1, k_1)}{\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a_1, k_1)\,\mathrm{cn}\,(\mathrm{i}a_1, k_1)} \tag{251}$$

となる．この式を以下のような関係を用いて H' と H^* の関数に変換する．まず, 式 (O-3.3-1) より,

$$\mathrm{cn}\,(\mathrm{i}a_1, k_1) = \cos(\mathrm{i}[H' + H^*]) = \cosh(H' + H^*) \tag{252}$$

である．さらに, ヤコビ楕円関数の四半周期シフト (式 (107), [8](p. 245)) により,

$$\mathrm{cn}\,(K - u) = k'\frac{\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{dn}\,u} \tag{253}$$

であるから, これを適用すると,

$$\frac{\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a_1, k'_1)}{\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a_1, k_1)} = \frac{1}{k'_1}\,\mathrm{cn}\,(K_1 - \mathrm{i}a_1) \tag{254}$$

という関係式が成り立つ．

また，式 (O-3.4-1) から，

$$\mathrm{cn}\,(K_1 - \mathrm{i}a_1) = \cos(\frac{\pi}{2} - \mathrm{i}|H' - H^*|) = \sin(\mathrm{i}|H' - H^*|) = \mathrm{i}\sinh|H' - H^*| \tag{255}$$

である．式 (253) 式, (254) を式 (250) に代入すると，

$$(\cos\Theta_2)^{1/2}\,\mathrm{sn}\,(2a_2, \cos\Theta_2) = \frac{\sinh|H' - H^*|}{\cosh(H' + H^*)} \tag{O-4.5b-2}$$

を得る．

式 (O-4.5b) の後半は以下のようにして得られる．

式 (126)，(127)，(O-2.2a-2) より，

$$\tan g' = \sinh 2H' \tag{256}$$

$$\cot g = \sinh 2H^* \tag{257}$$

$$\sec g' = \cosh 2H' \tag{258}$$

$$\mathrm{cosec}\, g = \sinh 2H^* \tag{259}$$

である．したがって，

$$\begin{aligned}\cosh(2H' - 2H^*) &= \cosh 2H' \cosh 2H^* - \sinh 2H' \sinh 2H^* \\ &= \frac{1}{\cos g' \sin g} - \frac{\sin g' \cos g}{\cos g' \sin g} = \frac{1 - \sin g' \cos g}{\cos g' \sin g}\end{aligned} \tag{260}$$

となる．これから，

$$\cosh(2H' - 2H^*) - 1 = \frac{1 - \cos g' \sin g - \sin g' \cos g}{\cos g' \sin g} = \frac{1 - \sin(g + g')}{\cos g' \sin g} \tag{261}$$

となる．同様にして，

$$\cosh(2H' + 2H^*) + 1 = \frac{1 + \cos g' \sin g + \sin g' \cos g}{\cos g' \sin g} = \frac{1 + \sin(g + g')}{\cos g' \sin g} \tag{262}$$

となる．これから，

$$\frac{\cosh(2H' - 2H^*) - 1}{\cosh(2H' + 2H^*) + 1} = \frac{1 - \sin(g - g')}{1 + \sin(g + g')} = \frac{1 - \cos(\frac{\pi}{2} - g - g')}{1 + \cos(\frac{\pi}{2} - g - g')} \tag{263}$$

となるので，結局，

$$\frac{\sinh^2(H' - H^*)}{\cosh^2(H' + H^*)} = \frac{\sin^2\frac{1}{2}(g + g' - \frac{\pi}{2})}{\cos^2\frac{1}{2}(g + g' - \frac{\pi}{2})} = \tan^2\frac{1}{2}(g + g' - \frac{\pi}{2}) \tag{264}$$

となり，

$$\frac{\sinh|H' - H^*|}{\cosh(H' + H^*)} = \tan\frac{1}{2}(g + g' - \frac{\pi}{2}) \tag{O-4.5b-3}$$

を得る．

* * * * *

$\mathrm{sn}\,(4a_2, k_2')$ の場合も同様にして得られる．ランデン変換 (243)，(246) により，

$$(\cos\Theta_2)^{1/2}\,\mathrm{sn}\,(4a_2, \cos\Theta_2) = \frac{\vartheta_1(4\pi a_2/K_2'|\tau_2')}{\vartheta_4(4\pi a_2/K_2'|\tau_2')} = \frac{\vartheta_1(4\pi y| - 4/\tau_0)}{\vartheta_4(4\pi y| - 4/\tau_0)} \tag{O-4.5c-1}$$

$$\begin{aligned}&= \frac{\vartheta_1(2\pi y| - 2/\tau_0)\vartheta_2(2\pi y| - 2/\tau_0)}{\vartheta_3(2\pi y| - 2/\tau_0)\vartheta_4(2\pi y| - 2/\tau_0)} \\ &= \frac{\dfrac{\vartheta_1(2\pi y| - 2/\tau_0)}{\vartheta_4(2\pi y| - 2/\tau_0)}\dfrac{\vartheta_2(2\pi y| - 2/\tau_0)}{\vartheta_4(2\pi y| - 2/\tau_0)}}{\dfrac{\vartheta_3(2\pi y| - 2/\tau_0)}{\vartheta_4(2\pi y| - 2/\tau_0)}}\end{aligned} \tag{265}$$

となる．この楕円テータ関数の τ に対応する母数は式 (248) により，k_1' である．引数は，式 (248) の 2 倍になるので，$2a_1$ となる．そうすると．式 (247) は

$$=\frac{\sqrt{k_1'}\,\mathrm{sn}\,(2a_1,k_1')\sqrt{\dfrac{k_1'}{k_1}}\,\mathrm{cn}\,(2a_1,k_1')}{\dfrac{1}{\sqrt{k_1}}\,\mathrm{dn}\,(2a_1,k_1')}=k_1'\frac{\mathrm{sn}\,(2a_1,k_1')\,\mathrm{cn}\,(2a_1,k_1')}{\mathrm{dn}\,(2a_1,k_1')} \tag{266}$$

となる．これにヤコビの虚数変換 (104)–(106) を施すと，

$$=-\mathrm{i}k_1'\frac{\mathrm{sn}\,(2\mathrm{i}a_1,k_1)}{\mathrm{dn}\,(2\mathrm{i}a_1,k_1)\,\mathrm{cn}\,(2\mathrm{i}a_1,k_1)}=-\mathrm{i}k_1'\frac{\mathrm{sc}\,(2\mathrm{i}a_1,k_1)\,\mathrm{nc}\,(2\mathrm{i}a_1,k_1)}{\mathrm{dc}\,(2\mathrm{i}a_1,k_1)} \tag{267}$$

となる．これに式 (O-3.5) を代入すると，

$$=-k_1'\frac{\cos(g-g')\sin(g-g')}{\sin(g+g')} \tag{268}$$

となる．

式 (268) で，$-k_1'\cos(g-g')$ が $\cos(g+g')$ となれば式 (O-4.5c) と一致する．これを示そう．

式 (O-2.2a) から，

$$\begin{aligned}\sin g&=\frac{1}{\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a_0)}, &\cos g&=-\mathrm{i}k_0\frac{\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a_0)}{\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a_0)}\\ \sin g'&=-\mathrm{i}\frac{\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a_0)}{\mathrm{cn}\,(\mathrm{i}a_0)}, &\cos g'&=\frac{1}{\mathrm{cn}\,(\mathrm{i}a_0)}\end{aligned} \tag{269}$$

となる．これと式 (148) を用いると，

$$\begin{aligned}-k_1'\cos(g-g')&=-\frac{1-k_0}{1+k_0}(\cos g\cos g'+\sin g\sin g')\\&=-\frac{1-k_0}{1+k_0}\left(-\mathrm{i}k_0\frac{\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a_0)}{\mathrm{cn}\,(\mathrm{i}a_0)\,\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a_0)}-\mathrm{i}\frac{\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a_0)}{\mathrm{cn}\,(\mathrm{i}a_0)\,\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a_0)}\right)\\&=\mathrm{i}(1-k_0)\frac{\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a_0)}{\mathrm{cn}\,(\mathrm{i}a_0)\,\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a_0)}\\&=-\mathrm{i}k_0\frac{\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a_0)}{\mathrm{cn}\,(\mathrm{i}a_0)\,\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a_0)}+\mathrm{i}\frac{\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a_0)}{\mathrm{cn}\,(\mathrm{i}a_0)\,\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a_0)}\\&=(\cos g\cos g'-\sin g\sin g')\\&=\cos(g+g')\end{aligned} \tag{270}$$

となる．高温域の式 (O-2.2b) を用いても同じ式が得られる．これを式 (268) に代入すると，

$$(\cos\Theta_2)^{1/2}\,\mathrm{sn}\,(4a_2,\cos\Theta_2)=\sin(g-g')\cot(g+g') \tag{O-4.5c-2}$$

が得られる．

＊　＊　＊　＊　＊

次は，臨界点に非常に近い場合を除いた温度の場合である．

$F(\phi,k_0)$ にランデン逆変換を施したときに，母数 k_0 が k_{-1} に変換されるとする．あるいは，$F(\phi_{-1},k_{-1})$ にランデン変換を施したときの変換後の母数が k_0 と考えてもよい．そうすると，式 (O-4.5a) から，

$$k_{-1}=\sin\Theta_{-1}=\tan^2\frac{1}{2}\Theta_0 \tag{O-4.6a}$$

が成り立つ．

そこで，$\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}yK'_{-1}, k_{-1})$ を考えよう．まず，式 (162)，(167) と同様に，ガウス変換により，

$$K_0 = (1+k_{-1})K_{-1}, \qquad K'_0 = \frac{1+k_{-1}}{2}K'_{-1}, \tag{271}$$

という関係が成り立つから，τ_{-1} を τ_0 で表すと，

$$\tau_{-1} = \frac{\mathrm{i}K'_{-1}}{K_{-1}} = \frac{\mathrm{i}\dfrac{2}{1+k_{-1}}K'_0}{\dfrac{1}{1+k_{-1}}K_0} = \frac{2\mathrm{i}K'_0}{K_0} = 2\tau_0 \tag{272}$$

となる．

$\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}yK'_{-1}, k_{-1})$ を楕円テータ関数 ϑ で表すときに，sn の引数は $\vartheta_3^2 = 2K_{-1}/\pi$ で割ることにより ϑ の引数に変換される (式 (O-1.2)，式 (O-1.3))．$\mathrm{i}yK'_{-1}$ に対応する ϑ の引数は,

$$\frac{\mathrm{i}yK'_{-1}}{\dfrac{2K_{-1}}{\pi}} = \frac{\mathrm{i}y\dfrac{2}{1+k_{-1}}K'_0}{\dfrac{2}{\pi}\dfrac{1}{1+k_{-1}}K_0} = \frac{\mathrm{i}\pi yK'_0}{K_0} = \pi y\tau_0 \tag{273}$$

となる．

楕円テータ関数 ϑ のランデン変換に進む前に，$\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}yK'_{-1}, k_{-1})$ の引数 $\mathrm{i}yK'_{-1}$ は $\frac{1}{2}\mathrm{i}a_{-1}$ とも表されることを示しておこう．

$a_0 = 2yK'_0$ に注意して，a_{-1} にランデン変換を施すと，

$$a_0 = \frac{1+k_{-1}}{2}a_{-1} \tag{274}$$

である．式 (272)，(274) を用いると，

$$\frac{\frac{1}{2}\mathrm{i}a_{-1}}{\dfrac{2K_{-1}}{\pi}} = \frac{\dfrac{1}{2}\mathrm{i}\dfrac{2}{1+k_{-1}}a_0}{\dfrac{2}{\pi}\dfrac{1}{1+k_{-1}}K_0} = \frac{2\mathrm{i}yK'_0}{\dfrac{2K_0}{\pi}} = \pi y\tau_0 \tag{275}$$

となり，式 (273) と比較すると，$\frac{1}{2}\mathrm{i}a_{-1}$ が $\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}yK'_{-1}, k_{-1})$ の引数 $\mathrm{i}yK'_{-1}$ と等価であることがわかる．

さて，$\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}yK'_{-1}, k_{-1})$ は式 (272)，(273) により，

$$(k_{-1})^{1/2}\,\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}yK'_{-1}, k_{-1}) = \frac{\vartheta_1(\pi y\tau_0|2\tau_0)}{\vartheta_4(\pi y\tau_0|2\tau_0)} \tag{O-4.6b-1}$$

と表される．

この式右辺に楕円テータ関数 ϑ のランデン変換を施す．式 (243)，(246) により，

$$\frac{\vartheta_1(\pi y\tau_0|2\tau_0)}{\vartheta_4(\pi y\tau_0|2\tau_0)} = \frac{\vartheta_1(\pi y\tau_0/2|\tau_0)\vartheta_2(\pi y\tau_0/2|\tau_0)}{\vartheta_3(\pi y\tau_0/2|\tau_0)\vartheta_4(\pi y\tau_0/2|\tau_0)} \tag{276}$$

となる．右辺をヤコビの楕円関数にもどす．まず，τ_0 に母数 k_0 が対応する．引数は $u = z\vartheta_3^2 = z(2K_0/\pi)$ であるから，

$$u = \left(\frac{\pi y\tau_0}{2}\right)\left(\frac{2K_0}{\pi}\right) = \tau_0 yK_0 = \mathrm{i}K'_0 y = \frac{1}{2}\mathrm{i}a_0 \tag{277}$$

となる．したがって，式 (276) の右辺は，式 (265) から式 (266) への変形と同様にして，

$$\frac{\vartheta_1(\pi y\tau_0/2|\tau_0)\vartheta_2(\pi y\tau_0/2|\tau_0)}{\vartheta_3(\pi y\tau_0/2|\tau_0)\vartheta_4(\pi y\tau_0/2|\tau_0)} = \frac{\dfrac{\vartheta_1(\pi y\tau_0/2|\tau_0)}{\vartheta_4(\pi y\tau_0/2|\tau_0)}\dfrac{\vartheta_2(\pi y\tau_0/2|\tau_0)}{\vartheta_4(\pi y\tau_0/2|\tau_0)}}{\dfrac{\vartheta_3(\pi y\tau_0/2|\tau_0)}{\vartheta_4(\pi y\tau_0/2|\tau_0)}} \tag{278}$$

$$= \frac{\sqrt{k_0'}\,\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a_0/2, k_0)\sqrt{\dfrac{k_0}{k_0'}}\,\mathrm{cn}\,(\mathrm{i}a_0/2, k_0)}{\dfrac{1}{\sqrt{k_0}}\,\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a_0/2, k_0)} = k_0\frac{\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a_0/2, k_0)\,\mathrm{cn}\,(\mathrm{i}a_0/2, k_0)}{\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a_0/2, k_0)} \tag{279}$$

となる．ここで，ヤコビの楕円関数の半角定理 (101)–(103) により

$$\frac{\mathrm{sn}^2\,\dfrac{u}{2}\,\mathrm{cn}^2\,\dfrac{u}{2}}{\mathrm{dn}^2\,\dfrac{u}{2}} = \frac{(1-\,\mathrm{cn}\,u)(1+\,\mathrm{cn}\,u)}{(1+\,\mathrm{dn}\,u)^2} = \frac{1-\,\mathrm{cn}^2\,u}{(1+\,\mathrm{dn}\,u)^2} = \frac{\mathrm{sn}^2\,u}{(1+\,\mathrm{dn}\,u)^2}, \tag{280}$$

したがって，

$$\frac{\mathrm{sn}\,\dfrac{u}{2}\,\mathrm{cn}\,\dfrac{u}{2}}{\mathrm{dn}\,\dfrac{u}{2}} = \frac{\mathrm{sn}\,u}{(1+\,\mathrm{dn}\,u)}, \tag{281}$$

となる．これを式 (279) 右辺に適用すると，

$$(k_{-1})^{1/2}\,\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}yK'_{-1}, k_{-1}) = k_0\frac{\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a_0, k_0)}{1+\,\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a_0, k_0)} \tag{282}$$

となる．

ここで，低温域 $H' > H^*$ の場合を考える．式 (O-2.2a) から，$k_0\,\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a_0) = \mathrm{i}\sinh 2H^*$，$\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a_0) = \cosh 2H^*$ であるから，式 (282) は，

$$(k_{-1})^{1/2}\,\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}yK'_{-1}, k_{-1}) = \frac{\mathrm{i}\sinh 2H^*}{1+\cosh 2H^*} = \mathrm{i}\frac{\sinh H^*\cosh H^*}{\cosh^2 H^*} = \mathrm{i}\tanh H^* \tag{283}$$

である．定義 (O-14) により，$\tanh H^* = \mathrm{e}^{-2H}$ であるから，

$$-\mathrm{i}(k_{-1})^{1/2}\,\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}yK'_{-1}, k_{-1}) = \mathrm{e}^{-2H} \tag{O-4.6b-2}$$

が得られる．

高温域 $H' < H^*$ の場合は，式 (O-2.2b) から，$k_0\,\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a_0) = \mathrm{i}\sinh 2H'$，$\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a_0) = \cosh 2H'$ であるから，式 (282) は，

$$(k_{-1})^{1/2}\,\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}yK'_{-1}, k_{-1}) = \frac{\mathrm{i}\sinh 2H'}{1+\cosh 2H'} = \mathrm{i}\frac{\sinh H'\cosh H'}{\cosh^2 H'} = \mathrm{i}\tanh H' \tag{284}$$

となり，結局，

$$-\mathrm{i}(k_{-1})^{1/2}\,\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}yK'_{-1}, k_{-1}) = \tanh H' \tag{O-4.6b-3}$$

を得る．

＊ ＊ ＊ ＊ ＊

• 計算の精度について

式 (O-4.5) や (O-4.6) を用いると，展開式の 1 項当り有効数字で 3 桁の数値計算効率があるということである．完全楕円積分の数表や，$\ln q$ の数表が使える場合は，ここで求めたような Θ_2 や Θ_{-1} を計算する必要はないということらしい．

ただし，ここで述べられていることは，1940 年の前半の，数表や回転式手動計算機を用いていた頃の話である．現在なら，最後に述べるように，普通の PC で簡単に計算できて，その範囲ではどの部分で上で述べたような計算技術が必要になるのか全く見えてこない．

• パラメータ a の温度変化に関する記述

まず，

$$y = \frac{a_0}{2K_0'} = \frac{a_1}{2K_1'}$$

は，臨界点で解析的である．その理由は，a_1，K_1' は第 1 種楕円積分で母数が 1 以外のところで解析的である．つまり，第 1 種楕円積分での発散は，$K(k)$ の $k \to 1$ で起こる．k_1' も Θ_1 の関数で解析的である．したがって，C などの臨界点における特異点は K の特異点 $k = 1$ から来ている．つまり，$H' = H^*$ で $k = \sinh H'/\sinh H^* = 1$ あるいは $k = \sinh H^*/\sinh H' = 1$ で特異点になり発散するということである．そのとき，基本周期四辺形は

$$\mathrm{i}/\tau = \frac{K}{K'} = \infty$$

となるので，一方向が無限大に延びて横方向の四辺形は両辺が無限大にある 1 つの四辺形になってしまう．

次に，$T = 0$ と $T = \infty$ の極限の場合を考えてみよう．

$T \to 0$ の場合 $H = J/k_{\mathrm{B}}T$ および $H' = J'/k_{\mathrm{B}}T$ は無限大に向かうので，その極限における $2y$ は次のように一定の値に漸近する．

まず，$T \to 0$ の極限で，$k_0 = 1/\sinh 2H' \sinh H \to 0$ となる．$k = 0$ では $\mathrm{sn}\, u = u$ であるから，$\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a_0) = \mathrm{i}\sinh(2H') = \sin(2\mathrm{i}H')$ は $T \to 0$ の極限で，

$$\mathrm{i}a_0 \to 2\mathrm{i}H'$$

となることがわかる．一方，k' は同じ極限で $k' \to 1$ となるため，K_0' は発散する．以上のことを念頭に置いて，$2y$ の極限の振る舞いを調べればよい．

$H \gg 1$，$H' \gg 1$ のとき，$\cosh(2H + 2H') \gg \cosh(2H - 2H')$ であるから，

$$k_0 = \frac{1}{\sinh H \sinh H'} = \frac{2}{\cosh(2H + 2H') - \cosh(2H - 2H')} \simeq 2\,\mathrm{sech}\,(2H + 2H') \tag{285}$$

となる．したがって，$\mathrm{sech}\,(2H + 2H') \ll 1$ となり，

$$k_0' = \sqrt{1 - k_0^2} \simeq \sqrt{1 - \{2\,\mathrm{sech}\,(2H + 2H')\}^2} \simeq 1 - 2\,\mathrm{sech}^2\,(2H + 2H') \tag{286}$$

とできる．一方，$k_0 \to 0$ のとき，$k_0' \to 1_{-0}$ となり，$K'(k_0) = K(k_0') \to -\frac{1}{2}\ln(1 - k_0')$ であるから（[6], p.228），

$$\begin{aligned} K_0' &= K(k_0') \simeq -\frac{1}{2}\ln(1 - k_0') \\ &= -\frac{1}{2}\{\ln 2 + 2\,\mathrm{sech}\,(2H + 2H')\} \simeq \ln\cosh(2H + 2H') \simeq \ln\exp(2H + 2H') = 2H + 2H' \end{aligned} \tag{287}$$

となる．したがって，

$$\lim_{T\to 0} 2y = \lim_{T\to 0} \frac{a_0}{K_0'} = \frac{H'}{H + H'} = \frac{J'}{J + J'} \tag{O-4.7-1}$$

となる．

次に，$T \to \infty$ の場合，$H, H' \ll 1$ である．そのとき，$k_0 = \sinh H \sinh H' \ll 1$ であるから，

$$k_0' = \sqrt{1 - k_0^2} \simeq \sqrt{1 - \sinh^2 2H \sinh^2 2H'} \simeq 1 - \frac{1}{2}\sinh^2 2H \sinh^2 2H' \tag{288}$$

となる．したがって，$T \gg 1$ のとき，$H, H' \ll 1$ より $\sinh 2H \simeq 2H, \sinh 2H' \simeq 2H'$ であるから，

$$\begin{aligned} K_0' = K(k_0') &\simeq -\frac{1}{2}\ln(1-k_0') \\ &\simeq -\frac{1}{2}\ln(\frac{1}{2}\sinh^2 2H \sinh^2 2H') \\ &\simeq -\ln(\sinh 2H \sinh 2H') \\ &\simeq -(\ln 2H + \ln 2H') = -\ln 4JJ' + 2\ln T \simeq 2\ln T \end{aligned} \tag{289}$$

となる．一方，$k_0 \to 0$ であるから，式 (O-2.2a) から，前と同じように，

$$a_0 \simeq 2H^* = \ln\coth 2H \simeq -\ln\sinh 2H \simeq -\ln 2H = \ln 2J + \ln T \simeq \ln T \tag{290}$$

である．

以上から，

$$\lim_{T\to 0} 2y = \lim_{T\to 0}\frac{a_0}{K_0'} = \frac{\ln T}{2\ln T} = \frac{1}{2} \tag{O-4.7-2}$$

となる．

＊　＊　＊　＊　＊

パラメータ a は H と H' の非対称関数であることは，式 (O-4.4) などから明らかである．まず，式 (O-2.2a) と式 (O-2.2b) から，

$$\mathrm{am}\,(\mathrm{i}a_0) = \mathrm{am}\,(2\mathrm{i}K_0'y, k_0) = \begin{cases} 2\mathrm{i}H' & (H' > H^*) \\ 2\mathrm{i}H^* & (H' < H^*) \end{cases} \tag{291}$$

である．一方，式 (O-2.2b) より，

$$-\mathrm{i}\,\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a_0) = \sinh 2H^* \tag{292}$$

である．

式 (292) の H と H' を交換し，ヤコビの楕円関数に関係式 (108) を適用すると，

$$-\mathrm{i}\,\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a_0) = \sinh 2H'^* = \frac{1}{\sinh 2H'} = \frac{1}{-\mathrm{i}k\,\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a_0)} = \mathrm{i}\,\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a_0 + \mathrm{i}K') \tag{293}$$

となる．$\mathrm{sn}\,u$ は奇関数，周期の 1 つが $2\mathrm{i}K'$ であるから，

$$\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a_0) = \mathrm{i}\sinh 2H'^* = -\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a_0 + \mathrm{i}K') = \mathrm{sn}\,(-\mathrm{i}a_0 - \mathrm{i}K') = \mathrm{sn}\,(-\mathrm{i}a_0 + \mathrm{i}K') \tag{294}$$

となる．これから，H と H' を交換すると，$\mathrm{i}a_0$ は楕円補数といわれる $\mathrm{i}(K_0' - a_0)$ に置き換わることがわかる．これは，$y = a_0/2K_0'$ が $(K_0' - a_0)/2K_0' = \frac{1}{2} - y$ に置き換わることを意味する．低温域の場合にも同様の式が得られて，結局，

$$\mathrm{am}\,(\mathrm{i}K_0' - \mathrm{i}a_0, k_0) = \mathrm{am}\,(\mathrm{i}K_0'(1-2y), k_0) = \begin{cases} 2\mathrm{i}H & (H' > H^*) \\ 2\mathrm{i}H'^* & (H' < H^*) \end{cases} \tag{O-4.8}$$

となることを意味する．この式は，式 (291) でそれぞれの温度域で H と H' を交換したときに成り立つ式である．

ここで，転移温度の上下を示す温度域の条件を考えてみよう．まず，低温域の $H' > H^*$ の H と H' を交換しよう．そうするとこの式の大小関係は等価的に順を追って，

$$\begin{aligned} H &> H'^* \\ \mathrm{e}^{2H} &> \mathrm{e}^{2H'^*} \\ \coth H^* &> \coth H' \\ H^* &< H' \end{aligned} \tag{295}$$

と変形することができて，結局，H と H' を交換する前の条件式は変わらない．途中，[1] の式 (40)，(41) を使った．高温域の場合も同様である．これからわかることは，$J > J'$ なら，$H > H'$ であり，低温域では式 (291) よりも式 (O-4.8) のほうが大きい．

高温域のほうでは，$H' < H^*$ であるが，H と H' を交換しても $H < H'^*$ は，式 (295) と同じようにして，$H' < H^*$ と等価であることがわかる．また，$J > J'$ なら，$H^* < H'^*$ となる．つまり，高温域でも式 (O-4.8) のほうが大きくなり，全温度領域に亘って，$\mathrm{am}\,(K_0'(1-2y)) > \mathrm{am}\,(2K_0'y)$ すなわち，$K_0'(1-2y) > 2K_0'y$ が成り立つ．これから，全ての温度領域で

$$y < \frac{1}{4}; \quad a_0 < \frac{1}{2}K_0' \quad (J' < J) \tag{O-4.9}$$

が成り立つことになる．正方対称の場合，$J = J'$ となって，

$$y = \frac{1}{4}; \quad a_0 = \frac{1}{2}K_0' \quad (J' = J) \tag{O-4.10}$$

となる．この場合は，ヤコビの楕円関数を完全楕円積分に置き換えて表すことができる．

18.5 Reduction of Integrals

この小節で，今まで ω を変数として表されていた積分が，新しい変数 u に変換され，最終的にヤコビの楕円テータ関数および完全楕円積分で表される．

最初に，式 (O-2.2a) から、

$$\cos\delta' = \mathrm{cn}\,u \tag{296}$$

の積分から考えよう．

まず，低温域 $H' > H^*$ を考える。Fig. 4 の双曲三角形 0D′D* において，ω が 0 から π まで変化するとき，δ' は π から 0 まで変化する．そのとき、式 (296) の $\cos\delta' = \mathrm{cn}\,u$ の関係から、$\mathrm{cn}\,u$ は −1 から 1 まで変化する．ここで，それぞれが周期関数であるので，それぞれの周期の半分の $0 \le \delta' \le \pi$ と $0 \le u \le 2K$ を対応させると、上記の δ' の変化に対応する u の変化範囲は $2K$ から 0 までであることがわかる．実際，式 (296) から，これを満たす δ' と u の関係は 1 対 1 である．これは δ' は u の単調増加関数であることからもわかる[8]．

一方，δ^* は，ω が 0 から π まで変化するとき，0 から最大値を経由してまた 0 に戻るという変化を示す．したがって，δ^* の変化に着目しても，これから積分計算に有用な材料は得られないことがわかる．

高温域 $H' < H^*$ の場合は，今度は，ω が 0 から π まで変化するとき，δ^* が π から 0 まで変化する．式 (O-2.2b) の $\cos\delta^* = \mathrm{cn}\,u$ の関係から，上と全く同じようにして，u は $2K$ から 0 まで変化することがわかる．

[8] 実際，式 (296) を微分することにより，

$$\frac{\mathrm{d}\delta'}{\mathrm{d}u} = \frac{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{\sin\delta'} > 0$$

となる．u の 0 から $2K$ の範囲に対応して，δ' の 0 から π が対応する．その範囲で $\mathrm{sn}\,u > 0$，$\sin\delta > 0$ であり，次の半周期で，$\mathrm{sn}\,u < 0$，$\sin\delta < 0$ であるから，上の式が成り立つ．

δ' は ω の 0 から π までの変化に対し，0 から最大値を経由してまた 0 に戻るという変化を示すので，今の場合は役に立たない．

結局，ω の積分範囲はいずれの場合も変数変換によって $2K$ から 0 までの u に関する積分に置き換えることができる．

以上から，

$$\int_0^\pi \cos\delta'\omega = \int_{2K}^0 \,\mathrm{cn}\,u \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}u}\,\mathrm{d}u \tag{297}$$

となる．

式 (O-2.5) を代入すると，

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \cos\delta'\,\mathrm{d}\omega &= -k'^2\int_{2K}^0 \frac{\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{dn}\,u - k\,\mathrm{cn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{cn}\,u}\,\mathrm{d}u \\ &= k'^2\int_0^{2K} \frac{\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{dn}\,u - k\,\mathrm{cn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{cn}\,u}\,\mathrm{d}u; \qquad (H' > H^*)\end{aligned} \tag{298}$$

となる．

この積分の積分範囲 $0 \sim 2K$ において，$\mathrm{cn}\,u$ は K を中心に反対称である．すなわち，$\mathrm{cn}\,(2K-u) = -\,\mathrm{cn}\,u$ である[9]．一方，$\mathrm{sn}\,u$，$\mathrm{dn}\,u$ は同じ範囲で K を中心に対称である．したがって，$\mathrm{cn}\,u$ の奇数次の冪を含む項は積分によって 0 になるから，取り除いても良い．

そのような目的で，式 (297) の被積分項の分子分母に $\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{dn}\,u + k\,\mathrm{cn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{cn}\,u$ を掛けると，

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{dn}\,u - k\,\mathrm{cn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{cn}\,u} &= \frac{\mathrm{cn}\,u(\,\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{dn}\,u + k\,\mathrm{cn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{cn}\,u)}{(\,\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{dn}\,u - k\,\mathrm{cn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{cn}\,u)(\,\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{dn}\,u + k\,\mathrm{cn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{cn}\,u)} \\ &= \frac{\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{dn}\,u + k\,\mathrm{cn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{cn}^2\,u}{\mathrm{dn}^2\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{dn}^2\,u - k^2\,\mathrm{cn}^2\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{cn}^2\,u} \\ &= \frac{\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{dn}\,u + k\,\mathrm{cn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{cn}^2\,u}{(1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,(\mathrm{i}a))(1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,u) - k^2(1-\,\mathrm{sn}^2\,(\mathrm{i}a))(1-\,\mathrm{sn}^2\,u)} \\ &= \frac{\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{dn}\,u + k\,\mathrm{cn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{cn}^2\,u}{1-k^2+k^4\,\mathrm{sn}^2\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{sn}^2\,u - k^2\,\mathrm{sn}^2\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{sn}^2\,u} \\ &= \frac{\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{dn}\,u + k\,\mathrm{cn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{cn}^2\,u}{(1-k^2)(1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{sn}^2\,u)}\end{aligned} \tag{299}$$

となる．このうち，分子の第 1 項が $\mathrm{cn}\,u$ の 1 次で積分して 0 になるから，取り除くことができる．除いたも

[9] $\mathrm{cn}\,u$ は偶関数であるから，

$$\mathrm{cn}\,(-u) = \,\mathrm{cn}\,u$$

である．式 (89) から，

$$\mathrm{cn}\,(u+2K) = -\,\mathrm{cn}\,(u)$$

である．この 2 式から，u を $-u$ とすると，

$$\mathrm{cn}\,(2K-u) = -\,\mathrm{cn}\,(-u) = -\,\mathrm{cn}\,u$$

となる．この式は，$u = u - K$ とおくことにより，

$$\mathrm{cn}\,(K+u) = -\,\mathrm{cn}\,(K-u)$$

となる．いずれの式も $u = K$ を中心に $\mathrm{cn}\,u$ は反対称であることを示す．

のを式 (298) に代入すると，k'^2 が打ち消されて，以下のように積分ができる．

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \cos\delta' \,\mathrm{d}\omega &= \int_0^{2K} \frac{k\,\mathrm{cn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{cn}^2\,u}{(1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{sn}^2\,u)}\,\mathrm{d}u = \int_0^{2K} \frac{k\,\mathrm{cn}\,(\mathrm{i}a)(1-\,\mathrm{sn}^2\,u)}{(1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{sn}^2\,u)}\,\mathrm{d}u \\
&= \int_0^{2K} \frac{k\,\mathrm{cn}\,(\mathrm{i}a)(1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{sn}^2\,u) + k\,\mathrm{cn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{sn}^2\,u(k^2\,\mathrm{sn}^2\,(\mathrm{i}a)-1)}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{sn}^2\,u}\,\mathrm{d}u \\
&= \int_0^{2K} \left\{k\,\mathrm{cn}\,(\mathrm{i}a) - \frac{k\,\mathrm{cn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{dn}^2\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{sn}^2\,u}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{sn}^2\,u}\right\}\mathrm{d}u \\
&= 2Kk\,\mathrm{cn}\,(\mathrm{i}a) - \frac{\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a)}{k\,\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a)} \int_0^{2K} \frac{k^2\,\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{cn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{sn}^2\,u}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{sn}^2\,u}\,\mathrm{d}u \\
&= 2Kk\,\mathrm{cn}\,(\mathrm{i}a) - 2\frac{\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a)}{k\,\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a)} \int_0^{K} \frac{k^2\,\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{cn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{sn}^2\,u}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{sn}^2\,u}\,\mathrm{d}u \\
&= 2Kk\,\mathrm{cn}\,(\mathrm{i}a) - 2\frac{\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a)}{k\,\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a)}\Pi(K,a,k) \\
&= 2Kk\,\mathrm{cn}\,(\mathrm{i}a) - 2\frac{\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a)}{k\,\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a)}KZ(\mathrm{i}a) \\
&= 2K\{k\,\mathrm{cn}\,(\mathrm{i}a) - \frac{1}{k}\,\mathrm{ds}\,(\mathrm{i}a)Z(\mathrm{i}a)\} \qquad (300)
\end{aligned}$$

以上の計算の最後の積分では式 (O-1.8) を用いた．

続いて，比較のために，同じく低温域の $H' > H^*$ の場合のときの，$\cos\delta^*$ の積分を考えよう．式 (O-2.2a) から $\cos\delta^* = \,\mathrm{dn}\,u$ であるから，

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \cos\delta^* \,\mathrm{d}\omega &= -k'^2 \int_{2K}^0 \frac{\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{dn}\,u - k\,\mathrm{cn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{cn}\,u}\,\mathrm{d}u \\
&= k'^2 \int_0^{2K} \frac{\mathrm{dn}\,u\{\,\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{dn}\,u + k\,\mathrm{cn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{cn}\,u\}}{\mathrm{dn}^2\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{dn}^2\,u - k^2\,\mathrm{cn}^2\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{cn}^2\,u}\,\mathrm{d}u \\
&= 2\int_0^K \frac{\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{dn}^2\,u}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{sn}^2\,u}\,\mathrm{d}u \\
&= 2\int_0^K \frac{\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a)(1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,u)}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{sn}^2\,u}\,\mathrm{d}u \\
&= 2\int_0^K \frac{\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a)\{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{sn}^2\,u\} + k^2\,\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{sn}^2\,u\{\,\mathrm{sn}^2\,(\mathrm{i}a)-1\}}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{sn}^2\,u}\,\mathrm{d}u \\
&= 2\int_0^K \left\{\,\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a) - \frac{k^2\,\mathrm{cn}^2\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{sn}^2\,u}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{sn}^2\,u}\right\}\mathrm{d}u
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2K\,\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a) - 2\frac{\mathrm{cn}\,(\mathrm{i}a)}{\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a)}\Pi(\mathrm{i}a) \\
&= 2K(-\mathrm{i}k\,\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a))\frac{\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a)}{-\mathrm{i}k\,\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a)} - 2(-\mathrm{i})\frac{\mathrm{cn}\,(\mathrm{i}a)}{-\mathrm{i}\,\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a)}KZ(\mathrm{i}a) \\
&= 2K(-\mathrm{i}k\,\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a))\frac{\cosh 2H^*}{\sinh 2H^*} + 2\mathrm{i}\frac{\cosh 2H'}{\sinh 2H'}KZ(\mathrm{i}a) \\
&= -2\mathrm{i}K\{k\,\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a)\coth 2H^* - Z(\mathrm{i}a)\coth 2H'\} \qquad \text{(O-5.1-1)}
\end{aligned}$$

が得られる．

ここで，前に求めた $\cos\delta'$ の積分 (300) を次のように変形する．

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \cos\delta' \,\mathrm{d}\omega &= 2K\{k(-\mathrm{i}\,\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a))\frac{\mathrm{cn}\,(\mathrm{i}a)}{-\mathrm{i}\,\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a)} - (-\mathrm{i})\frac{\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a)}{-\mathrm{i}k\,\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a)}Z(\mathrm{i}a)\} \\
&= -2\mathrm{i}K\{k(\,\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a))\coth 2H' - Z(\mathrm{i}a)\coth 2H^*\} \qquad \text{(O-5.1-2)}
\end{aligned}$$

ここで，$\cos\delta'$ と $\cos\delta^*$ の積分を比較してみよう．式 (O-2.2a)（低温域）と式 (O-2.2a)（高温域）から，

$$\begin{aligned} &H' > H^* \text{のとき} \quad \cos\delta' = \mathrm{cn}\, u, \quad \cos\delta^* = \mathrm{dn}\, u \\ &H' < H^* \text{のとき} \quad \cos\delta' = \mathrm{dn}\, u, \quad \cos\delta^* = \mathrm{cn}\, u \end{aligned} \tag{301}$$

である．これから，$H' > H^*$ のときの ω に関する $\cos\delta'$ の積分，すなわち，$\mathrm{cn}\, u$ の積分は，数式的に $H' < H^*$ のときの $\cos\delta^*$ の積分に等しいことがわかる．同様に，$H' > H^*$ のときの ω に関する $\cos\delta^*$ の積分，すなわち，$\mathrm{dn}\, u$ の積分は，数式的に $H' < H^*$ のときの $\cos\delta'$ の積分に等しいことがわかる．

つまりこのことは，$H' < H^*$ の場合の $\cos\delta'$ の積分は，$H' > H^*$ の場合の $\cos\delta^*$ の積分と同じであるので，温度範囲が反対側であるから，H' と H^*，δ' と δ^* が含まれている場合は，それぞれを交換すれば，結果は同じであることを示している．そこで，式 (O-5.1-1) と式 (O-5.1-2) を比較すると，お互いが H' と H^* を交換した式になっていることがわかる．つまり，高温域の式 (O-5.1-1) で H' と H^* を交換すれば低温域の式 (O-5.1-2) に，低温域の式 (O-5.1-2) で H' と H^* を交換すれば高温域の式 (O-5.1-1) になるということである．このことから，被積分項が H' と H^* に関して対称であれば，低温域，高温域の両方に成り立つということも言える．

次の式は δ' と δ^* に関して対称であるから，低温域と高温域の両方について成り立つ．式 (O-2.2a) を代入すると，

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{\sin\delta^* \sin\delta'}{\sinh\gamma}\,\mathrm{d}\omega &= \int_{2K}^0 \frac{\sin\delta^* \sin\delta'}{\sinh\gamma}\frac{\partial\omega}{\partial u}\,\mathrm{d}u \\ &= \int_{2K}^0 \frac{k\,\mathrm{sn}^2\, u}{-\mathrm{i}k'^2\,\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a)}(-k'^2)\,\mathrm{d}u = \frac{-\mathrm{i}}{\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a)}\int_{2K}^0 k\,\mathrm{sn}^2\, u\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{2\mathrm{i}}{k\,\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a)}\int_0^K k^2\,\mathrm{sn}^2\, u\,\mathrm{d}u = \frac{2\mathrm{i}}{k\,\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a)}\int_0^K (1 - \mathrm{dn}^2\, u)\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{2\mathrm{i}}{k\,\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a)}(K - E) \end{aligned} \tag{O-5.1-3}$$

が得られる．ただし，ここで式 (O-1.7-3) を用いた．

次の式も δ' と δ^*，H' と H^* に関して対称であるから，低温域と高温域の両方について成り立つ．式 (O-2.2a) を代入すると，

$$\begin{aligned} &\sinh^2 2H' \int_0^\pi \sin^2\delta^* \coth\gamma\,\mathrm{d}\omega \\ &= \sinh^2 2H' \int_{2K}^0 \mathrm{sn}^2\, u \frac{\mathrm{cn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{dn}\, u - k\,\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{dn}\, u}{-\mathrm{i}k'^2\,\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a)}\frac{\partial\omega}{\partial u}\,\mathrm{d}u \\ &= -\sinh^2 2H' \int_0^{2K} \frac{\mathrm{sn}^2\, u\{\mathrm{cn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{dn}\, u - k\,\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{dn}\, u\}}{-\mathrm{i}k'^2\,\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a)}\frac{-k'^2}{\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{dn}\, u - k\,\mathrm{cn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{cn}\, u}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{\mathrm{i}\sinh^2 2H'}{\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a)}\int_0^{2K} \frac{\mathrm{sn}^2\, u\{\mathrm{cn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{dn}\, u - k\,\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{dn}\, u\}\{\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{dn}\, u + k\,\mathrm{cn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{cn}\, u\}}{\{\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{dn}\, u\}^2 - \{k\,\mathrm{cn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{cn}\, u\}^2}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{\mathrm{i}\sinh^2 2H'}{\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a)}\int_0^{2K} \frac{\{\mathrm{cn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a)(\mathrm{dn}^2\, u - k^2\,\mathrm{cn}^2\, u) + k\,\mathrm{cn}\, u\,\mathrm{dn}\, u(\mathrm{cn}^2\,(\mathrm{i}a) - \mathrm{dn}^2\,(\mathrm{i}a))\}\,\mathrm{sn}^2\, u}{(1-k^2)\{1 - k^2\,\mathrm{sn}^2\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{sn}^2\, u\}}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{\mathrm{i}\sinh^2 2H'}{\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a)}\int_0^{2K} \frac{(1-k^2)\,\mathrm{cn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{sn}^2\, u}{(1-k^2)\{1 - k^2\,\mathrm{sn}^2\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{sn}^2\, u\}}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{\mathrm{i}\sinh^2 2H'}{k^2\,\mathrm{sn}^2\,(\mathrm{i}a)}\int_0^{2K} \frac{k^2\,\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{cn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{sn}^2\, u}{1 - k^2\,\mathrm{sn}^2\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{sn}^2\, u}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{\mathrm{i}\sinh^2 2H'}{k^2\,\mathrm{sn}^2\,(\mathrm{i}a)}2KZ(\mathrm{i}a) \\ &= -2\mathrm{i}KZ(\mathrm{i}a) \end{aligned} \tag{O-5.1-4}$$

が得られる．ただし，途中で $\operatorname{cn} u$ の 1 次の項は積分が 0 になるので除いた．また，式 (O-2.2a)，式 (O-1.7-3) を用いた．最初に式 (O-2.2b) を代入しても同じ結果が得られる．

* * * * *

上で導いた式 (O-5.1) にはヤコビのツェータ関数が含まれて，その引数は虚数である．そのままでは計算出来ないので，以下では虚数の引数を実数に変換する式 (O-5.2) を導く．

式 (O-5.2) を導く前に，まずヤコビの虚数変換（[8]，p.247）から始めよう．

$$\sin\phi = \mathrm{i}\tan\psi \tag{302}$$

とおくと，

$$\sin\psi = -\mathrm{i}\tan\phi \tag{303}$$

$$\cos\phi = \frac{1}{\cos\psi}, \qquad \cos\psi = \frac{1}{\cos\phi} \tag{304}$$

が成り立つので[10]，これから，

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}} = \frac{\mathrm{i}\,\mathrm{d}\psi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\psi}} \tag{305}$$

であるので[11]，

$$\int_0^\phi \frac{\mathrm{d}\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}} = \mathrm{i}\int_0^\psi \frac{\mathrm{d}\psi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\psi}} = \mathrm{i}u \tag{306}$$

すなわち，

$$F(\phi,k) = \mathrm{i}F(\psi,k') = \mathrm{i}u \tag{307}$$

が成り立つ．式 (303) に $(1-k^2\sin^2\phi)$ を掛けると，

$$\begin{aligned}\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}\,\mathrm{d}\phi &= \frac{\mathrm{i}(1-k^2\sin^2\phi)}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\psi}}\,\mathrm{d}\psi = \frac{\mathrm{i}(1+k^2\tan^2\psi)}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\psi}}\,\mathrm{d}\psi\\ &= \frac{\mathrm{i}(1+\tan^2\psi-k'^2\tan^2\psi)}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\psi}}\,\mathrm{d}\psi = \frac{\mathrm{i}\sqrt{1-k'^2\sin^2\psi}}{\cos^2\psi}\,\mathrm{d}\psi\end{aligned} \tag{308}$$

この式を積分して，右辺をさらに部分積分すると，

$$\begin{aligned}\int_0^\phi \sqrt{1-k^2\sin^2\phi}\,\mathrm{d}\phi &= \int_0^\psi \frac{\mathrm{i}\sqrt{1-k'^2\sin^2\psi}}{\cos^2\psi}\,\mathrm{d}\psi\\ &= \mathrm{i}\tan\psi\sqrt{1-k'^2\sin^2\psi} + \mathrm{i}\int_0^\psi \frac{k'^2\sin^2\psi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\psi}}\,\mathrm{d}\psi\\ &= \mathrm{i}\tan\psi\sqrt{1-k'^2\sin^2\psi} + \mathrm{i}\int_0^\psi \frac{\mathrm{d}\psi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\psi}} - \mathrm{i}\int_0^\psi \sqrt{1-k'^2\sin^2\psi}\,\mathrm{d}\psi\\ &= \mathrm{i}\tan\psi\sqrt{1-k'^2\sin^2\psi} + \mathrm{i}F(\psi,k') - \mathrm{i}E(\psi,k'),\end{aligned} \tag{309}$$

[10]式 (302) の関係から，ϕ または ψ のいずれかが虚数でなければならないことがわかる．この式を自乗して両辺 1 から引くと，

$$\cos^2\phi = \sec^2\psi$$

となり，式 (304) が得られる．この式は，ϕ と ψ が対称的であることを示す．したがって，式 (303) が成り立つ．

[11]式 (302) から，$\mathrm{d}\phi = \mathrm{i}\sec\psi\,\mathrm{d}\psi$ となるので，これと，

$$\sqrt{1-k^2\sin^2\phi} = \sqrt{1+k^2\tan^2\psi} = \sec\psi\sqrt{1-k'^2\sin^2\psi}$$

から式 (305) が得られる．

すなわち，

$$E(\phi,k)=\mathrm{i}\{\tan\psi\sqrt{1-k'^2\sin^2\psi}+F(\psi,k')-E(\psi,k')\} \tag{310}$$

である．

以下では，不完全楕円積分の振幅が $\pi/2$ のとき，あるいは母数が k のときは，振幅あるいは母数を省略する．例えば，$F(\pi/2,k)=F(k)=F=K(k)=K$，$F(\pi/2,k')=F(k')=K(k')=K'$，$F(\psi,k)=F(\psi)$，あるいは $E(\pi/2,k)=E(k)=E$ のように書くことにする．K は第 1 種完全楕円積分で，F は第 1 種不完全楕円積分から見た表記である．

式 (310) に F を掛けて，

$$FE(\phi)=\mathrm{i}\{F\tan\psi\sqrt{1-k'^2\sin^2\psi}+FF(\psi,k')-FE(\psi,k')\}. \tag{311}$$

両辺から $EF(\phi)$ を引き，

$$FE(\phi)-EF(\phi)=\mathrm{i}\{F\tan\psi\sqrt{1-k'^2\sin^2\psi}+FF(\psi,k')-FE(\psi,k')\}-EF(\phi). \tag{312}$$

これを，式 (307) の $F(\phi,k)=\mathrm{i}F(\psi,k')$ という関係を用いて整理すると，

$$\frac{FE(\phi)-EF(\phi)}{\mathrm{i}}=F\tan\psi\sqrt{1-k'^2\sin^2\psi}-\{FE(\psi,k')+(E-F)F(\psi,k')\}. \tag{313}$$

となる．

次に，ルジャンドルの公式 ([8], p.293)

$$FE(k')+F(k')E-FF(k')=\frac{\pi}{2} \tag{314}$$

から，

$$\frac{FE(k')}{F(k')}+E-F=\frac{\pi}{2F(k')} \tag{315}$$

となるので，これに $F(\psi,k')$ を掛けると，

$$\frac{FE(k')F(\psi,k')}{F(k')}+(E-F)F(\psi,k')=\frac{\pi F(\psi,k')}{2F(k')}, \tag{316}$$

さらに，$FE(\psi,k')$ を引いて，

$$-\frac{F}{F(k')}\{F(k')E(\psi,k')-E(k')F(\psi,k')\}+(E-F)F(\psi,k')=\frac{\pi F(\psi,k')}{2F(k')}-FE(\psi,k'), \tag{317}$$

となる．これを整理して，

$$FE(\psi,k')+(E-F)F(\psi,k')=\frac{F}{F(k')}\{F(k')E(\psi,k'))-E(k')F(\psi,k')\}+\frac{\pi F(\psi,k')}{2F(k')}, \tag{318}$$

となる．式 (318) を式 (313) の右辺第 2 項に代入すると，

$$\frac{FE(\phi)-EF(\phi)}{\mathrm{i}}=F\tan\psi\sqrt{1-k'^2\sin^2\psi}-\frac{F}{F(k')}\{F(k')E(\psi,k')-E(k')F(\psi,k')\}-\frac{\pi F(\psi,k')}{2F(k')} \tag{319}$$

となり，したがって，

$$\frac{FE(\phi)-EF(\phi)}{\mathrm{i}F}=\tan\psi\sqrt{1-k'^2\sin^2\psi}-\frac{F(k')E(\psi,k')-E(k')F(\psi,k')}{F(k')}-\frac{\pi F(\psi,k')}{2FF(k')} \tag{320}$$

となる．$F(k')$ などは第 1 種完全楕円積分であるから，$K(k')$ と書き換えると，

$$\frac{K(k)E(\phi)-E(k)F(\phi)}{\mathrm{i}K(k)}=\tan\psi\sqrt{1-k'^2\sin^2\psi}-\frac{K(k')E(\psi,k')-E(k')F(\psi,k')}{K(k')}-\frac{\pi F(\psi,k')}{2K(k)K(k')} \tag{321}$$

である．

次にヤコビのツェータ関数 $Z(u)$ を式 (O-1.7-4) から次のように表し， $\mathrm{sn}\,u=\sin\theta$ により，変数を θ に変換する[12]．

$$
\begin{aligned}
Z(u,k) &= (1-\frac{E}{K})u-\int_0^u k^2\,\mathrm{sn}^2\,u\,\mathrm{d}u \\
&= \{1-\frac{E(k)}{K(k)}\}u-\int_0^\theta \frac{k^2\sin^2\theta\cos\theta}{\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}\,\mathrm{d}\theta \\
&= \{1-\frac{E(k)}{K(k)}\}u-\int_0^\theta \frac{k^2\sin^2\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}\,\mathrm{d}\theta \\
&= \{1-\frac{E(k)}{K(k)}\}u-\int_0^\theta \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}+\int_0^\theta \sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta \\
&= \{1-\frac{E(k)}{K(k)}\}F(\theta,k)-F(\theta,k)+E(\theta,k) \\
&= E(\theta,k)-\frac{E(k)}{K(k)}F(\theta,k)
\end{aligned} \tag{322}
$$

この式で，k を k' と置き換える．θ も k の関数で $\theta=\ \mathrm{am}\,(u,k)$ であり，一方，式 (306) から $\psi=\ \mathrm{am}\,(u,k')$ となるので，θ も ψ と同時に置き換えると，

$$
\begin{aligned}
Z(u,k') &= E(\psi,k')-\frac{E(k')}{K(k')}F(\psi,k') \\
&= \frac{K(k')E(\psi,k')-E(k')F(\psi,k')}{K(k')}
\end{aligned} \tag{323}
$$

となる．

次に，式 (323) で，u を $\mathrm{i}u$ に置き換えると，式 (306) から $\mathrm{i}u=F(\phi,k)$ であり，$\phi=\ \mathrm{am}\,(\mathrm{i}u,k)$ となるので，今度は θ を ϕ に置き換えて，

$$
\begin{aligned}
Z(\mathrm{i}u,k) &= E(\phi,k)-\frac{E(k)}{K(k)}F(\phi,k) \\
&= \frac{K(k)E(\phi,k)-E(k)F(\phi,k)}{K(k)}
\end{aligned} \tag{324}
$$

となる．

最後に，式 (321) の左辺と右辺の第 2 項にそれぞれ式 (324) の右辺と式 (323) の右辺を代入すると，

$$
\frac{1}{\mathrm{i}}Z(\mathrm{i}u,k)=\tan\psi\sqrt{1-k'^2\sin^2\psi}-Z(u,k')-\frac{\pi F(\psi,k')}{2KK'} \tag{325}
$$

となる．右辺第 1 項をヤコビの楕円関数を用いて表すと，$\sin\psi=\ \mathrm{sn}\,(u,k')$，$\cos\psi=\ \mathrm{cn}\,(u,k')$ などから，

$$
\mathrm{i}Z(\mathrm{i}u,k)=-\frac{\mathrm{sn}\,(u,k')}{\mathrm{cn}\,(u,k')}\,\mathrm{dn}\,(u,k')+Z(u,k')+\frac{\pi u}{2KK'} \tag{326}
$$

となる．これにヤコビの虚数変換 (104)–(106) を施すと，最終的に，

$$
Z(\mathrm{i}u,k)=\frac{\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}u,k)}{\mathrm{cn}\,(\mathrm{i}u,k)}\,\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}u,k)-\mathrm{i}Z(u,k')-\mathrm{i}\frac{\pi u}{2KK'} \tag{O-5.2}
$$

が得られる．

[12] θ，ψ，ϕ は次のように定義されていて，互いに異なる．

$$
\begin{aligned}
\theta &= \ \mathrm{am}\,(u,k) \\
\psi &= \ \mathrm{am}\,(u,k') \\
\phi &= \ \mathrm{am}\,(\mathrm{i}u,k)
\end{aligned}
$$

＊ ＊ ＊ ＊ ＊

次に式 (O-5.3) を導こう．

ヤコビの楕円関数の微分式 (O-1.6-1) から，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\,\mathrm{cn}\,(u,k') = -\,\mathrm{sn}\,(u,k')\,\mathrm{dn}\,(u,k') \tag{327}$$

である．これから，

$$-\frac{\mathrm{sn}\,(u,k')\,\mathrm{dn}\,(u,k')}{\mathrm{cn}\,(u,k')} = \frac{1}{\mathrm{cn}\,(u,k')}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\,\mathrm{cn}\,(u,k') = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\ln\,\mathrm{cn}\,(u,k') \tag{328}$$

となる．これを用いて式 (O-5.2) を積分すると，

$$\int_0^u \mathrm{i}Z(\mathrm{i}u,k)\,\mathrm{d}u = \ln\,\mathrm{cn}\,(u,k') + \frac{\pi u^2}{4KK'} + \int_0^u Z(u,k')\,\mathrm{d}u \tag{329}$$

である．ここで，式 (111) を用いると，

$$\ln\frac{\Theta(\mathrm{i}u,k)}{\Theta(0,k)} = \ln\,\mathrm{cn}\,(u,k') + \frac{\pi u^2}{4KK'} + \ln\frac{\Theta(u,k')}{\Theta(0,k')} \tag{330}$$

となる．さらに，

$$\frac{\Theta(\mathrm{i}u,k)}{\Theta(0,k)} = \exp\frac{\pi u^2}{4KK'}\,\mathrm{cn}\,(u,k')\frac{\Theta(u,k')}{\Theta(0,k')} \tag{331}$$

とすることができる．

この式で，u を $u+K'$ とすると，

$$\frac{\Theta(\mathrm{i}u+\mathrm{i}K',k)}{\Theta(0,k)} = \exp\frac{\pi(u+K')^2}{4KK'}\,\mathrm{cn}\,(u+K',k')\frac{\Theta(u+K',k')}{\Theta(0,k')} \tag{332}$$

となる．ここで，式 (108) から，

$$\mathrm{cn}\,(u+K',k') = -k\frac{\mathrm{sn}\,(u,k')}{\mathrm{dn}\,(u,k')}, \tag{333}$$

また，$\Theta(u+K)=\Theta_1(u)$ であること（[8], p.222）[13]， $\mathrm{dn}\,(u)=\sqrt{k'}\Theta_1(u)/\Theta(u)$ である（式 (O-1.3-3)，[8], p.244）から，

$$\Theta(u+K',k') = \frac{\mathrm{dn}\,(u,k')}{\sqrt{k}}\Theta(u,k') \tag{334}$$

となるので，この 2 式を式 (332) に代入すると，

$$\begin{aligned}\frac{\Theta(\mathrm{i}u+\mathrm{i}K',k)}{\Theta(0,k)} &= -\exp\frac{\pi(u+K')^2}{4KK'}\sqrt{k}\,\mathrm{sn}\,(u,k')\frac{\Theta(u,k')}{\Theta(0,k')}\\ &= -\exp\frac{\pi(2u+K')}{4K}\sqrt{k}\exp\frac{\pi u^2}{4KK'}\frac{\mathrm{sn}\,(u,k')}{\mathrm{cn}\,(u,k')}\,\mathrm{cn}\,(u,k')\frac{\Theta(u,k')}{\Theta(0,k')}\end{aligned} \tag{335}$$

となる．この式の右辺の該当部分に式 (331) の右辺を代入すると，

$$\frac{\Theta(\mathrm{i}u+\mathrm{i}K',k)}{\Theta(0,k)} = -\exp\frac{\pi(2u+K')}{4K}\sqrt{k}\frac{\mathrm{sn}\,(u,k')}{\mathrm{cn}\,(u,k')}\frac{\Theta(\mathrm{i}u,k)}{\Theta(0,k)} \tag{336}$$

となる．この式の $\mathrm{i}u$ を u（つまり，u を $-\mathrm{i}u$）で置き換えると，

$$\frac{\Theta(u+\mathrm{i}K',k)}{\Theta(0,k)} = \exp\frac{\pi(K'-2\mathrm{i}u)}{4K}\sqrt{k}\frac{\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}u,k')}{\mathrm{cn}\,(\mathrm{i}u,k')}\frac{\Theta(u,k)}{\Theta(0,k)}, \tag{337}$$

[13] これは式 (82)，(86) から $\vartheta_4(z+\frac{1}{2}\pi)=\vartheta_3(z)$ と同じである．

これに，式 (104) から，

$$\mathrm{sn}\,(u,k) = -\mathrm{i}\frac{\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}u,k')}{\mathrm{cn}\,(\mathrm{i}u,k')} \tag{338}$$

となるので，これを代入すれば，

$$\Theta(u+\mathrm{i}K',k) = \mathrm{i}\exp\frac{\pi(K'-2\mathrm{i}u)}{4K}\sqrt{k}\,\mathrm{sn}\,(u,k)\Theta(u,k) \tag{339}$$

となる．この式を対数微分すると，式 (104)，式 (O-1.6-1) から，

$$Z(u+\mathrm{i}K',k) = -\frac{\mathrm{i}\pi}{2K} + \frac{\mathrm{cn}\,(u,k)\,\mathrm{dn}\,(u,k)}{\mathrm{sn}\,(u,k)} + Z(u,k) \tag{340}$$

となる．最後に，u を $-\mathrm{i}a$ と置換え， $\mathrm{sn}\,(u)$，$Z(u)$ が奇関数であることに注意すると，

$$Z(\mathrm{i}K'-\mathrm{i}a,k) = -\frac{\mathrm{i}\pi}{2K} - \frac{\mathrm{cn}\,(\mathrm{i}a,k)\,\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a,k)}{\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a,k)} - Z(\mathrm{i}a,k) \tag{O-5.3}$$

が得られる．

*　*　*　*　*

ついでに，式 (331) で，u を $u+2K'$ とすると，$\Theta(u,k')$ の 1 つの周期は $2K'$ であるから，

$$\begin{aligned}\frac{\Theta(\mathrm{i}u+2\mathrm{i}K',k)}{\Theta(0,k)} &= \exp\frac{\pi(u+2K')^2}{4KK'}\,\mathrm{cn}\,(u,k')\frac{\Theta(u,k')}{\Theta(0,k')}\\ &= \exp\frac{\pi(4K'u+4K'^2)}{4KK'}\exp\left(\frac{\pi u^2}{4KK'}\right)\,\mathrm{cn}\,(u,k')\frac{\Theta(u,k')}{\Theta(0,k')}\end{aligned} \tag{341}$$

となる．ここで，この式の右辺に式 (331) の右辺を代入し，整理すると，

$$\Theta(\mathrm{i}u+2\mathrm{i}K',k) = \exp\frac{\pi(u+K')}{K}\Theta(\mathrm{i}u,k) \tag{342}$$

となる．この式で，$\mathrm{i}u$ を u（つまり，u を $-\mathrm{i}u$）と置き換えると

$$\Theta(u+2\mathrm{i}K',k) = -\exp\frac{\pi(K'-\mathrm{i}u)}{K}\Theta(u,k) \tag{343}$$

となる．この式を対数微分すると，

$$Z(u+2\mathrm{i}K',k) = -\frac{\mathrm{i}\pi}{K} + Z(u,k) \tag{344}$$

という関係式も得られる．

*　*　*　*　*

次に式 (O-5.4) を導こう．

式 (O-5.2) から，$\mathrm{i}u = \mathrm{i}K' - \mathrm{i}a$ として，

$$Z(\mathrm{i}K'-\mathrm{i}a,k) = \mathrm{dn}\,(\mathrm{i}K'-\mathrm{i}a,k)\,\mathrm{sc}\,(\mathrm{i}K'-\mathrm{i}a,k) - \mathrm{i}Z(K'-a,k') - \mathrm{i}\frac{\pi(K'-a)}{2KK'}, \tag{345}$$

次に，式 (O-5.2) から，$u=a$ として，

$$Z(\mathrm{i}a,k) = \mathrm{sc}\,(\mathrm{i}a,k)\,\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a,k) - \mathrm{i}Z(a,k') - \mathrm{i}\frac{\pi a}{2KK'} \tag{346}$$

となる．ここで，式 (108) から，

$$\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}K' - \mathrm{i}a) = \mathrm{i}\frac{\mathrm{cn}\,(-\mathrm{i}a)}{\mathrm{sn}\,(-\mathrm{i}a)} = -\mathrm{i}\frac{\mathrm{cn}\,(\mathrm{i}a)}{\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a)} \tag{347}$$

$$\mathrm{sc}\,(\mathrm{i}K' - \mathrm{i}a) = \frac{1}{k\,\mathrm{sn}\,(-\mathrm{i}a)}\frac{k\,\mathrm{sn}\,(-\mathrm{i}a)}{-\mathrm{i}\,\mathrm{cn}\,(\mathrm{i}a)} = \mathrm{i}\frac{1}{\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a)} \tag{348}$$

したがって，

$$\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}K' - \mathrm{i}a)\,\mathrm{sc}\,(\mathrm{i}K' - \mathrm{i}a) = -\,\mathrm{cs}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{nd}\,(\mathrm{i}a) \tag{349}$$

であるから，式 (349) を式 (345) に代入すると，

$$Z(\mathrm{i}K' - \mathrm{i}a, k) = -\,\mathrm{cs}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{nd}\,(\mathrm{i}a) - \mathrm{i}Z(K' - a, k') - \mathrm{i}\frac{\pi(K' - a)}{2KK'} \tag{350}$$

となる．そこで，式 (346) と式 (350) を式 (O-5.3) に代入して少し整理すると，

$$\mathrm{i}Z(K' - a, k') + \mathrm{i}Z(a, k') = \mathrm{cs}\,(\mathrm{i}a, k)\,\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a, k) + \mathrm{sc}\,(\mathrm{i}a, k)\,\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a, k) - \mathrm{cs}\,(\mathrm{i}a, k)\,\mathrm{nd}\,(\mathrm{i}a, k) \tag{351}$$

となる．右辺を整理すると，

$$\begin{aligned}
&\mathrm{cs}\,(\mathrm{i}a, k)\,\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a, k) + \mathrm{sc}\,(\mathrm{i}a, k)\,\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a, k) - \mathrm{cs}\,(\mathrm{i}a, k)\,\mathrm{nd}\,(\mathrm{i}a, k)\\
&= \frac{\mathrm{cn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a)}{\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a)} + \frac{\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a)}{\mathrm{cn}\,(\mathrm{i}a)} - \frac{\mathrm{cn}\,(\mathrm{i}a)}{\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a)}\\
&= \frac{\mathrm{cn}^2(\mathrm{i}a)\,\mathrm{dn}^2(\mathrm{i}a) + \mathrm{sn}^2(\mathrm{i}a)\,\mathrm{dn}^2(\mathrm{i}a) - \mathrm{cn}^2(\mathrm{i}a)}{\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{cn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a)}\\
&= \frac{-k^2\,\mathrm{cn}^2(\mathrm{i}a)\,\mathrm{sn}^2(\mathrm{i}a) + \mathrm{sn}^2(\mathrm{i}a)\{1 - k^2\,\mathrm{sn}^2(\mathrm{i}a)\}}{\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{cn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a)}\\
&= \frac{(1 - k^2)\,\mathrm{sn}^2(\mathrm{i}a)}{\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{cn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a)} = k'^2\frac{\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a)}{\mathrm{cn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a)}
\end{aligned} \tag{352}$$

となるから，

$$Z(K' - a, k') + Z(a, k') = -\mathrm{i}k'^2\frac{\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a)}{\mathrm{cn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a)} \tag{O-5.4}$$

が得られる．

* * * * *

18.6 Derived Thermodynamic Functions

この小節では熱力学的関数の内部エネルギー U，および比熱の一般的な式をヤコビのツェータ関数など実際に計算できる関数で表す．

- 臨界点における内部エネルギー U

内部エネルギー U は

$$U = -NJ'\frac{\partial \ln \lambda}{\partial H'} - NJ\frac{\partial \ln \lambda}{\partial H} \tag{O-6.1a}$$

である．

まず，低温域 $H' > H^*$ の場合を考えよう．式 (O-6.1a) の第 1 項は，式 (O-113a) と式 (O-5.1) から，

$$\frac{\partial \ln \lambda}{\partial H'} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos\delta^*\,\mathrm{d}\omega = -\frac{2\mathrm{i}K}{\pi}(k\,\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a)\coth 2H^* - Z(\mathrm{i}a)\coth 2H') \tag{353}$$

である．一方，式 (O-2.2a) から，

$$\coth 2H^* = \frac{\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a)}{-\mathrm{i}k\,\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a)}, \qquad \coth 2H' = \frac{\mathrm{cn}\,(\mathrm{i}a)}{-\mathrm{i}\,\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a)} \tag{354}$$

であるから，

$$\coth 2H^* = \frac{\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a)}{k\,\mathrm{cn}\,(\mathrm{i}a)} \coth 2H' \tag{355}$$

となる．これを式 (353) に代入すると，

$$\frac{\partial \ln \lambda}{\partial H'} = -\frac{2\mathrm{i}K}{\pi}\left\{\frac{\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a)}{\mathrm{cn}\,(\mathrm{i}a)} - Z(\mathrm{i}a)\right\}\coth 2H' \tag{356}$$

である．式 (O-5.2) から

$$Z(\mathrm{i}a,k) = \mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a,k)\,\mathrm{sc}\,(\mathrm{i}a,k) - \mathrm{i}Z(a,k') - \mathrm{i}\frac{\pi a}{2KK'} \tag{357}$$

で，これを式 (356) に代入すると，

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln \lambda}{\partial H'} &= -\frac{2\mathrm{i}K}{\pi}\left\{\mathrm{i}Z(a,k') + \frac{\mathrm{i}\pi a}{2KK'}\right\}\coth 2H' \\ &= \coth 2H'\left\{\frac{a}{K'} + \frac{2K}{\pi}Z(a,k')\right\} \\ &= \coth 2H'\left\{2y + \frac{2K}{\pi}Z(2yK',k')\right\}\end{aligned} \tag{O-6.1b-1}$$

次に，式 (O-6.1a) の第 2 項について考える．式 (O-113a) と式 (O-5.1) から，式 (354) も用いて，

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln \lambda}{\partial H} &= \cosh 2H^* - \frac{\sinh 2H^*}{\pi}\int_0^* \cos\delta'\,\mathrm{d}\omega \\ &= \cosh 2H^* + \frac{2\mathrm{i}K}{\pi}\sinh 2H^*\{k\,\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a)\coth 2H' - Z(\mathrm{i}a)\coth 2H^*\} \\ &= \cosh 2H^*\left[1 + \frac{2\mathrm{i}K}{\pi}\tanh 2H^*\{k\,\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a)\frac{\mathrm{cn}\,(\mathrm{i}a)}{-\mathrm{i}\,\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a)} - Z(\mathrm{i}a)\frac{\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a)}{-\mathrm{i}k\,\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a)}\}\right]\end{aligned}$$

となる．ここで，[1] の式 (44) と式 (2.2a) より，

$$\cosh 2H^* = \coth 2H \tag{358}$$

$$\tanh 2H^* = \frac{-\mathrm{i}k\,\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a)}{\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a)} \tag{359}$$

であるから，

$$\frac{\partial \ln \lambda}{\partial H} = \coth 2H\left[1 + \frac{2\mathrm{i}K}{\pi}\left\{\frac{k^2\,\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{cn}\,(\mathrm{i}a)}{\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a)} - Z(\mathrm{i}a)\right\}\right] \tag{360}$$

となる．$Z(\mathrm{i}a)$ に式 (O-5.2) を代入して，

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln \lambda}{\partial H} &= \coth 2H\left[1 + \frac{2\mathrm{i}K}{\pi}\left\{\frac{k^2\,\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{cn}\,(\mathrm{i}a)}{\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a)} - \mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{sc}\,(\mathrm{i}a) + \mathrm{i}Z(a,k') + \frac{\mathrm{i}\pi a}{2KK'}\right\}\right] \\ &= \coth 2H\left[1 - \frac{a}{K'} + \frac{2\mathrm{i}K}{\pi}\left\{\frac{\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a)}{\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{cn}\,(\mathrm{i}a)}\{k^2\,\mathrm{cn}^2\,(\mathrm{i}a) - \mathrm{dn}^2\,(\mathrm{i}a)\} + \mathrm{i}Z(\mathrm{i}a)\right\}\right] \\ &= \coth 2H\left[1 - 2y + \frac{2\mathrm{i}K}{\pi}\left\{\frac{\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a)}{\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{cn}\,(\mathrm{i}a)}(k^2-1) + \mathrm{i}Z(a,k')\right\}\right]. \\ &= \coth 2H\left[1 - 2y + \frac{2\mathrm{i}K}{\pi}\left\{-k'^2\,\mathrm{sc}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{nd}\,(\mathrm{i}a) + \mathrm{i}Z(a,k')\right\}\right].\end{aligned}$$

ここで，式 (O-5.4) の右辺を上式右辺中括弧内第 1 項に代入すると，

$$\frac{\partial \ln \lambda}{\partial H} = \coth 2H \left[1 - 2y + \frac{2\mathrm{i}K}{\pi}\{-\mathrm{i}Z(a,k') - \mathrm{i}Z(K'-a,k') + \mathrm{i}Z(a,k')\}\right] \tag{361}$$

$$= \coth 2H \left[1 - 2y + \frac{2\mathrm{i}K}{\pi} Z(K'-a,k')\right]$$

$$= \coth 2H \left[1 - 2y + \frac{2\mathrm{i}K}{\pi} Z([1-2y]K',k')\right] \tag{O-6.1b-2}$$

＊ ＊ ＊ ＊ ＊

次に，$H' < H^*$ 高温域の場合を考えよう．

式 (354)，(355) に対応して，式 (O-2.2b) から，

$$\coth 2H^* = \frac{\mathrm{cn}\,(\mathrm{i}a)}{-\mathrm{i}\,\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a)}, \qquad \coth 2H' = \frac{\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a)}{-\mathrm{i}k\,\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a)} \tag{362}$$

であるから，

$$\coth 2H^* = \frac{k\,\mathrm{cn}\,(\mathrm{i}a)}{\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a)} \coth 2H' \tag{363}$$

となる．これを式 (353) に代入すると，

$$\frac{\partial \ln \lambda}{\partial H'} = -\frac{2\mathrm{i}K}{\pi} \coth 2H' \left\{k^2 \frac{\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{cn}\,(\mathrm{i}a)}{\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a)} - Z(\mathrm{i}a)\right\} \tag{364}$$

である．式 (O-5.2) から

$$Z(\mathrm{i}a,k) = \mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a,k)\,\mathrm{sc}\,(\mathrm{i}a,k) - \mathrm{i}Z(a,k') - \mathrm{i}\frac{\pi a}{2KK'} \tag{365}$$

で，これを式 (364) に代入すると，

$$\frac{\partial \ln \lambda}{\partial H'} = -\frac{2\mathrm{i}K}{\pi} \coth 2H' \left\{k^2 \frac{\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{cn}\,(\mathrm{i}a)}{\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a)} - \mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{sc}\,(\mathrm{i}a) + \mathrm{i}Z(a,k') + \frac{\mathrm{i}\pi a}{2KK'}\right\} \tag{366}$$

ここで，式 (361) を得たのと同じ楕円関数の計算をすることにより，

$$\frac{\partial \ln \lambda}{\partial H'} = -\frac{2\mathrm{i}K}{\pi} \coth 2H' \left\{-k^2\,\mathrm{sc}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{nd}\,(\mathrm{i}a) + \mathrm{i}Z(a,k') + \frac{\mathrm{i}\pi a}{2KK'}\right\}$$

さらに，式 (O-5.4) の右辺を代入することにより，

$$\frac{\partial \ln \lambda}{\partial H'} = -\frac{2\mathrm{i}K}{\pi} \coth 2H' \left\{-\mathrm{i}Z(a,k') - \mathrm{i}Z(K'-a,k') + +\mathrm{i}Z(a,k') + \frac{\mathrm{i}\pi a}{2KK'}\right\} \tag{367}$$

$$= \coth 2H' \left\{\frac{a}{K'} - \frac{2K}{\pi} Z(K'-a,k')\right\}$$

$$= \coth 2H' \left\{2y - \frac{2K}{\pi} Z([1-2y]K',k')\right\} \tag{O-6.1c-1}$$

が得られる．

次に，式 (O-113a)，式 (O-5.1) から，前と同様に，

$$\frac{\partial \ln \lambda}{\partial H} = \cosh 2H^* - \frac{\sinh 2H^*}{\pi} \int_0^* \cos \delta'\,\mathrm{d}\omega$$

$$= \cosh 2H^* + \frac{2\mathrm{i}K}{\pi} \sinh 2H^* \{k\,\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a) \coth 2H' - Z(\mathrm{i}a) \coth 2H^*\}$$

$$= \cosh 2H^* \left[1 + \frac{2\mathrm{i}K}{\pi} \tanh 2H^* \{k\,\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a) \coth 2H' - Z(\mathrm{i}a) \coth 2H^*\}\right] \tag{368}$$

ここで式 (358) を用いると，

$$= \coth 2H \left[1 + \frac{2\mathrm{i}K}{\pi} \tanh 2H^* \{ k \,\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a) \coth 2H' - Z(\mathrm{i}a) \coth 2H^* \} \right] \tag{369}$$

ここで $\tanh 2H^*$ と $\coth 2H'$ の積に式 (363) を用いると，

$$= \coth 2H \left[1 + \frac{2\mathrm{i}K}{\pi} \{ k \,\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a) \frac{\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a)}{k \,\mathrm{cn}\,(\mathrm{i}a)} - Z(\mathrm{i}a) \} \right] \tag{370}$$

となる．ここで，$Z(\mathrm{i}a)$ に式 (O-5.2) を代入すると，ヤコビの楕円関数の部分は相殺して，

$$\begin{aligned}
&= \coth 2H \left[1 + \frac{2\mathrm{i}K}{\pi} \{ \frac{\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a)}{\mathrm{cn}\,(\mathrm{i}a)} - \,\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{sc}\,(\mathrm{i}a) + \mathrm{i}Z(\mathrm{i}a) + \mathrm{i}\frac{\pi a}{KK'} \} \right] \\
&= \coth 2H \left[1 - \frac{a}{K'} - \frac{2K}{\pi} Z(a, k') \right] \\
&= \coth 2H \left[1 - 2y - \frac{2K}{\pi} Z(2yK', k') \right]
\end{aligned} \tag{O-6.1c-2}$$

が得られる．

＊　＊　＊　＊　＊

● 臨界点における内部エネルギー U

臨界点における内部エネルギー U の連続性について考えてみよう．臨界点で熱力学的関数は第 1 種完全積分 $K(k)$ の発散を有する．臨界点では $k = 1$ であるから，その極限の振る舞いを知ることは，補母数 k' が十分小さい場合を考えることと等価である．

ヤコビの虚数変換 (104)–(106) を用いると，式 (O-5.4) の右辺は，

$$k'^2(-\mathrm{i})\,\mathrm{sc}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{nd}\,(\mathrm{i}a) = k'^2(-\mathrm{i}) \frac{\mathrm{i}\dfrac{\mathrm{sn}\,(a,k')}{\mathrm{cn}\,(a,k')}}{\dfrac{1}{\mathrm{cn}\,(a,k')}} \frac{1}{\dfrac{\mathrm{dn}\,(a,k')}{\mathrm{cn}\,(a,k')}} = k'^2 \frac{\mathrm{sn}\,(a,k')\,\mathrm{cn}\,(a,k')}{\mathrm{dn}\,(a,k')} \tag{371}$$

となる．k' が十分小さいので，

$$\frac{\mathrm{sn}\,(a,k')\,\mathrm{cn}\,(a,k')}{\mathrm{dn}\,(a,k')} \simeq \frac{\sin(a/2K')\cos(a/2K')}{1} \leq 1$$

であるから，

$$k'^2(-\mathrm{i})\,\mathrm{sc}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{nd}\,(\mathrm{i}a) \leq k'^2 = (1+k)(1-k) \leq 2(1-k)$$

となる．したがって，任意の $0 \leq a \leq K'$ について，

$$Z(a,k') + Z(K'-a,k') \leq k'^2 \leq 2(1-k) \tag{372}$$

が成り立つ．

臨界点における U の連続性を確認するには，$H' > H^*$ の U から $H' < H^*$ の U を差し引いた差分 ΔU が $k \to 1 (k' \to 0)$ で 0 になることを示せばよい．まず，

$$\begin{aligned}
\Delta U &= |U_{H'>H^*} - U_{H'<H^*}| \\
&= NJ' \coth 2H' \{ 2y + \frac{2K}{\pi} Z(2yK', k') - 2y + \frac{2K}{\pi} Z([1-2y]K', k') \} \\
&\qquad + NJ \coth 2H \{ 1 - 2y + \frac{2K}{\pi} Z([1-2y]K', k') - 1 + 2y + \frac{2K}{\pi} Z(2yK', k') \} \\
&= \frac{2NK}{\pi} (J' \coth 2H' + J \coth 2H) \{ Z(2yK', k') + Z([1-2y]K', k') \}
\end{aligned} \tag{373}$$

となる．$K(k)$ は $k=1$ で対数発散し ([6], p.228),

$$K(k) \simeq -\frac{1}{2}\ln(1-k) \tag{374}$$

であるから，式 (372)–(374) により，

$$\Delta U \le \frac{2N}{\pi}(J'\coth 2H' + J\coth 2H) \le -(1-k)\ln(1-k) \ll 1 \tag{375}$$

となる．すなわち，U は臨界点で連続であることがこれで示された．

＊ ＊ ＊ ＊ ＊

● 比熱

ここで，比熱を具体的に計算しよう．

式 (111b)，(113b) から，

$$\begin{aligned}
\frac{C}{Nk_\mathrm{B}} &= H^2\frac{\partial^2}{\partial H^2}\ln\lambda + 2HH'\frac{\partial^2}{\partial H\partial H'}\ln\lambda + H'^2\frac{\partial^2}{\partial H'^2}\ln\lambda \\
&= 2H^2\sinh^2 2H^*\left(-1+\coth 2H^*\int_0^\pi \cos\delta'\frac{\mathrm{d}\omega}{\pi} + \int_0^\pi \sin^2\delta'\coth\gamma\frac{\mathrm{d}\omega}{\pi}\right) \\
&\qquad + 4HH'\sinh 2H^*\int_0^\pi \frac{\sin\delta^*\sin\delta'}{\sinh\gamma}\frac{\mathrm{d}\omega}{\pi} + 2H'^2\int_0^\pi \sin^2\delta^*\coth\gamma\frac{\mathrm{d}\omega}{\pi} \\
&= 2H^2\sinh^2 2H^*\left\{-1+\frac{\coth 2H^*}{\pi}(-2\mathrm{i}K)(k\,\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a)\coth 2H' - Z(\mathrm{i}a)\coth 2H^*)\right\} \\
&\qquad + \frac{2H^2}{\pi}(-2\mathrm{i}KZ(\mathrm{i}a)) \\
&\qquad + \frac{4HH'\sinh 2H^*}{\pi}2(K-E)\frac{\mathrm{i}}{k\,\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a)} \\
&\qquad + \frac{2H'^2}{\pi\sinh 2H'}(-2\mathrm{i}KZ(\mathrm{i}a))
\end{aligned} \tag{376}$$

ここで，中括弧第 2 項の $\coth 2H^*\coth 2H'$ を $\cosh 2H^*\cosh 2H'/\sinh 2H^*\sinh 2H'$ とし，温度域に依存しない形にする．また，第 3 項 $\mathrm{i}/k\,\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a)$ を等価的に書き換え，$\coth^2 2H^* - 1/\sinh 2H^* = 1$ であること，などから，

$$\begin{aligned}
&= \frac{4K}{\pi}\left(\frac{H}{\sinh 2H}\right)^2\left\{-\frac{\pi}{2K} - \mathrm{i}\frac{\cosh 2H^*\cosh 2H'}{\sinh 2H^*\sinh 2H'}k\,\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a) + \left(\coth^2 2H^* - \frac{1}{\sinh^2 2H^*}\right)Z(\mathrm{i}a)\right\} \\
&\quad + \frac{4}{\pi}2(K-E)\sinh 2H^*\frac{-\mathrm{i}\,\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a)}{(-\mathrm{i}k\,\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a))(-\mathrm{i}\,\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a))}HH' \\
&\quad - \mathrm{i}\frac{4K}{\pi}Z(\mathrm{i}a)\left(\frac{H'}{\sinh 2H'}\right)^2
\end{aligned} \tag{377}$$

となる．式 (O-2.2a) または式 (O-2.2b) を用いて中括弧内の $\cosh 2H^*\cosh 2H'/\sinh 2H^*\sinh 2H'$ をヤコビの楕円関数に書き換える．両方の温度領域で共通である．第 2 項の楕円関数も，両方の温度域で共通に，$(-\mathrm{i}k\,\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a))(-\mathrm{i}\,\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a)) = \sinh 2H^*\sinh 2H'$ と書き換えられる．さらに，第 1 項の中括弧に式 (O-5.3) を用

いて，

$$= \frac{4}{\pi}\left[K\left(\frac{H}{\sinh 2H}\right)^2\left\{-\frac{\pi}{2K}+\mathrm{i}\frac{\mathrm{cn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a)}{\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a)}+\mathrm{i}Z(\mathrm{i}a)\right\}\right.$$
$$\left.+2(K-E)\frac{\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a)}{i\sinh 2H'}HH'-\mathrm{i}KZ(\mathrm{i}a)\left(\frac{H'}{\sinh 2H'}\right)^2\right]$$
$$= \frac{4}{\pi}\left[-\mathrm{i}KZ(\mathrm{i}a)\left(\frac{H'}{\sinh 2H'}\right)^2-\mathrm{i}KZ(\mathrm{i}K'-\mathrm{i}a)\left(\frac{H}{\sinh 2H}\right)^2+2(K-E)\left(\frac{\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a)}{\mathrm{i}\sinh 2H'}\right)HH'\right] \tag{O-6.2}$$

が最終的に得られる．この式は，H と H' がわかれば，つまり J と J' の比がわかれば，逆温度 H の関数として具体的に計算することができる．計算するのは，第 1 種，第 2 種完全楕円積分，それから $Z(a)$ などである．$Z(\mathrm{i}a)$ と $Z(\mathrm{i}K'-\mathrm{i}a)$ を式 (O-5.2) と式 (O-5.4) を用いて H と H' の双曲線関数と振幅関数に変換できるので，それを計算すればよい．この節の最後で，種々の J と J' の比に対する比熱の温度依存性を数値計算する．

* * * * *

18.7 The Partition Function

• 分配関数

分配関数の計算には式 (O-106) を用いる．分配関数とはいっても，λ ではなくここでは $\ln\lambda_\infty$ を求める．すなわち，求めるのは

$$\ln\lambda_\infty = \tfrac{1}{2}\ln(2\sinh 2H)+\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \gamma\,\mathrm{d}\omega \tag{O-106}$$

である．計算を要するのは第 2 項の積分であるが，Onsager は一度 a で微分しておいてから，最後に積分して結果を得ている．つまり，

$$\frac{\partial}{\partial a}\int_0^\pi \gamma\,\mathrm{d}\omega = \frac{\partial}{\partial a}\int_{2K}^0 \gamma\frac{\partial\omega}{\partial u}\,\mathrm{d}u = -\int_0^{2K}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial a}\frac{\partial\omega}{\partial u}+\gamma\frac{\partial^2\omega}{\partial a\partial u}\right)\mathrm{d}u \tag{378}$$

この積分内の第 2 項を部分積分する．部分積分すると $\gamma\partial\omega/\partial a$ となるが，$u=0$ および $u=2K$ で $\mathrm{sn}\,u=0$ であるから，式 (O-2.5) より $\partial\omega/\partial a=0$ となって，この部分は残らない．したがって，部分積分して，式 (O-2.5) を代入すると，式 (378) は，

$$\int_0^{2K}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial a}\frac{\partial\omega}{\partial u}-\frac{\partial\gamma}{\partial a}\frac{\partial\omega}{\partial u}\right)\mathrm{d}u = \int_0^{2K}\left\{\left(\frac{\partial\gamma}{\partial a}\right)^2+\left(\frac{\partial\gamma}{\partial u}\right)^2\right\}\mathrm{d}u \tag{379}$$

となる．ここで，被積分関数は，式 (O-2.5) を用いて，

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial a}\right)^2+\left(\frac{\partial\gamma}{\partial u}\right)^2 &= \left(\frac{k'^2}{\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{dn}\,u-k\,\mathrm{cn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{cn}\,u}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{i}k'^2k\,\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{dn}\,u-k\,\mathrm{cn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{cn}\,u}\right)^2\\
&= \frac{k'^4}{\{\,\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{dn}\,u-k\,\mathrm{cn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{cn}\,u\}^2}\{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{sn}^2\,u\}\\
&= \frac{k'^4\{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{sn}^2\,u\}\{\,\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{dn}\,u-k\,\mathrm{cn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{cn}\,u\}^2}{\{\,\mathrm{dn}^2\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{dn}^2\,u-k^2\,\mathrm{cn}^2\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{cn}^2\,u\}^2}\\
&= \frac{k'^4(1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{sn}^2\,u)(\,\mathrm{dn}^2\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{dn}^2\,u-2k\,\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{cn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{cn}\,u+k^2\,\mathrm{cn}^2\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{cn}^2\,u)}{k'^4(1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{sn}^2\,u)^2}\\
&= \frac{\mathrm{dn}^2\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{dn}^2\,u-2k\,\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{cn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{cn}\,u+k^2\,\mathrm{cn}^2\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{cn}^2\,u}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{sn}^2\,u}\end{aligned} \tag{380}$$

となるが，分子の第 2 項は $\mathrm{cn}\, u$ の 1 次の項であるので K に関して反対称，したがって，0 から $2K$ における積分で 0 になるから，被積分関数にするときには除外する．結局，

$$\int_0^{2K}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial a}\frac{\partial\omega}{\partial u}-\frac{\partial\gamma}{\partial a}\frac{\partial\omega}{\partial u}\right)\mathrm{d}u=\int_0^{2K}\frac{\mathrm{dn}^2\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{dn}^2\,u+k^2\,\mathrm{cn}^2\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{cn}^2\,u}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{sn}^2\,u}\,\mathrm{d}u \tag{381}$$

となる．

この積分に先立ち，まず，被積分関数の分子を次のように変形する．

$$\begin{aligned}
&\mathrm{dn}^2\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{dn}^2\,u+k^2\,\mathrm{cn}^2\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{cn}^2\,u\\
&=\ \mathrm{dn}^2\,(\mathrm{i}a)\{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,u\}+k^2\,\mathrm{cn}^2\,(\mathrm{i}a)(1-\ \mathrm{sn}^2\,u)\\
&=\ \mathrm{dn}^2\,(\mathrm{i}a)-k^2\,\mathrm{dn}^2\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{sn}^2\,u+k^2\,\mathrm{cn}^2\,(\mathrm{i}a)-k^2\,\mathrm{cn}^2\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{sn}^2\,u\\
&=\ \mathrm{dn}^2\,(\mathrm{i}a)+k^2\{1-\ \mathrm{sn}^2\,(\mathrm{i}a)\}+k^2\{-\,\mathrm{dn}^2\,(\mathrm{i}a)-\ \mathrm{cn}^2\,(\mathrm{i}a)\}\,\mathrm{sn}^2\,u\\
&=\ \mathrm{dn}^2\,(\mathrm{i}a)+k^2-k^2\,\mathrm{sn}^2\,(\mathrm{i}a)+k^2\{-\,\mathrm{dn}^2\,(\mathrm{i}a)+\ \mathrm{sn}^2\,(\mathrm{i}a)-1\}\,\mathrm{sn}^2\,u\\
&=\{2\,\mathrm{dn}^2\,(\mathrm{i}a)+k^2-1\}-k^2\,\mathrm{sn}^2\,u+k^2\,\mathrm{sn}^2\,u\{\,\mathrm{sn}^2\,(\mathrm{i}a)-\ \mathrm{dn}^2\,(\mathrm{i}a)\}\\
&=\{2\,\mathrm{dn}^2\,(\mathrm{i}a)+k^2-1\}-k^2\,\mathrm{sn}^2\,u\{\,\mathrm{dn}^2\,(\mathrm{i}a)+k^2\,\mathrm{sn}^2\,(\mathrm{i}a)\}+k^2\,\mathrm{sn}^2\,u\{\,\mathrm{sn}^2\,(\mathrm{i}a)-\ \mathrm{dn}^2\,(\mathrm{i}a)\}\\
&=\{2\,\mathrm{dn}^2\,(\mathrm{i}a)+k^2-1\}-k^2\{\,\mathrm{dn}^2\,(\mathrm{i}a)+k^2\,\mathrm{sn}^2\,(\mathrm{i}a)\}\,\mathrm{sn}^2\,u+k^2\,\mathrm{sn}^2\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{sn}^2\,u-k^2\,\mathrm{dn}^2\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{sn}^2\,u\\
&=\{2\,\mathrm{dn}^2\,(\mathrm{i}a)+k^2-1\}-2k^2\,\mathrm{sn}^2\,u\,\mathrm{dn}^2\,(\mathrm{i}a)-k^4\,\mathrm{sn}^2\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{sn}^2\,u+k^2\,\mathrm{sn}^2\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{sn}^2\,u\\
&=\{2\,\mathrm{dn}^2\,(\mathrm{i}a)+k^2-1\}-2k^2\,\mathrm{dn}^2\,(\mathrm{i}a)\{\,\mathrm{sn}^2\,(\mathrm{i}a)+\ \mathrm{cn}^2\,(\mathrm{i}a)\}\,\mathrm{sn}^2\,u+k^2(1-k^2)\,\mathrm{sn}^2\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{sn}^2\,u\\
&=\{2\,\mathrm{dn}^2\,(\mathrm{i}a)+k^2-1\}-2k^2\,\mathrm{dn}^2\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{sn}^2\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{sn}^2\,u-2k^2\,\mathrm{dn}^2\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{cn}^2\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{sn}^2\,u+k^2(1-k^2)\,\mathrm{sn}^2\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{sn}^2\,u\\
&=\{2\,\mathrm{dn}^2\,(\mathrm{i}a)+k^2-1\}-k^2\,\mathrm{sn}^2\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{sn}^2\,u\{2\,\mathrm{dn}^2\,(\mathrm{i}a)+k^2-1\}-2k^2\,\mathrm{dn}^2\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{cn}^2\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{sn}^2\,u\\
&=\{2\,\mathrm{dn}^2\,(\mathrm{i}a)+k^2-1\}\{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{sn}^2\,u\}-2k^2\,\mathrm{dn}^2\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{cn}^2\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{sn}^2\,u
\end{aligned} \tag{382}$$

この結果を用いると，被積分関数は，

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{dn}^2\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{dn}^2\,u+k^2\,\mathrm{cn}^2\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{cn}^2\,u}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{sn}^2\,u}\\
&=2\,\mathrm{dn}^2\,(\mathrm{i}a)+k^2-1-\frac{2\,\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{cn}\,(\mathrm{i}a)}{\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a)}\frac{k^2\,\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{cn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{sn}^2\,u}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{sn}^2\,u}
\end{aligned} \tag{383}$$

となる．第 2 項の積分は，式 (O-1.8) を用いることができるので，結局，

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2K}\frac{\mathrm{dn}^2\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{dn}^2\,u+k^2\,\mathrm{cn}^2\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{cn}^2\,u}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{sn}^2\,u}\,\mathrm{d}u\\
&=2K(2\,\mathrm{dn}^2\,(\mathrm{i}a)+k^2-1)-2\frac{\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{cn}\,(\mathrm{i}a)}{\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a)}2KZ(\mathrm{i}a)\\
&=2K\Phi(\mathrm{i}a)
\end{aligned} \tag{384}$$

となる．ただし，$\Phi(u)$ は，

$$\Phi(u)=2\,\mathrm{dn}^2\,u-k'^2-2\,\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{cs}\,uZ(u) \tag{O-7.1-3}$$

で定義される．これにより，

$$\int_0^{\pi}\gamma\ \mathrm{d}\omega=2K\int_0^{a}\Phi(\mathrm{i}a)\,\mathrm{d}a=2K\int_0^{a}\Phi(\mathrm{i}u)\,\mathrm{d}u \tag{O-7.1-2}$$

となる．この積分の下限は，0 となる．$a=0$ のときは，式 (2.2a)，(2.2b) により，$H'=H^*=0$ となり，したがって，双曲余弦定理で $\cosh\gamma=1$ となり，$\gamma=0$ でなければならない[14]．

[14] この部分は少し説明を加えれば，γ は a の関数でもあるので $\gamma(a)$ と書くことにすれば，

$$\int_0^{\pi}\gamma(a)\ \mathrm{d}\omega=\int_0^{\pi}\gamma(0)\ \mathrm{d}\omega+\int_0^{a}\left(\int_0^{\pi}\frac{\partial\gamma(a)}{\partial a}\,\mathrm{d}\omega\right)\mathrm{d}a$$

ということで，式 (O-7.1-2) が成り立つためには，上の式の第 1 項が 0 であることを示さないといけないのである．

あるいは，式 (O-2.4) から $\gamma(a,u)$ は，

$$\cosh\gamma(a,u) = \frac{\mathrm{cn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{dn}\,u - k\,\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{dn}\,u - k\,\mathrm{cn}\,(\mathrm{i}a)\,\mathrm{cn}\,u} \tag{385}$$

であるから，

$$\cosh\gamma(0,u) = \frac{\mathrm{dn}\,u - k\,\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{dn}\,u - k\,\mathrm{cn}\,u} = 1$$

となる．つまり，

$$\gamma(0,u) = \cosh^{-1}(1) = 0 \tag{O-7.1-1}$$

ということである．

$\Phi(u)$ を数値計算する場合，式 (O-7.1-3) のままでは不便である．これを収束性の良いノーム $q = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\tau}$ を用いた展開式を作ることができれば都合がよい．Onsager はリュービルの定理を使って，以下のようにしてこれを求めている．

関数 $\Phi(u)$ は偶関数で，周期は $2K$ である．偶関数であることは，式 (O-7.1-3) において，$\mathrm{dn}\,u$，$\mathrm{cn}\,u$ が偶関数，$\mathrm{sn}\,u$，$Z(u)$ が奇関数であるから明らかである．また，$\mathrm{sn}\,(u+2K) = -\,\mathrm{sn}\,(u)$，$\mathrm{cn}\,(u+2K) = -\,\mathrm{cn}\,(u)$ であるから，$\mathrm{cs}\,u$ の周期は $2K$ である．また，式 (87) から，$\Theta(u)$ の周期が $2K$ であるから，$Z(u) = \Theta'(u)/\Theta(u)$［式 (111)］の周期も $2K$ であることがわかる．

次に，$\Phi(u)$ の極を考えよう．式 (O-7.1-3) で，まず，$\mathrm{dn}^2\,u$ から $u = \mathrm{i}K'$ に 2 位の極があることがわかる．式 (90) から，$\mathrm{cs}\,u$ で $u = 2mK$ に 1 位の極，式 (113) より，$Z(u)$ で $u = 2mK + \mathrm{i}nK'$ に 1 位の極がある．以上が，$\Phi(u)$ の極であるが，$Z(0) = 0$ であるから，その中から $u = 0$ は除く必要がある．つまり，$\Phi(u)$ の極 u_0 は

$$u_0 = 2mK + n\mathrm{i}K'; \quad (n \neq 0) \tag{386}$$

となる．

上の極の留数を求めよう．引数が純虚数のままでは都合が悪い．そこで，$\Phi(u)$ の u を $\mathrm{i}u$ に変えて，右辺を u の関数で表したい．そのため，ヤコビの虚数変換 (104)–(106) と式 (O-5.2) を用いて式 (O-7.1-3) を次のように変形する．

$$\begin{aligned}
\Phi(\mathrm{i}u) &= 2\,\mathrm{dn}^2\,(\mathrm{i}u) - k'^2 - 2\,\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}u)\,\mathrm{cs}\,(\mathrm{i}u)Z(\mathrm{i}u) \\
&= 2\,\mathrm{dc}^2\,(u,k') - k'^2 - 2\,\mathrm{dc}\,(u,k')\frac{1}{\mathrm{i}\,\mathrm{sn}\,(u,k')}\left\{\mathrm{dc}\,(u,k')\mathrm{i}\,\mathrm{sn}\,(u,k') - \mathrm{i}Z(u,k') - \mathrm{i}\frac{\pi u}{2KK'}\right\} \\
&= 2\,\mathrm{dc}^2\,(u,k') - k'^2 - 2\,\mathrm{dc}^2\,(u,k') + \frac{2\,\mathrm{dc}\,(u,k')}{\mathrm{sn}\,(u,k')}\left\{Z(u,k') + \mathrm{i}\frac{\pi u}{2KK'}\right\} \\
&= -k'^2 + \,\mathrm{dc}\,(u,k')\,\mathrm{ns}\,(u,k')\left\{2Z(u,k') + \mathrm{i}\frac{\pi u}{KK'}\right\}
\end{aligned} \tag{O-7.2}$$

ここで，$\Phi(\mathrm{i}u)$ を u の関数とみなせば，$\Phi(u)$ の極を u_0 とするとき，$u_0 = 2mK + n\mathrm{i}K' = \mathrm{i}(-2m\mathrm{i}K + nK')$ であるから，$\Phi(\mathrm{i}u)$ の極は式 (381) から変化して，

$$-\mathrm{i}u_0 = -2m\mathrm{i}K + nK'; \quad (n \neq 0) \tag{387}$$

となる．

$\Phi(u)$ の $u = u_0$ における留数を $R(u_0)$ で表すと，

$$R(u_0) = [(u - u_0)\Phi(u)]_{u=u_0} \tag{388}$$

である．この式で u を $\mathrm{i}u$ と置き換えると，

$$R(u_0) = [(\mathrm{i}u - u_0)\Phi(\mathrm{i}u)]_{\mathrm{i}u=u_0} = [(\mathrm{i}(u + \mathrm{i}u_0))\Phi(\mathrm{i}u)]_{u=-\mathrm{i}u_0} \tag{389}$$

となる．したがって，この式を用いて留数を計算すればよい．

まず，$\Phi(\mathrm{i}u)$ の極と留数を調べる．関係する関数は，$\mathrm{dc}\,(u,k')$，$\mathrm{ns}\,(u,k')$，$Z(u,k')$ である．式 (94)，(113) から，それぞれの極と留数，および $u=0,K'$ の値は，

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & 周期 & 極 & 留数 & u=0 & 留数 & u=K' & 留数 \\
\mathrm{dc}\,(u,k') & 4K' & (2m+1)K' & & 1 & & \infty & -1 \\
\mathrm{ns}\,(u,k') & 4K' & 2mK' & & \infty & 1 & 1 & \\
Z(u,k') & 2K' & (2n+1)\mathrm{i}K & 1 & 0 & & & 0
\end{array}
\tag{390}
$$

となる．n，m は整数である．また，$\mathrm{dc}\,(u+2K)=-\,\mathrm{dc}\,(u)$, $\mathrm{ns}\,(u+2K)=-\,\mathrm{ns}\,(u)$ という関係から，$\mathrm{ns}\,(u,k')$，$Z(u,k')$ とも $2K'$ ごとに符号が変わから，留数も $2K'$ ごとに符号が変わる．

ここで，$\Phi(\mathrm{i}u)$ の極は式 (390) から，K に関する部分は $(2n+1)\mathrm{i}K$ で $\mathrm{i}K$ の奇数倍であるのに対し，$\Phi(u)$ では $u_0=2mK$ で K の偶数倍の極しか存在しない．つまり，K を含む極は存在しない．したがって，$m=0$ のときにのみ，$R(2m\mathrm{i}K+nK')$ は 0 でない．

残る $\Phi(u)$ の極 $u_0=n\mathrm{i}K'$ では，$\Phi(\mathrm{i}u)$ の極 $(2m+1)K'$ と $2mK'$ が一致するので 0 でない留数が存在する．ただし，n が奇数と偶数の場合では留数が異なるので別々に計算する．

$\Phi(\mathrm{i}u)$ の留数は式 (387) から，

$$
R(2mK+n\mathrm{i}K')=R(n\mathrm{i}K')=\left[\mathrm{i}(u-nK')\Phi(\mathrm{i}u)\right]_{u=nK'} \tag{391}
$$

として求められる．

n が奇数の場合，$\Phi(u)$ の極は $\mathrm{dc}\,(u,k')$ の極に対応する．$u=K'$ の場合，$\mathrm{dc}\,(u,k')$ の留数は -1 である．そのとき，$\mathrm{ns}\,(K',k')=1$ となり，留数との積は -1 である．$u=3K'$ の場合，留数と $\mathrm{ns}\,(3K')$ は両方共符号を変えるので積は変わらない．一般に n が奇数の $u=nK'$ のときも同じ積をもつ．$Z(K',k')=Z(3K',k')=0$ であるからこの項は考えなくても良い．結局，n が奇数の場合，式 (O-7.2)，式 (390) と式 (391) から，

$$
R(n\mathrm{i}K')=-1(\mathrm{i})\frac{n\pi}{K}=-\frac{n\pi\mathrm{i}}{K} \tag{392}
$$

となる．

n が偶数の場合，$\Phi(u)$ の極は $\mathrm{ns}\,(u,k')$ の極に一致する．$u=0$ の場合，$\mathrm{ns}\,(u,k')$ の留数は 1 である．そのとき，$\mathrm{dc}\,(0,k')=1$ となり，留数との積は 1 である．$u=2K'$ の場合，留数と $\mathrm{dc}\,(2K',k')$ は両方共符号を変えるので積は変わらない．一般に，$u=nK'$ のときも同じである．前と同様に，$Z(0,k')=Z(2K',k')=0$ であるから，この項は考えなくても良い．結局，n が偶数の場合，式 (O-7.2)，式 (390) と式 (391) から，

$$
R(n\mathrm{i}K')=\frac{n\pi\mathrm{i}}{K} \tag{393}
$$

となる．

式 (392) と式 (393) を合わせると，$\Phi(u)$ の留数として，

$$
R(n\mathrm{i}K')=\frac{(-1)^n n\pi\mathrm{i}}{K} \tag{O-7.3}
$$

が得られる．

$\Phi(u)$ の展開式を求める前に，もう一つ準備をしておこう．$\mathrm{dn}\,(K+\mathrm{i}K')=0$ および $\mathrm{cs}\,(K)=0$ ［[5], p.40］に注意すると，式 (O-7.1.3) から，

$$
\begin{aligned}
\Phi(K)&=2(1-k^2)-k'^2=k'^2\\
\Phi(K+\mathrm{i}K')&=-k'^2
\end{aligned}
$$

となり，

$$\Phi(K)+\Phi(K+\mathrm{i}K')=0 \tag{394}$$

という関係式が得られる．この式は後で利用する．

最初に，式 (386) の極，すなわち，$2mK+2n\mathrm{i}K'$ $(n\neq 0)$ を極にもつ関数を考える．そうすると，

$$\frac{1}{1-\mathrm{e}^{n\pi\mathrm{i}\tau-\pi\mathrm{i}u/K}} \tag{395}$$

は明らかに同じ極を有することがわかる．その留数は，

$$\left[\frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}(1-\mathrm{e}^{n\pi\mathrm{i}\tau-\pi\mathrm{i}u/K})}\right]_{u=2mK+2n\mathrm{i}K'}=\left[\frac{1}{(\pi\mathrm{i}/K)\mathrm{e}^{n\pi\mathrm{i}\tau-\pi\mathrm{i}u/K}}\right]_{u=2mK+2n\mathrm{i}K'}=\frac{K}{\pi\mathrm{i}} \tag{396}$$

となる．したがって，留数 (O-7.3) を有する関数は，

$$(-1)^n\left(\frac{n\pi\mathrm{i}}{K}\right)\left(\frac{\pi\mathrm{i}}{K}\right)\frac{1}{1-\mathrm{e}^{n\pi\mathrm{i}\tau-\pi\mathrm{i}u/K}} \tag{397}$$

となる．

n を $n\geq 1$ の整数を表すことにすると，$-n\mathrm{i}K'$ の極を表すための式は式 (397) で n を $-n$ に置き換えることにより，

$$(-1)^{-n}\left(\frac{-n\pi\mathrm{i}}{K}\right)\left(\frac{\pi\mathrm{i}}{K}\right)\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-n\pi\mathrm{i}\tau-\pi\mathrm{i}u/K}}=(-1)^n\left(\frac{n\pi\mathrm{i}}{K}\right)\left(\frac{\pi\mathrm{i}}{K}\right)\frac{\mathrm{e}^{n\pi\mathrm{i}\tau+\pi\mathrm{i}u/K}}{1-\mathrm{e}^{n\pi\mathrm{i}\tau+\pi\mathrm{i}u/K}} \tag{398}$$

となる．式 (397) と式 (397) の形式を統一するために，式 (397) に $\mathrm{e}^{n\pi\mathrm{i}\tau-\pi\mathrm{i}u/K}$ を掛けても留数は変わらない．したがって，式 (383) と全ての極と留数が一致する関数 $f(u)$ は，

$$f(u)=-\left(\frac{\pi}{K}\right)^2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\left(\frac{\mathrm{e}^{n\pi\mathrm{i}\tau-\pi\mathrm{i}u/K}}{1-\mathrm{e}^{n\pi\mathrm{i}\tau-\pi\mathrm{i}u/K}}+\frac{\mathrm{e}^{n\pi\mathrm{i}\tau+\pi\mathrm{i}u/K}}{1-\mathrm{e}^{n\pi\mathrm{i}\tau+\pi\mathrm{i}u/K}}\right) \tag{399}$$

と書くことができる．したがって，$\Phi(u)$ と $f(u)$ は主要部が一致するので，リュービルの定理からその差は定数である．これを C としよう．すなわち，

$$\Phi(u)=f(u)+C \tag{400}$$

とする．式 (399) に $u=K$ および $u=K+\mathrm{i}K'$ を代入すると，

$$f(K)=2\left(\frac{\pi}{K}\right)^2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\frac{\mathrm{e}^{n\pi\mathrm{i}\tau}}{1+\mathrm{e}^{n\pi\mathrm{i}\tau}} \tag{401}$$

$$f(K+\mathrm{i}K')=\left(\frac{\pi}{K}\right)^2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\left\{\frac{\mathrm{e}^{(n-1)\pi\mathrm{i}\tau}}{1+\mathrm{e}^{(n-1)\pi\mathrm{i}\tau}}+\frac{\mathrm{e}^{(n+1)\pi\mathrm{i}\tau}}{1+\mathrm{e}^{(n+1)\pi\mathrm{i}\tau}}\right\} \tag{402}$$

である．

式 (402) で，中括弧内第 1 項の $n-1$ を n に，第 2 項の $n+1$ を n に書き換えると，

$$\begin{aligned}f(K+\mathrm{i}K')&=\left(\frac{\pi}{K}\right)^2\left\{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(n+1)\frac{\mathrm{e}^{n\pi\mathrm{i}\tau}}{1+\mathrm{e}^{n\pi\mathrm{i}\tau}}+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}(n-1)\frac{\mathrm{e}^{n\pi\mathrm{i}\tau}}{1+\mathrm{e}^{n\pi\mathrm{i}\tau}}\right\}\\&=\left(\frac{\pi}{K}\right)^2\left\{-\frac{\mathrm{e}^{0\pi\mathrm{i}\tau}}{1+\mathrm{e}^{0\pi\mathrm{i}\tau}}+\frac{2\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}\tau}}{1+\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}\tau}}-\sum_{n=2}^{\infty}2n(-1)^{n-1}\frac{\mathrm{e}^{n\pi\mathrm{i}\tau}}{1+\mathrm{e}^{n\pi\mathrm{i}\tau}}\right\}\end{aligned} \tag{403}$$

となる．式 (403) の中括弧内第 3 項の総和は式 (401) の $n=2$ 以降の総和と一致して符号が反対であるから相殺する．また，中括弧内第 2 項は式 (401) の $n=1$ と相殺する．したがって，

$$f(K)+f(K+\mathrm{i}K')=\left(\frac{\pi}{K}\right)^2-\frac{\mathrm{e}^{0\pi\mathrm{i}\tau}}{1+\mathrm{e}^{0\pi\mathrm{i}\tau}}=-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{K}\right)^2 \tag{404}$$

である．一方，

$$f(K)+f(K+\mathrm{i}K')=\Phi(K)+\Phi(K+\mathrm{i}K')-2C=-2C \tag{405}$$

であるから，

$$C=\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2 \tag{406}$$

である．以上から，結局，

$$\begin{aligned}\Phi(u)&=\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2\left\{1-4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\left(\frac{\mathrm{e}^{n\pi\mathrm{i}\tau-\pi\mathrm{i}u/K}}{1-\mathrm{e}^{n\pi\mathrm{i}\tau-\pi\mathrm{i}u/K}}+\frac{\mathrm{e}^{n\pi\mathrm{i}\tau+\pi\mathrm{i}u/K}}{1-\mathrm{e}^{n\pi\mathrm{i}\tau+\pi\mathrm{i}u/K}}\right)\right\} &(407)\\&=\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2\left\{1-4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\frac{2\mathrm{e}^{n\pi\mathrm{i}\tau}\cos(\pi u/K)-2\mathrm{e}^{2n\pi\mathrm{i}\tau}}{1-2\mathrm{e}^{n\pi\mathrm{i}\tau}\cos(\pi u/K)+\mathrm{e}^{2n\pi\mathrm{i}\tau}}\right\}\\&=\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2\left\{1-8\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\frac{q^n\cos(\pi u/K)-q^{2n}}{1-2q^n\cos(\pi u/K)+q^{2n}}\right\} &(\text{O-7.4})\end{aligned}$$

が得られる．

式 (O-7.1-2) の積分を行う前に，$\Phi(\mathrm{i}u)$ の形を次のように変形する．式 (405) から，

$$\begin{aligned}\Phi(\mathrm{i}u)&=\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2\left\{1-4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\left(\frac{\mathrm{e}^{n\pi\mathrm{i}\tau+\pi u/K}}{1-\mathrm{e}^{n\pi\mathrm{i}\tau+\pi u/K}}+\frac{\mathrm{e}^{n\pi\mathrm{i}\tau-\pi u/K}}{1-\mathrm{e}^{n\pi\mathrm{i}\tau-\pi u/K}}\right)\right\}\\&=\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2\left\{1-\frac{4K}{\pi}\frac{\partial}{\partial u}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\left[-\ln(1-\mathrm{e}^{n\pi\mathrm{i}\tau+\pi u/K})+\ln(1-\mathrm{e}^{n\pi\mathrm{i}\tau-\pi u/K})\right]\right\}\\&=\left(\frac{4K}{\pi}\right)^2\left\{1-\frac{4\pi}{K}\frac{\partial}{\partial u}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\ln\left(\frac{1-\mathrm{e}^{n\pi\mathrm{i}\tau-\pi u/K}}{1-\mathrm{e}^{n\pi\mathrm{i}\tau+\pi u/K}}\right)\right\}\\&=\left(\frac{4K}{\pi}\right)^2\left\{1-\frac{4\pi}{K}\frac{\partial}{\partial u}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\ln\left(\frac{1-q^{n+\mathrm{i}u/\tau K}}{1-q^{n-\mathrm{i}u/\tau K}}\right)\right\} &(408)\end{aligned}$$

となる．この式は簡単に積分ができる．これを式 (O-7.1-2) に代入すると式 (O-106) は，

$$\begin{aligned}-\frac{F}{k_{\mathrm{B}}T}=\ln\lambda&=\frac{1}{2}\ln(2\sinh 2H)+\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\gamma\,\mathrm{d}\omega\\&=\frac{1}{2}\ln(2\sinh 2H)+\frac{K}{\pi}\int_0^{a}\Phi(\mathrm{i}u)\,\mathrm{d}u\\&=\frac{1}{2}\ln(2\sinh 2H)+\frac{\pi}{4K}\left\{a-\frac{4K}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\ln\left(\frac{1-q^{n+\mathrm{i}a/\tau K}}{1-q^{n-\mathrm{i}a/\tau K}}\right)\right\}\\&=\frac{1}{2}\ln(2\sinh 2H)+\frac{\pi}{4K}\left\{a-\frac{4K}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\ln\left(\frac{1-q^{n+2y}}{1-q^{n-2y}}\right)\right\}\\&=\frac{1}{2}\ln(2\sinh 2H)-\frac{1}{2}y\ln q-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\ln\left(\frac{1-q^{n+2y}}{1-q^{n-2y}}\right) &(409)\end{aligned}$$

となる．ここで，

$$a=2yK'=\frac{K}{\pi}2y\frac{\pi K'}{K}=-\frac{K}{\pi}2y\mathrm{i}\pi\tau=-\frac{K}{\pi}2y\ln q \tag{O-7.5}$$

という関係を用いた．

この結果を，$q=q_1^2$ と $y=1/4$ の場合に特化して考えると，

$$
\begin{aligned}
-\frac{F}{k_{\mathrm{B}}T}-\frac{1}{2}\ln(2\sinh 2H) &= -\frac{1}{8}y\ln q_1^2-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\ln\frac{1-q_1^{2n(1+1/2)}}{1-q_1^{2n(1-1/2)}} \\
&= -\frac{1}{4}y\ln q_1-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\ln\frac{1-q_1^{2n+1}}{1-q_1^{2n-1}} \\
&= -\frac{1}{4}y\ln q_1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\ln(1-q_1^{2n-1})-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\ln(1-q_1^{2n+1}) \\
&= -\frac{1}{4}y\ln q_1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\ln(1-q_1^{2n-1})-\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}(n-1)\ln(1-q_1^{2n-1}) \\
&= -\frac{1}{4}y\ln q_1-\ln(1-q_1)+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n(2n-1)\ln(1-q_1^{2n-1}) \\
&= -\frac{1}{4}y\ln q_1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(2n-1)\ln(1-q_1^{2n-1}) \qquad \text{(O-119a)}
\end{aligned}
$$

となる．

この式は臨界点の付近を除いて，急速に収束する．臨界点付近で収束の速い式は以下のようにして得ることができる．

式 (O-7.2) をヤコビの虚数変換 (104)–(106) を用いて変形する．まず，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{dc}\,(u,k') &= \frac{\mathrm{dn}\,(u,k')}{\mathrm{cn}\,(u,k')}=\frac{\dfrac{\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}u,k)}{\mathrm{cn}\,(\mathrm{i}u,k)}}{\dfrac{1}{\mathrm{cn}\,(\mathrm{i}u,k)}} \\
&= \mathrm{dn}\,(\mathrm{i}u,k) \qquad (410)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{ns}\,(u,k') &= \frac{1}{\mathrm{sn}\,(u,k')}=\frac{1}{-\mathrm{i}\dfrac{\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}u,k)}{\mathrm{cn}\,(\mathrm{i}u,k)}}=\mathrm{i}\frac{\mathrm{cn}\,(\mathrm{i}u,k)}{\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}u,k)} \\
&= \mathrm{i}\,\mathrm{cs}\,(\mathrm{i}u,k) \qquad (411)
\end{aligned}
$$

である．したがって，式 (O-7.2) から，

$$
\Phi(\mathrm{i}u)=-k'^2+\ \mathrm{dn}\,(\mathrm{i}u,k)\mathrm{i}\,\mathrm{cs}\,(\mathrm{i}u,k)\{2Z(u,k')+\frac{\pi u}{KK'}\} \qquad (412)
$$

である．さらに，整理して，

$$
\Phi(\mathrm{i}u)-\frac{\pi u}{KK'}\mathrm{i}\,\mathrm{cs}\,(\mathrm{i}u,k)\,\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}u,k)=2\,\mathrm{dc}\,(u,k')\mathrm{i}\,\mathrm{cs}\,(u,k')Z(u,k')-k'^2 \qquad (413)
$$

となる．論文では誤植で KK' の前に 2 が余分についている．

次にフーリエ級数を計算するための恒等式を導く．ヤコビの楕円関数の加法定理［[10], p.553］により，

$$
\mathrm{sn}\,(u\pm a)=\frac{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\pm\ \mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{cn}\,u}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,a\,\mathrm{sn}^2\,u} \qquad (414)
$$

$$
\mathrm{cn}\,(u\pm a)=\frac{\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{cn}\,a\pm\ \mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{dn}\,u}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,a\,\mathrm{sn}^2\,u} \qquad (415)
$$

である．これから，

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{sn}\,(u-a)\,\mathrm{sn}\,(u+a)-\ \mathrm{cn}\,(u-a)\,\mathrm{cn}\,(u+a) \\
=&\frac{\mathrm{sn}^2\,a\,\mathrm{cn}^2\,a\,\mathrm{dn}^2\,a-\ \mathrm{sn}^2\,a\,\mathrm{cn}^2\,u\,\mathrm{dn}^2\,u-\ \mathrm{cn}^2\,a\,\mathrm{cn}^2\,u+\ \mathrm{sn}^2\,a\,\mathrm{sn}^2\,u\,\mathrm{dn}^2\,a\,\mathrm{dn}^2\,u}{(1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,a\,\mathrm{sn}^2\,u)^2} \qquad (416)
\end{aligned}
$$

となる．この式の分子を以下のように変形する．

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{sn}^2 a \operatorname{cn}^2 a \operatorname{dn}^2 a - \operatorname{sn}^2 a \operatorname{cn}^2 u \operatorname{dn}^2 u - \operatorname{cn}^2 a \operatorname{cn}^2 u + \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u \operatorname{dn}^2 a \operatorname{dn}^2 u \\
=&\operatorname{cn}^2 a \operatorname{sn}^2 u \operatorname{dn}^2 a - \operatorname{sn}^2 a(1 - \operatorname{sn}^2 u)(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u) \\
&\qquad - (1 - \operatorname{sn}^2 a)(1 - \operatorname{sn}^2 u) + \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a)(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u) \\
=&\operatorname{cn}^2 a \operatorname{sn}^2 u \operatorname{dn}^2 a - \operatorname{sn}^2 a(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u - \operatorname{sn}^2 u - k^2 \operatorname{sn}^4 u) \\
&\qquad - (1 - \operatorname{sn}^2 u - \operatorname{sn}^2 a + \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u) + \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a - k^2 \operatorname{sn}^2 u + k^4 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u) \\
=&\operatorname{cn}^2 a \operatorname{sn}^2 u \operatorname{dn}^2 a - \operatorname{sn}^2 a + k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u + \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^4 u \\
&\qquad - 2k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u + \operatorname{sn}^2 u + \operatorname{sn}^2 a - \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u \\
&\qquad + \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a) - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^4 u + 2k^4 \operatorname{sn}^4 a \operatorname{sn}^4 u \\
&\qquad - (1 - 2k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u + k^4 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u) \\
=&\operatorname{cn}^2 a \operatorname{sn}^2 u \operatorname{dn}^2 a - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u - (1 - \operatorname{dn}^2 a) \operatorname{sn}^4 u \\
&\qquad + \operatorname{sn}^2 u + \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u \operatorname{dn}^2 a - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^4 u + 2k^4 \operatorname{sn}^4 a \operatorname{sn}^4 u \\
&\qquad - (1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u)^2 \\
=&\operatorname{sn}^2 u \operatorname{dn}^2 a + \operatorname{sn}^2 u \operatorname{dn}^2 a - \operatorname{sn}^4 u(1 - \operatorname{dn}^2 a + k^2 \operatorname{sn}^2 a - 2k^4 \operatorname{sn}^4 a) \\
&\qquad - (1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u)^2 \\
=&2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{dn}^2 a - \operatorname{sn}^4 u(2k^2 \operatorname{sn}^2 a - 2k^4 \operatorname{sn}^4 a) - (1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u)^2 \\
=&2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{dn}^2 a - 2k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^4 u(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a) - (1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u)^2 \\
=&2 \operatorname{dn}^2 a \operatorname{sn}^2 u(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u) - (1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u)^2
\end{aligned}
\tag{417}
$$

これを式 (416) に代入すると，

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{sn}(u-a) \operatorname{sn}(u+a) - \operatorname{cn}(u-a) \operatorname{cn}(u+a) \\
&\qquad = 2\frac{\operatorname{dn}^2 a \operatorname{sn}^2 u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u} - 1 \\
&\qquad = 2\frac{\operatorname{dn} a}{\operatorname{sn} a \operatorname{cn} a} \frac{\operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a \operatorname{sn}^2 u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u} - 1
\end{aligned}
\tag{418}
$$

となる．したがって，

$$
\begin{aligned}
&\int_0^K k^2\{\operatorname{sn}(u-a) \operatorname{sn}(u+a) - \operatorname{cn}(u-a) \operatorname{cn}(u+a)\} \mathrm{d}u \\
&\quad = 2\frac{\operatorname{dn} a}{\operatorname{sn} a \operatorname{cn} a} \int_0^K \frac{k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a \operatorname{sn}^2 u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u} \mathrm{d}u - k^2 K \\
&\quad = 2\frac{\operatorname{dn} a}{\operatorname{sn} a \operatorname{cn} a} K Z(a) - k^2 K \\
&\quad = K\{2 \operatorname{dc} a \operatorname{ns} a Z(a) - k^2\}
\end{aligned}
\tag{419}
$$

を得る．

以上の準備の下に，$\Phi(\mathrm{i}u)$ をフーリエ級数で表す式を求めよう．

ヤコビの楕円関数のフーリエ級数は次のように表される ([7], p.511)．

$$
\operatorname{sn} u = \frac{2\pi}{Kk} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n+1/2} \sin(2n+1)x}{1 - q^{2n+1}} \tag{420}
$$

$$
\operatorname{cn} u = \frac{2\pi}{Kk} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n+1/2} \cos(2n+1)x}{1 + q^{2n-1}} \tag{421}
$$

ただし，

$$u = \frac{2Kx}{\pi} \qquad \text{あるいは} \qquad x = \frac{\pi}{2K}u \tag{422}$$

である．a は式 (422) により，

$$s = \frac{\pi}{2K}a \tag{423}$$

と s に変換した．これを用いて，前の式の積分を計算する．$\mathrm{d}u = (\pi/2K)\,\mathrm{d}x$ であるから，

$$\begin{aligned}
&\int_0^K \mathrm{sn}\,(u-a)\,\mathrm{sn}\,(u+a)\,\mathrm{d}u \\
&= \left(\frac{2\pi}{Kk}\right)^2 \sum_{n,m=0}^{\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{q^{n+m+1}}{(1-q^{2n+1})(1-q^{2m+1})} \sin\{(2n+1)(x-s)\} \sin\{(2m+1)(x+s)\} \left(\frac{2K}{\pi}\right) \mathrm{d}x \\
&= -\frac{4\pi}{Kk^2} \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{q^{n+m+1}}{(1-q^{2n+1})(1-q^{2m+1})} \int_0^{\pi/2} [\cos\{2(n+m+1)x + 2(m-n)s\} \\
&\qquad\qquad - \cos\{2(n-m)x + 2(m+n+1)s\}]\,\mathrm{d}x
\end{aligned} \tag{424}$$

となる．$m+n$ が奇数のとき，大括弧内の第 1 項は 0 となる．したがって，積分は

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} -\cos\{2(n-m)x + 2(m+n+1)s\}\,\mathrm{d}x &= -\frac{1}{2(n-m)}[\sin\{2(n-m)x + 2(n+m+1)s\}]_0^{\pi/2} \\
&= \frac{1}{(n-m)}\sin\{2(n+m+1)s\}
\end{aligned} \tag{425}$$

となる．この項は n, m に関する総和で n と m を交換すると符号が変わるので相殺して 0 になる．したがって，$m+n$ が奇数のとき，式 (424) は 0 になる．

$m+n$ が偶数かつ $m \neq n$ のとき，大括弧内の第 2 項は 0 となる．したがって，積分は

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \cos\{2(m+n+1)x + 2(m-n)s\}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2(n+m+1)}[\sin\{2(n+m+1)x + 2(m-n)s\}]_0^{\pi/2} \\
&= -\frac{1}{(n+m+1)}\sin\{2(m-n)s\}
\end{aligned} \tag{426}$$

となる．この項は n, m に関する総和で n と m を交換すると符号が変わるので相殺して 0 になる．したがって，偶数かつ $m \neq n$ のとき，式 (424) は 0 になる．

残るのは，$n = m$ の場合のみで，式 (424) の大括弧内第 1 項は 0 となり，第 2 項は

$$\int_0^{\pi/2} -\cos\{2(2n+1)s\}\,\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{2}\cos\{2(2n+1)s\} \tag{427}$$

となるから，

$$\begin{aligned}
\int_0^K \mathrm{sn}\,(u-a)\,\mathrm{sn}\,(u+a)\,\mathrm{d}u =& \frac{4\pi}{Kk^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{2n+1}}{(1-q^{2n+1})^2} \frac{\pi}{2} \cos\{2(2n+1)s\} \\
=& \frac{4\pi}{Kk^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(q^{n+1/2} - q^{-(n+1/2)})^2} \frac{\pi}{2} \cos\{2(2n+1)s\} \\
=& \frac{4\pi}{Kk^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\tau(n+1/2)} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\tau(n+1/2)})^2} \frac{\pi}{2} \cos\{2(2n+1)s\} \\
=& \frac{\pi^2}{2Kk^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sinh^2\{(n+\frac{1}{2})\frac{\pi K'}{K}\}} \cos\{(2n+1)\frac{\pi a}{K}\}
\end{aligned} \tag{428}$$

同様にして，

$$
\begin{aligned}
&\int_0^K \mathrm{cn}\,(u-a)\,\mathrm{cn}\,(u+a)\,\mathrm{d}u \\
=&-\frac{4\pi}{Kk^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n+m+1}}{(1+q^{2n+1})(1+q^{2m+1})}\int_0^{\pi/2}[\cos\{2(n+m+1)+2(m-n)s\} \\
&\qquad\qquad +\cos\{2(n-m)x+2(m+n+1)s\}]\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
\tag{429}
$$

となるから，

$$
\int_0^{\pi/2}-\cos\{2(2n+1)s\}\,\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{2}\cos\{2(2n+1)s\}
\tag{430}
$$

となる．したがって，同じようにして，

$$
\int_0^K \mathrm{cn}\,(u-a)\,\mathrm{cn}\,(u+a)\,\mathrm{d}u=\frac{\pi^2}{2Kk^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\cosh^2\{(n+\frac{1}{2})\frac{\pi K'}{K}\}}\cos\{(2n+1)\frac{\pi a}{K}\}
\tag{431}
$$

となる．結局，$1/\sinh^2 x-1/\cosh^2 x=4/\sinh^2 2x$ に注意すると，

$$
\begin{aligned}
&\int_0^K\{\,\mathrm{sn}\,(u-a)\,\mathrm{sn}\,(u+a)-\,\mathrm{cn}\,(u-a)\,\mathrm{cn}\,(u+a)\}\,\mathrm{d}u \\
=&\frac{\pi^2}{2Kk^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{\sinh^2\{(n+\frac{1}{2})\frac{\pi K'}{K}\}}-\frac{1}{\cosh^2\{(n+\frac{1}{2})\frac{\pi K'}{K}\}}\right\}\cos\{(2n+1)\frac{\pi a}{K}\} \\
=&2\frac{K}{k^2}\left(\frac{\pi}{K}\right)^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\{(2n+1)\frac{\pi a}{K}\}}{\sinh^2\{(2n+1)\frac{\pi K'}{K}\}}
\end{aligned}
\tag{432}
$$

となる．

したがって，式 (419) から，

$$
\begin{aligned}
2\,\mathrm{dc}\,a\,\mathrm{ns}\,aZ(a)-k^2=&\frac{k^2}{K}\int_0^K\{\,\mathrm{sn}\,(u-a)\,\mathrm{sn}\,(u+a)-\,\mathrm{cn}\,(u-a)\,\mathrm{cn}\,(u+a)\}\,\mathrm{d}u \\
=&2\left(\frac{\pi}{K}\right)^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\{(2n+1)\frac{\pi a}{K}\}}{\sinh^2\{(2n+1)\frac{\pi K'}{K}\}}
\end{aligned}
\tag{433}
$$

となる．この式で a を u にし，k を k' に変えると，K と K' は入れ替わるので，

$$
2\,\mathrm{dc}\,(u,k')\,\mathrm{ns}\,(u,k')Z(u,k')-k'^2=2\left(\frac{\pi}{K'}\right)^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\{(2n+1)\frac{\pi u}{K'}\}}{\sinh^2\{(2n+1)\frac{\pi K}{K'}\}}
\tag{434}
$$

となる．

ここで，式 (O-7.2) を用いれば，

$$
\begin{aligned}
\Phi(\mathrm{i}u)-\frac{\pi u}{KK'}\mathrm{i}\,\mathrm{cs}\,(\mathrm{i}u)\,\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}u)=&2\,\mathrm{dc}\,(u,k')\,\mathrm{ns}\,(u,k')Z(u,k')-k'^2 \\
=&2\left(\frac{\pi}{K'}\right)^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\{(2n+1)\frac{\pi u}{K'}\}}{\sinh^2\{(2n+1)\frac{\pi K}{K'}\}}
\end{aligned}
\tag{435}
$$

が得られる．論文の式 (7.5) の次の式で，左辺 KK' の前にある 2 は誤植で必要ない．

式 (435) で $\Phi(\mathrm{i}a)$ の積分を計算するには，左辺にあるヤコビの楕円関数のままではまだ都合がわるい．そこで，やや天下り的に以下のようにして変形する．まず，次の微分を考える．

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left[u\ln(-\mathrm{i}k^{1/2}\,\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}u))\right] &= \ln(-\mathrm{i}k^{1/2}\,\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}u)) + u\frac{-\mathrm{i}k^{1/2}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}u)}{-\mathrm{i}k^{1/2}\,\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}u)}\\ &= \ln(-\mathrm{i}k^{1/2}\,\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}u)) + \mathrm{i}u\frac{\mathrm{cn}\,(\mathrm{i}u)\,\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}u)}{\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}u)}\\ &= \ln(k^{1/2}\,\mathrm{sc}\,(u,k')) + \mathrm{i}u\,\mathrm{cs}\,(\mathrm{i}u)\,\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}u). \end{aligned} \tag{436}$$

最後の変形ではヤコビの虚数変換 (104) を用いた．

次に，ヤコビの楕円関数を無限乗積で表す ([10], p.538, [7], p.508)．

$$\begin{aligned}\mathrm{sn}\,u = k^{-1/2}\frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_4(v)} &= 2q^{1/4}k^{-1/2}\sin x\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1-2q^{2n}\cos 2x+q^{4n}}{1-2q^{2n-1}\cos 2x+q^{4n-2}}\\ &= 2q^{1/4}k^{-1/2}\sin x\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1-q^{2n}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x})(1-q^{2n}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x})}{(1-q^{2n-1}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x})(1-q^{2n-1}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x})} \end{aligned} \tag{437}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{cn}\,u = k'^{1/2}\frac{\vartheta_2(v)}{\vartheta_4(v)} &= 2q^{1/4}k^{-1/2}k^{-1/2}\cos x\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1+2q^{2n}\cos 2x+q^{4n}}{1-2q^{2n-1}\cos 2x+q^{4n-2}}\\ &= 2q^{1/4}k^{-1/2}k^{-1/2}\cos x\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1+q^{2n}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x})(1+q^{2n}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x})}{(1-q^{2n-1}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x})(1-q^{2n-1}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x})} \end{aligned} \tag{438}$$

式 (437) から，

$$\begin{aligned}\ln\ \mathrm{sn}\,u &= \ln 2q^{1/4} - \frac{1}{2}\ln k + \ln\sin x + \sum_{n=1}^{\infty}\{\ln(1-q^{2n}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}) + \ln(1-q^{2n}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x})\\ &\qquad - \ln(1-q^{2n-1}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}) - \ln(1-q^{2n-1}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x})\}\\ &= \ln 2q^{1/4} - \frac{1}{2}\ln k + \ln\sin x + \sum_{n=1,m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\{-q^{2mn}(\mathrm{e}^{2m\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-2m\mathrm{i}x}) + q^{(2n-1)m}(\mathrm{e}^{2m\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-2m\mathrm{i}x})\}\\ &= \ln 2q^{1/4} - \frac{1}{2}\ln k + \ln\sin x + \sum_{n=1,m=1}^{\infty}\frac{1}{m}2(-q^{2mn}+q^{(2n-1)m})\cos 2mx \end{aligned} \tag{439}$$

ここで，$\ln(1-x)$ のテーラー展開を使用した．

n に関する無限等比級数の部分は，

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-q^{2mn}+q^{(2n-1)m}) = -\frac{q^{2m}}{1-q^{2m}} + \frac{q^m}{1-q^{2m}} = \frac{q^m(1-q^m)}{1-q^{2m}} = \frac{q^m}{1+q^m}$$

となるから，

$$\ln\ \mathrm{sn}\,u = \ln 2q^{1/4} - \frac{1}{2}\ln k + \ln\sin x + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{2q^m\cos 2mx}{m(1+q^m)} \tag{440}$$

となる．

式 (438) についても同様に，

$$\begin{aligned}
\ln\ \mathrm{cn}\, u &= \ln 2q^{1/4} + \frac{1}{2}\ln k' - \frac{1}{2}\ln k + \ln\cos x + \sum_{n=1,m=1}^{\infty}\{\ln(1+q^{2n}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}) + \ln(1+q^{2n}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}) \\
&\qquad - \ln(1-q^{2n-1}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}) - \ln(1-q^{2n-1}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x})\} \\
&= \ln 2q^{1/4} + \frac{1}{2}\ln k' - \frac{1}{2}\ln k + \ln\cos x + \sum_{n=1,m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\{q^{2mn}(\mathrm{e}^{2m\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-2m\mathrm{i}x})(-1)^{m-1} \\
&\qquad + q^{(2n-1)m}(\mathrm{e}^{2m\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-2m\mathrm{i}x})\} \\
&= \ln 2q^{1/4} + \frac{1}{2}\ln k' - \frac{1}{2}\ln k + \ln\cos x + \sum_{m=1,3,\ldots}^{\infty}\frac{2q^m\cos 2mx}{m(1-q^m)} + \sum_{m=2,4,\ldots}^{\infty}\frac{2q^m\cos 2mx}{m(1+q^m)} \qquad (441)
\end{aligned}$$

となる．

式 (440) と式 (441) から，

$$\begin{aligned}
\ln\ \mathrm{sc}\,(u,k) &= \ln\ \mathrm{sn}\,(u,k) - \ln\ \mathrm{cn}\,(u,k) \\
&= -\frac{1}{2}\ln k' + \ln\tan x + \sum_{m=1,3,\ldots}^{\infty}\frac{2\cos 2mx}{m}\left(\frac{1}{1+q^m} - \frac{1}{1-q^m}\right)q^m \\
&= -\frac{1}{2}\ln k' + \ln\tan x + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2\cos 2(2n+1)x}{2n+1}\frac{2q^{(2n+1)}}{q^{2n+1} - q^{-2n-1}} \qquad (442)
\end{aligned}$$

となる．

ここで，k を k' と置き換えると，$x = (\pi/2K')u$，$q = \mathrm{e}^{-\pi K/K'}$ となるので，

$$\ln\ \mathrm{sc}\,(u,k') = -\frac{1}{2}\ln k + \ln\tan\frac{\pi u}{2K'} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2\mathrm{e}^{-(2n+1)\pi K/K'}\cos[(2n+1)\pi u/K']}{(2n+1)\sinh[(2n+1)\pi K/K']} \qquad (443)$$

である．したがって，

$$\begin{aligned}
-\ln k^{1/2}\,\mathrm{sc}\,(u,k') &= -\frac{1}{2}\ln k - \ln\ \mathrm{sc}\,(u,k') \\
&= \ln\cot\frac{\pi u}{2K'} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2\mathrm{e}^{-(2n+1)\pi K/K'}\cos[(2n+1)\pi u/K']}{(2n+1)\sinh[(2n+1)\pi K/K']} \qquad (444)
\end{aligned}$$

となる．

これを式 (436) に代入すると，

$$\begin{aligned}
\mathrm{i}u\,\mathrm{cs}\,(\mathrm{i}u)\,\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}u) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left[u\ln(-\mathrm{i}k^{1/2}\,\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}u))\right] - \ln(k^{1/2}\,\mathrm{sc}\,(u,k')) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left[u\ln(-\mathrm{i}k^{1/2}\,\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}u))\right] + \ln\cot\frac{\pi u}{2K'} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2\mathrm{e}^{-(2n+1)\pi K/K'}\cos[(2n+1)\pi u/K']}{(2n+1)\sinh[(2n+1)\pi K/K']} \qquad (445)
\end{aligned}$$

となる．

これをさらに式 (435) に代入することにより，最終的に，

$$\begin{aligned}
\Phi(\mathrm{i}u) &= \frac{\pi u}{KK'}\mathrm{i}\,\mathrm{cs}\,(\mathrm{i}u)\,\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}u) + 2\left(\frac{\pi}{K'}\right)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos\{(2n+1)\dfrac{\pi u}{K'}\}}{\sinh^2\{(2n+1)\dfrac{\pi K}{K'}\}} \\
&= \frac{\pi}{KK'}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left[u\ln(-\mathrm{i}k^{1/2}\,\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}u))\right] + \frac{\pi}{KK'}\ln\cot\frac{\pi u}{2K'} \\
&\quad + \frac{\pi}{KK'}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2\mathrm{e}^{-(2n+1)\frac{\pi K}{K'}}\cos[(2n+1)\pi u/K']}{(2n+1)\sinh[(2n+1)\pi K/K']} \\
&\quad + 2\left(\frac{\pi}{K'}\right)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos\{(2n+1)\dfrac{\pi u}{K'}\}}{\sinh^2\{(2n+1)\dfrac{\pi K}{K'}\}}
\end{aligned} \tag{446}$$

が得られる．

$H' > H^*$ のとき，$k = (\sinh 2H \sinh 2H')^{-1}$，$-\mathrm{i}\,\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a) = \sinh 2H'$ であるから，

$$-\mathrm{i}k^{1/2}\,\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a) = \left(\frac{\sinh 2H'}{\sinh 2H}\right)^{1/2},$$

$H' < H^*$ のとき，$k = \sinh 2H \sinh 2H'$，$-\mathrm{i}\,\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a) = \sinh 2H^* = (\sinh 2H')^{-1}$ であるから，

$$-\mathrm{i}k^{1/2}\,\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a) = \left(\frac{\sinh 2H'}{\sinh 2H}\right)^{1/2},$$

となり，両方の温度域で変わらない．

したがって，式 (446) の第 1 項の u による 0 から a までの積分は

$$\begin{aligned}
\int_0^a \frac{\pi}{KK'}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left[u\ln(-\mathrm{i}k^{1/2}\,\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}u))\right]\mathrm{d}u &= \frac{\pi}{KK'}a\ln(-\mathrm{i}k^{1/2}\,\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a)) \\
&= \frac{2\pi y}{K}\ln\left(\frac{\sinh 2H'}{\sinh 2H}\right)^{1/2} = \frac{\pi y}{K}\ln\left(\frac{\sinh 2H'}{\sinh 2H}\right)
\end{aligned} \tag{447}$$

となる．

次に式 (446) の第 2 項の積分は

$$\int_0^a \frac{\pi}{KK'}\ln\cot\frac{\pi u}{2K'}\,\mathrm{d}u = \frac{2\pi}{K}\int_0^y \ln\cot(\pi z)\,\mathrm{d}z \tag{448}$$

となる．

式 (446) の第 3 項の第 n 項の積分は

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{KK'}\int_0^a \frac{2\mathrm{e}^{-(2n+1)\pi K/K'}\cos[(2n+1)\pi u/K']}{(2n+1)\sinh[(2n+1)\pi K/K']}\mathrm{d}u &= \frac{1}{K}\frac{2\mathrm{e}^{-(2n+1)\pi K/K'}\sin[(2n+1)\pi a/K']}{(2n+1)^2\sinh[(2n+1)\pi K/K']} \\
&= \frac{1}{K}\frac{2\mathrm{e}^{-(2n+1)\pi\mathrm{i}/\tau}\sin[(4n+2)\pi y]}{(2n+1)^2\sinh[(2n+1)\pi\mathrm{i}\tau]}
\end{aligned} \tag{449}$$

となる．

式 (446) の第 4 項の第 n 項の積分は

$$\begin{aligned}
2\left(\frac{\pi}{K'}\right)^2\int_0^a \frac{\cos\{(2n+1)\dfrac{\pi u}{K'}\}}{\sinh^2\{(2n+1)\dfrac{\pi K}{K'}\}}\mathrm{d}u &= \frac{2\pi}{K'}\frac{\sin\{(2n+1)\dfrac{\pi a}{K'}\}}{(2n+1)\sinh^2\{(2n+1)\dfrac{\pi K}{K'}\}} \\
&= \frac{2\pi}{K'}\frac{\sin\{(4n+2)\pi y}{(2n+1)\sinh^2\{(2n+1)\dfrac{\pi\mathrm{i}}{\tau}\}}
\end{aligned} \tag{450}$$

となる．これから，式 (443) の第 3 項と第 4 項の第 n 項の和をとると，

$$\begin{aligned}&\frac{1}{K}\frac{\sin\{(4n+2)\pi y\}}{(2n+1)^2\sinh^2\{(2n+1)\dfrac{\pi\mathrm{i}}{\tau}\}}\left\{2\mathrm{e}^{-(2n+1)\pi\mathrm{i}/\tau}\sinh[(2n+1)\pi\mathrm{i}/\tau]+(2n+1)\pi\frac{2K}{K'}\right\}\\ =&\frac{1}{K}\frac{\sin\{(4n+2)\pi y\}}{(2n+1)^2\sinh^2\{(2n+1)\dfrac{\pi\mathrm{i}}{\tau}\}}\left\{1-\mathrm{e}^{-(4n+2)\pi\mathrm{i}/\tau}+(4n+2)\pi\mathrm{i}/\tau\right\}\end{aligned} \tag{451}$$

となる．

以上を集めると，$\Phi(\mathrm{i}a)$ の積分は次のように表される．

$$\begin{aligned}\int_0^a\Phi(\mathrm{i}u)\,\mathrm{d}u=&\frac{\pi y}{K}\ln\left(\frac{\sinh 2H'}{\sinh 2H}\right)+\frac{2\pi}{K}\int_0^y\ln\cot(\pi z)\,\mathrm{d}z\\ &+\frac{1}{K}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\{(4n+2)\pi y\}}{(2n+1)^2\sinh^2\{(2n+1)\dfrac{\pi\mathrm{i}}{\tau}\}}\left\{1-\mathrm{e}^{-(4n+2)\pi\mathrm{i}/\tau}+(4n+2)\pi\mathrm{i}/\tau\right\}\end{aligned} \tag{452}$$

最終的に自由エネルギー $F/Nk_{\mathrm{B}}T$ は式 (409) の第 2 式に式 (452) を代入することで，

$$\begin{aligned}-\frac{F}{k_{\mathrm{B}}T}=&\ln\lambda=\frac{1}{2}\ln(2\sinh 2H)+\frac{K}{\pi}\int_0^a\Phi(\mathrm{i}u)\,\mathrm{d}u\\ =&\frac{1}{2}\ln(2\sinh 2H)+y\ln\left(\frac{\sinh 2H'}{\sinh 2H}\right)+2\int_0^y\ln\cot(\pi z)\,\mathrm{d}z\\ &+\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\{(4n+2)\pi y\}}{(2n+1)^2\sinh^2\{(2n+1)\dfrac{\pi\mathrm{i}}{\tau}\}}\left\{1-\mathrm{e}^{-(4n+2)\pi\mathrm{i}/\tau}+(4n+2)\pi\mathrm{i}/\tau\right\}\\ =&y\ln(2\sinh 2H')+(\tfrac{1}{2}-y)\ln(2\sinh 2H)+2\int_0^y\ln\cot(\pi z)\,\mathrm{d}z\\ &+\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\{(4n+2)\pi y\}}{(2n+1)^2\sinh^2\{(2n+1)\dfrac{\pi\mathrm{i}}{\tau}\}}\left\{1-\mathrm{e}^{-(4n+2)\pi\mathrm{i}/\tau}+(4n+2)\pi\mathrm{i}/\tau\right\}\end{aligned} \tag{O-7.6}$$

が得られる．

特に，$y=\frac{1}{4}$，$H'=H$，$\tau=2\tau_1$ の場合を考えてみよう．これを式 (O-7.6) に代入すると，

$$\begin{aligned}-\frac{F}{k_{\mathrm{B}}T}=&\frac{1}{2}\ln(2\sinh 2H)+\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/4}\ln\cot x\,\mathrm{d}x\\ &+\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1-\mathrm{e}^{-(2n+2)\pi\mathrm{i}/\tau_1}+(2n+1)\pi\mathrm{i}/\tau_1}{(2n+1)^2\sinh^2\{(n+1/2)\dfrac{\pi\mathrm{i}}{\tau_1}\}}\\ =&\frac{1}{2}\ln(2\sinh 2H)+\frac{2}{\pi}G\\ &+\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1+(2n+1)\pi\mathrm{i}/\tau_1-\mathrm{e}^{-(2n+1)\pi\mathrm{i}/\tau_1}}{(2n+1)^2\sinh^2\{(n+\frac{1}{2})\dfrac{\pi\mathrm{i}}{\tau_1}\}}\end{aligned} \tag{O-119b}$$

が得られる．ただし，

$$G=\int_0^{\pi/4}\ln\cot x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{\theta}{\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta=\frac{1}{1^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{7^2}+\cdots=0.9159655941772$$

はカタランの定数である（[4], p.41）．

18.8 Critical Data

臨界点は，すでに述べたように，$H' = H^*$ のときであるから，

$$\sinh 2H \sinh 2H' = \sinh \frac{2J}{k_{\mathrm{B}}T} \sinh \frac{2J'}{k_{\mathrm{B}}T} = 1; \qquad (T = T_{\mathrm{c}}) \tag{O-8.1}$$

で与えられる．このとき，$K = K(1) = \infty$，$K' = K(0) = \pi/2$ であるから，

$$\tau = \frac{\mathrm{i}K'}{K} = 0 \tag{O-8.2-1}$$

である．

臨界点では $k = 1$ より，式 (109) から $\mathrm{sn}\,(u, 1) = \tanh u$ となる．これから，$\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a, 1) = \tanh(\mathrm{i}a) = \mathrm{i}\tan a$，また，$-\mathrm{i}k\,\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a) = -\mathrm{i}\,\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a) = \sinh 2H'$，したがって，$\tan a = \sinh 2H'$ となる．これから，グーデルマン関数の定義によって，$a = \mathrm{gd}\,2H'$ となり，

$$a = 2yK' = \pi y = \mathrm{gd}\,2H' = \frac{\pi}{2} - \mathrm{gd}\,2H'^* = \frac{\pi}{2} - \mathrm{gd}\,2H \tag{O-8.2-2}$$

である．

- 臨界点におけるエネルギー U_{c}

臨界点におけるエネルギー U_{c} を求めてみよう．式 (O-6.1b) から，$k' = 0$ であるから $Z(u, 0) = 0$ であることに注意すると，

$$\frac{\partial \ln \lambda}{\partial H'} = 2y \coth 2H' \tag{453}$$
$$\frac{\partial \ln \lambda}{\partial H} = (1 - 2y) \coth 2H \tag{454}$$

となる．これに式 (O-8.2-2) から，$2y = (2/\pi)\,\mathrm{gd}\,2H'$ および $1 - 2y = (2/\pi)\,\mathrm{gd}\,2H$ が成り立つのでこれを代入すると，式 (O-6.1a) から，

$$\begin{aligned} -\frac{U_{\mathrm{c}}}{N} &= J' \frac{\partial \ln \lambda}{\partial H'} + J \frac{\partial \ln \lambda}{\partial H} \\ &= \frac{2}{\pi} \left(J'\,\mathrm{gd}\,2H' \coth 2H' + J\,\mathrm{gd}\,2H \coth 2H \right) \end{aligned} \tag{O-8.3}$$

となる．

また，臨界点における分配関数（実際はその対数 $\ln \lambda$）は式 (O-7.6) に式 (O-8.2) を適用して得られる．まず，式 (O-8.2-1) から，$\tau = 0$ であるから，式 (O-7.6) の第 4 項は 0 になる．次に，第 1 項と第 2 項は，式 (O-8.2-2) を用いると，

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{2} \ln \sinh 2H + y(\ln 2 \sinh 2H' - \ln 2 \sinh 2H) \\ =&\frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{2} \ln \tan\,\mathrm{gd}\,2H + y(\ln 2 \tan\,\mathrm{gd}\,2H' - \ln 2 \tan\,\mathrm{gd}\,2H) \\ =&\frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{2} \ln \tan(\frac{\pi}{2} - \mathrm{gd}\,2H') + y(\ln \frac{1}{\cot\,\mathrm{gd}\,2H'} - \ln \tan\,\mathrm{gd}\,(\frac{\pi}{2} - \mathrm{gd}\,2H')) \\ =&\frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{2} \ln \cot\,\mathrm{gd}\,2H' + y(-\ln \cot\,\mathrm{gd}\,2H' - \ln \cot\,\mathrm{gd}\,2H') \\ =&\frac{1}{2} \ln 2 + (\frac{1}{2} - 2y) \ln \cot \pi y \end{aligned} \tag{455}$$

となるから，

$$-\frac{F_{\mathrm{c}}}{N k_{\mathrm{B}} T} = \frac{1}{2} \ln 2 + (\frac{1}{2} - 2y) \ln \cot \pi y + 2 \int_0^y \ln \cot \pi z \,\mathrm{d}z \tag{O-8.4}$$

となる．

● 臨界点における比熱

最後に，臨界点における比熱を求めよう．まず，準備として，$KZ(\mathrm{i}a,1)$，$KZ(\mathrm{i}K'-\mathrm{i}a,1)$ を求めておこう．計算の途中では K を非常に大きい数として扱う．式 (O-5.2) から，

$$Z(\mathrm{i}a,1)=\ \mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a,1)\,\mathrm{sc}\,(\mathrm{i}a,1)-Z(\mathrm{i}a,0)-\frac{\mathrm{i}\pi a}{2KK'} \tag{456}$$

である．式 (O-8.1) と $H^*=H'$ の条件で式 (O-2.2b) を代入し (式 (O-2.2b) でも同じ)，式 (112) の $Z(u,0)=0$ を適用すると，

$$KZ(\mathrm{i}a,1)=K\cosh 2H'\frac{\mathrm{i}\sinh 2H'}{\cosh 2H'}-\frac{\mathrm{i}\pi a}{2K'}=\mathrm{i}K\sinh 2H'-\mathrm{i}\pi y \tag{457}$$

となる．また，式 (O-5.3) から，

$$Z(\mathrm{i}K'-\mathrm{i}a,1)=-\,\mathrm{dn}\,(\mathrm{i}a,1)\,\mathrm{cs}\,(\mathrm{i}a,1)-\frac{\mathrm{i}\pi}{2K}-Z(\mathrm{i}a,1) \tag{458}$$

である．これに K をかけてから，式 (O-2.2b) と式 (457) を代入すると，

$$\begin{aligned}KZ(\mathrm{i}K'-\mathrm{i}a,1)&=-K\cosh 2H'\frac{\cosh 2H'}{\mathrm{i}\sinh 2H'}-\frac{\mathrm{i}\pi}{2}-KZ(\mathrm{i}a,1)\\&=\mathrm{i}K\cosh 2H'\frac{\cosh 2H'}{\sinh 2H'}-\frac{\mathrm{i}\pi}{2}-\mathrm{i}K\sinh 2H'+\mathrm{i}\pi y\\&=\mathrm{i}K\frac{\cosh^2 2H'-\sinh^2 2H'}{\sinh 2H'}+\mathrm{i}\pi y-\frac{\mathrm{i}\pi}{2}\\&=K\frac{\mathrm{i}}{\sinh 2H'}+\mathrm{i}\pi y-\frac{\mathrm{i}\pi}{2}\end{aligned} \tag{459}$$

である．これを式 (O-6.2) に代入すると，$E(1)=1$ であるから，

$$\begin{aligned}\frac{C}{Nk_{\mathrm{B}}}\frac{\pi}{4}&=(K\sinh 2H'-\pi y)\frac{H'^2}{\sinh^2 2H'}+(K\frac{1}{\sinh 2H'}+\pi y-\frac{\pi}{2})\frac{H^2}{\sinh^2 2H}\\&\qquad+2(K-1)\frac{\mathrm{i}\sinh 2H'}{\mathrm{i}\sinh 2H'}HH'\\&=K(H'^2\sinh 2H'\sinh^2 2H+H^2\sinh 2H'+2HH')-(\frac{\pi}{2}-\pi y)H^2\sinh^2 2H'\\&\qquad-\pi yH'^2\sinh^2 2H-2HH'\\&=K\sinh 2H'(H'\sinh 2H+H)^2\\&\qquad-H^2\sinh^2 2H'\,\mathrm{gd}\,2H-H'^2\sinh^2 2H\,\mathrm{gd}\,2H'-2HH'\end{aligned} \tag{O-8.5}$$

が得られる．

この式の K は $k=1$ で発散する．発散の程度は対数発散である．臨界点近傍における K を表そう．

臨界点を T_{c} として，$H_{\mathrm{c}}=J/T_{\mathrm{c}}$，$H'_{\mathrm{c}}=J'/T_{\mathrm{c}}$，$H_{\mathrm{c}}\approx H$，$H'_{\mathrm{c}}\approx H'$，$\varepsilon=H_{\mathrm{c}}-H$，$\varepsilon'=H'_{\mathrm{c}}-H$ とおく．そうすると，$\varepsilon,\varepsilon\ll 1$ であって，

$$\varepsilon=H_{\mathrm{c}}-H=\frac{J}{k_{\mathrm{B}}T_{\mathrm{c}}}-\frac{J}{k_{\mathrm{B}}T}=\frac{J(T-T_{\mathrm{c}})}{k_{\mathrm{B}}T_{\mathrm{c}}T}=H\frac{T-T_{\mathrm{c}}}{T_{\mathrm{c}}} \tag{460}$$

$$\varepsilon=H'_{\mathrm{c}}-H'=\frac{J'}{k_{\mathrm{B}}T_{\mathrm{c}}}-\frac{J'}{k_{\mathrm{B}}T}=\frac{J'(T-T_{\mathrm{c}})}{k_{\mathrm{B}}T_{\mathrm{c}}T}=H'\frac{T-T_{\mathrm{c}}}{T_{\mathrm{c}}} \tag{461}$$

となる．

まず，$\sinh 2H \sinh 2H' = k$，$\sinh 2H_{\mathrm{c}} \sinh 2H'_{\mathrm{c}} = 1$ であることを用いて，

$$\begin{aligned} k'^2 &= 1 - k^2 \\ &= (\sinh 2H_{\mathrm{c}} \sinh 2H'_{\mathrm{c}})^2 - (\sinh 2H \sinh 2H')^2 \\ &= (\sinh 2H_{\mathrm{c}} \sinh 2H'_{\mathrm{c}} + \sinh 2H \sinh 2H')(\sinh 2H_{\mathrm{c}} \sinh 2H'_{\mathrm{c}} - \sinh 2H \sinh 2H') \end{aligned} \tag{462}$$

とすることができる．ここで，

$$\begin{aligned} &\sinh 2H_{\mathrm{c}} \sinh 2H'_{\mathrm{c}} + \sinh 2H \sinh 2H' \\ =&\frac{1}{2}\{\cosh(2H_{\mathrm{c}} + 2H'_{\mathrm{c}}) + \cosh(2H_{\mathrm{c}} - 2H'_{\mathrm{c}})\} - \frac{1}{2}\{\cosh(2H + 2H') + \cosh(2H - 2H')\} \\ =&\cosh(H_{\mathrm{c}} + H'_{\mathrm{c}} + H + H')\cosh(H_{\mathrm{c}} + H'_{\mathrm{c}} - H - H') - \cosh(H_{\mathrm{c}} - H'_{\mathrm{c}} + H - H')\cosh(H_{\mathrm{c}} - H'_{\mathrm{c}} - H + H') \\ \simeq&\cosh(2H_{\mathrm{c}} + 2H'_{\mathrm{c}})\cosh(\varepsilon + \varepsilon') - \cosh(2H_{\mathrm{c}} - 2H'_{\mathrm{c}})\cosh(\varepsilon - \varepsilon') \\ \simeq&\cosh(2H_{\mathrm{c}} + 2H'_{\mathrm{c}}) - \cosh(2H_{\mathrm{c}} - 2H'_{\mathrm{c}}) \\ =&2\sinh 2H_{\mathrm{c}} \sinh 2H'_{\mathrm{c}} = 2, \end{aligned} \tag{463}$$

および，

$$\begin{aligned} &\sinh 2H_{\mathrm{c}} \sinh 2H'_{\mathrm{c}} - \sinh 2H \sinh 2H' \\ =&\frac{1}{2}\{\cosh(2H_{\mathrm{c}} + 2H'_{\mathrm{c}}) - \cosh(2H_{\mathrm{c}} - 2H'_{\mathrm{c}})\} - \frac{1}{2}\{\cosh(2H + 2H') - \cosh(2H - 2H')\} \\ =&\frac{1}{2}\{\cosh(2H_{\mathrm{c}} + 2H'_{\mathrm{c}}) - \cosh(2H + 2H')\} - \frac{1}{2}\{\cosh(2H_{\mathrm{c}} - 2H'_{\mathrm{c}}) - \cosh(2H - 2H')\} \\ =&\sinh(H_{\mathrm{c}} + H'_{\mathrm{c}} + H + H')\sinh(H_{\mathrm{c}} + H'_{\mathrm{c}} - H - H') - \sinh(H_{\mathrm{c}} - H'_{\mathrm{c}} + H - H')\sinh(H_{\mathrm{c}} - H'_{\mathrm{c}} - H + H') \\ =&\sinh(2H_{\mathrm{c}} + 2H'_{\mathrm{c}})\sinh(\varepsilon + \varepsilon') - \sinh(2H_{\mathrm{c}} - 2H'_{\mathrm{c}})\sinh(\varepsilon - \varepsilon') \\ =&(\varepsilon + \varepsilon')\sinh(2H_{\mathrm{c}} + 2H'_{\mathrm{c}}) - (\varepsilon - \varepsilon')\sinh(2H_{\mathrm{c}} - 2H'_{\mathrm{c}}) \\ =&\varepsilon\{\sinh(2H_{\mathrm{c}} + 2H'_{\mathrm{c}}) - \sinh(2H_{\mathrm{c}} - 2H'_{\mathrm{c}})\} + \varepsilon'\{\sinh(2H_{\mathrm{c}} + 2H'_{\mathrm{c}}) + \sinh(2H_{\mathrm{c}} - 2H'_{\mathrm{c}})\} \\ =&2\varepsilon \cosh 2H_{\mathrm{c}} \sinh 2H'_{\mathrm{c}} + \varepsilon' \sinh 2H_{\mathrm{c}} + \cosh 2H'_{\mathrm{c}} \\ =&\frac{2(T - T_{\mathrm{c}})}{T_{\mathrm{c}}}(H \cosh 2H_{\mathrm{c}} \sinh 2H'_{\mathrm{c}} + 2H' \sinh 2H_{\mathrm{c}} \cosh 2H'_{\mathrm{c}}) \\ =&\frac{2(T - T_{\mathrm{c}})}{T_{\mathrm{c}}}(H \coth 2H_{\mathrm{c}} + 2H' \coth 2H'_{\mathrm{c}}) \end{aligned} \tag{464}$$

とすることができる．ここで，$\sinh 2H_{\mathrm{c}} \sinh 2H'_{\mathrm{c}} = 1$ を用いた．これを式 (462) に代入すると，

$$\begin{aligned} K \sim \ln \frac{4}{k'} &= \frac{1}{2} \ln \frac{16}{k'^2} \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{16T_{\mathrm{c}}}{4(T - T_{\mathrm{c}})(H \coth 2H_{\mathrm{c}} + 2H' \coth 2H'_{\mathrm{c}})} \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{4T_{\mathrm{c}}}{(T - T_{\mathrm{c}})(H \coth 2H_{\mathrm{c}} + 2H' \coth 2H'_{\mathrm{c}})} \end{aligned} \tag{465}$$

となる．$H_{\mathrm{c}} \simeq H$，$H'_{\mathrm{c}} \simeq H'$，$T_{\mathrm{c}} \simeq T$ として書き換えると，

$$\begin{aligned} K \sim \ln \frac{4}{k'} &= \frac{1}{2} \ln \frac{4T}{(T - T_{\mathrm{c}})(H \coth 2H + 2H' \coth 2H')} \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{4T}{(T - T_{\mathrm{c}})} - \frac{1}{2} \ln(H \coth 2H + 2H' \coth 2H') \end{aligned} \tag{466}$$

である．論文では誤植で第 2 項の $\frac{1}{2}$ が抜けている．

18.9 比熱の数値計算

2 次元イジングモデルにおける比熱の温度依存性は式 (O-6.2) から計算される．温度が臨界点より低いとき（低温域）と高いとき（高温域）では式が異なる．

低温域では $H' > H^*$ であり，式 (O-6.2) に式 (O-2.2a)，(O-5.3)，(O-5.2) を代入することにより，

$$\frac{4}{\pi}\frac{C}{Nk_\mathrm{B}} = \left\{\left(\frac{H'}{\sinh 2H'}\right)^2 - \left(\frac{H}{\sinh 2H}\right)^2\right\}\left(K\cosh 2H^*\tanh 2H' - KZ(a,k') - \frac{\pi a}{2K'}\right)$$
$$+ (K\cosh 2H^*\coth 2H' - \frac{\pi}{2})\left(\frac{H}{\sinh 2H}\right)^2 + 2(K-E)HH' \tag{467}$$

となる．

高温域では，

$$\frac{4}{\pi}\frac{C}{Nk_\mathrm{B}} = \left\{\left(\frac{H'}{\sinh 2H'}\right)^2 - \left(\frac{H}{\sinh 2H}\right)^2\right\}\left(K\cosh 2H'\tanh 2H^* - KZ(a,k') - \frac{\pi a}{2K'}\right)$$
$$+ (K\cosh 2H'\coth 2H^* - \frac{\pi}{2})\left(\frac{H}{\sinh 2H}\right)^2 + \frac{2}{k}(K-E)HH' \tag{468}$$

となる．

両方の式にはヤコビのツェータ関数 $Z(a,k')$ が含まれる．その中の a は低温域と高温域でそれぞれ異なり，低温域では式 (O-2.2a) の $\mathrm{sn}\,(\mathrm{i}a) = \mathrm{i}\sinh 2H'$ から，定義式で $\mathrm{i}\varphi = \theta$ と変数変換することにより，

$$\mathrm{i}a = \int_0^{2\mathrm{i}H'} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\varphi}} = \mathrm{i}\int_0^{2H'} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1+\sinh^2\theta}}$$

となり，これから，

$$a = \int_0^{2H'} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1+\sinh^2\theta}} \tag{469}$$

となるので，この式から a を計算できる．

高温域でも，同様にして，

$$a = \int_0^{2H^*} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1+\sinh^2\theta}} \tag{470}$$

となる．

温度 T は $J' = J$ のときは $T = J/H$ であるから，$1/H$ を温度の代わりに用いる．$J' \neq J$ のときは，整合性を考え，$J'/J = r$ とおいて，$H + H' = (1+r)H = (1+r)J/T = (1+r)H$ より，

$$\frac{2}{H+H'} = \frac{2}{(1+r)H} \tag{471}$$

を温度の代わりに用いる．

ツェータ関数 $Z(a,k')$ の計算には [15], p.274 の方法を用いた．この計算にはノーム q と q' を用いるが，T が小さい時に k' が 1 に非常に近くなるが，q' は十分小さくはならず，オーバーフローを起こして計算できない．$k=1$ では $Z(u,1) = \tanh u$ となるので，$Z(u,1) \simeq \tanh u - u/K$ と近似しても ([15], p.275) 微小な誤差を生じる．ここでは，それよりも高い温度で C は 0 となるので，$tt = 0.2$ 以下で 0 とおいている．

このようにして数値計算した結果を図 10 と図 11 に示す．数値計算プログラムは付録に示した。

* * * * *

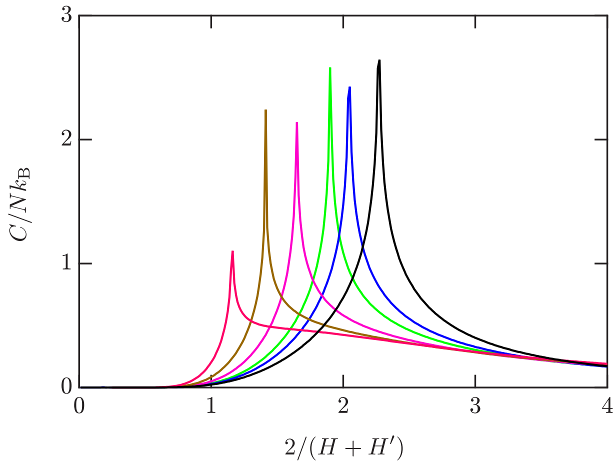

図　10:　2 次元イジングモデル厳密解の比熱温度依存性．ピークが一番右のグラフから，$J'/J = 1.0, 0.5, 0.3, 0.2, 0.1, 0.05$.

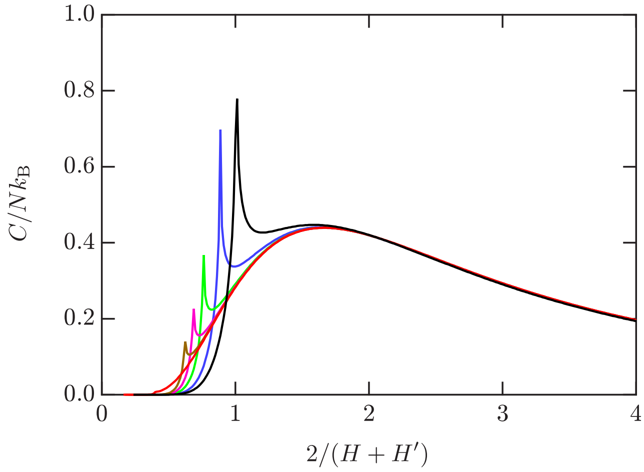

図　11:　2 次元イジングモデル厳密解の比熱温度依存性．ピークが一番右のグラフから，$J'/J = 0.01, 0.005, 0.002, 0.001, 0.0005, 0.00001$.

参考文献

[1] 「Onsager の 2 次元イジングモデル厳密解の論文を読む　その 1」(2017/8/7 のエントリー). `http://totoha.web.fc2.com/Onsager_paper1.pdf`

[2] 「ランダウ - リフシッツ　統計物理学」第 2 版 下（岩波書店）1967 年.

[3] 「Onsager の 2 次元イジングモデル厳密解の論文を読む　その 11」(2018/1/26 のエントリー). `http://totoha.web.fc2.com/Onsager_paper11.pdf`

[4] 森口繁一，宇田川金圭久，一松信,「数学公式 II」（岩波書店）, 1957 年.

[5] 森口繁一，宇田川金圭久，一松信,「数学公式 III」（岩波書店）, 1960 年.

[6] 森口繁一，宇田川金圭久，一松信,「数学公式 I」（岩波書店）, 1971 年.

[7] E. T. Whittaker and G. N. Watson, “A Course of Modern Analysis”, 4th Edition Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press, Internet ArchiveOpen Library,

ダウンロード URL,
https://ia802704.us.archive.org/11/items/courseofmodernan00whit/courseofmodernan00whit.pdf

[8] Harris Hancock "Lectures on the theory of elliptic functions"
ダウンロード URL,
https://openlibrary.org/works/OL5730167W/Lectures_on_the_theory_of_elliptic_functions

[9] Harris Hancock "Elliptic Integrals"
ダウンロード URL,
https://archive.org/details/ellipticintegral00hancuoft

[10] 「自然科学者のための数学概論［増訂版］」1954 年（岩波書店）.

[11] M. Abramowitz and I. A. Stegun (eds.), "Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables", National Bureau of Standards Applied Mathematics Series 55 (1964).

[12] 「第 1 種楕円積分のランデン変換」(2018/3/27 のエントリー).
http://totoha.web.fc2.com/Landen.pdf

[13] 「第 1 種楕円積分のガウス変換」(2018/6/4 のエントリー).
http://totoha.web.fc2.com/Gauss_transf.pdf

[14] National Institute of Standards and Technology, Digital Library of Mathematic Functions
https://dlmf.nist.gov/20.7#v

[15] 山内二郎，宇野利雄，一松信,「電子計算機のための数値計算法 III」（培風館）, 1971 年.

付録

楕円テータ関数の計算プログラム

```
/*  THETA.c  */
// provides values for the four theta functions at v=0
// using the ALGOL program in the textbook 電子計算機のための数値計算法 III p.266
// M. Suzuki 2018.6.21

#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <string.h>
#include <math.h>

double THETA(int I, double v, double q)
{
    double w, q2, q3, q6, lnq, qbis, plq;
    double theta;
    double pi=3.14159265359;
    double doub_pi=6.28318530718;
    int S;


    if(I==2) v+=0.5;
    if(I==3) v-=0.5;
    if(I==1 || I==2)
```

```
{
    S=(v>0)-(v<0);
}
else
{
    S=1;
}
v=fabs(v);
while(v>1)
{
    v-=1.0;
    if(I==1 || I==2) S*=-1;
}
if(I==1 || I==2)
{
    if(q==0 || v==0)
    {
        theta=0;
        return theta;
    }
}
else
{
    if(q==0)
    {
        theta=1;
        return theta;
    }
}
if(q>0.043)  /* IMAG */
{
    lnq=log(q);
    plq=9.8690440109/lnq;
    qbis=exp(plq);
    q2=qbis*qbis;
    q6=q2*q2*q2;
    if(v>0.5) v=1.0-v;
    if(I==1 || I==2) w=-exp(2.0*v*plq); else w=exp(2.0*v*plq);
    theta=S*(1.7724538509/sqrt(-lnq))*exp((v*v-v+0.25)*plq);
    theta*=(((((q6*w+q2)*w+1.0)*w+1.0)*w+q2)*w+q6)/w/w;
    return theta;
}
else
{
    if(I==1 || I==2)  /* TH1 */
    {
        w=pi*v;
        q2=q*q;
        theta=2*S*sqrt(sqrt(q))*((sin(5.0*w)*q2*q2-sin(3.0*w))*q2+sin(w));
        return theta;
    }
    else  /* TH4 */
    {
        w=doub_pi*v;
        q2=q*q;
        q3=q2*q;
        theta=2.0*((-cos(3.0*w)*q2*q3+cos(2.0*w))*q3-cos(w))*q+1;
```

```
            return theta;
        }
    }
}


int main()
{
    FILE *fp;
    double v, dv, q, x, z;
    double pi;
    int i, j, n;
    pi=M_PI;
    n=800;
    q=0.8;
    dv=4.0/n;
    char *filenameout="theta_0.8.txt";
    fp=fopen(filenameout, "w");
    for(i=0;i<n;i++)
    {
        v=dv*i;
        printf("%lf\t%lf\t", v, v*pi);
        fprintf(fp, "%lf\t%lf\t", v, v*pi);
        for(j=1;j<5;j++)
        {
            z=THETA(j, v, q);
            printf("%lf\t", z);
            fprintf(fp, "%lf\t", z);
        }
        printf("\n");
        fprintf(fp, "\n");
    }
    fclose(fp);
}
```

ヤコビの楕円関数の計算プログラム

```
/*  QKK.c  */
// provides values for the Jacobi elliptic functions from u.
// using the algorhythm in the textbook 電子計算機のための数値計算法 III p.271
/*  M. Suzuki 2018.6.24 */

#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <string.h>
#include <math.h>

int QKK(double *p)
// QKK(p),  p[0]=q, p[1]=qbis, p[2]=kk, p[3]=kkbis, p[4]=kork2, p[5]=M;
{
    double k, k2, kork2, q, qbis, kk, kkbis;
    double eps, eps4, kbis, sqkbis, kkovpi, lnq;
    double pi=3.14159265359;
    int LARGE, M;
```

```
    kork2=p[4];
    M=p[5]+0.0001;
    if(M==1) k2=kork2*kork2;
    else k2=kork2;
    LARGE=k2>0.5;
    if(LARGE) k2=1.0-k2;
    if(k2==0)
    {
        q=0;
        qbis=1.0;
        kk=pi/2.0;
        kkbis=1e124;
    }
    else
    {
        kbis=sqrt(1.0-k2);
        sqkbis=sqrt(kbis);
        eps=0.5*k2/((1.0+kbis+2.0*sqkbis)*(1.0+kbis));
        eps4=pow(eps, 4);
        q=((15.0*eps4+2.0)*eps4+1.0)*eps;
        kkovpi=(1.0+2.0*pow(q, 4))/(1.0+sqkbis);
        kkovpi*=2*kkovpi;
        kk=pi*kkovpi;
        lnq=log(1.0/q);
        kkbis=kkovpi*lnq;
        qbis=exp(-9.86960440109/lnq);
    }
    if(LARGE)
    {
        p[0]=qbis;
        p[1]=q;
        p[2]=kkbis;
        p[3]=kk;
    }
    else
    {
        p[0]=q;
        p[1]=qbis;
        p[2]=kk;
        p[3]=kkbis;
    }
    return 0;
}

double THETA(int I, double v, double q)
{
    double w, q2, q3, q6, lnq, qbis, plq;
    double theta;
    double pi=3.14159265359;
    double doub_pi=6.28318530718;
    int S;


    if(I==2) v+=0.5;
    if(I==3) v-=0.5;
    if(I==1 || I==2)
    {
```

```
    S=(v>0)-(v<0);
}
else
{
    S=1;
}
v=fabs(v);
while(v>1)
{
    v-=1.0;
    if(I==1 || I==2) S*=-1;
}
if(I==1 || I==2)
{
    if(q==0 || v==0)
    {
        theta=0;
        return theta;
    }
}
else
{
    if(q==0)
    {
        theta=1;
        return theta;
    }
}
if(q>0.043)
{
    lnq=log(q);
    plq=9.8690440109/lnq;
    qbis=exp(plq);
    q2=qbis*qbis;
    q6=q2*q2*q2;
    if(v>0.5) v=1.0-v;
    if(I==1 || I==2) w=-exp(2.0*v*plq); else w=exp(2.0*v*plq);
    theta=S*(1.7724538509/sqrt(-lnq))*exp((v*v-v+0.25)*plq);
    theta*=(((((q6*w+q2)*w+1.0)*w+1.0)*w+q2)*w+q6)/w/w;
    return theta;
}
else
{
    if(I==1 || I==2)
    {
        w=pi*v;
        q2=q*q;
        theta=2*S*sqrt(sqrt(q))*((sin(5.0*w)*q2*q2-sin(3.0*w))*q2+sin(w));
        return theta;
    }
    else
    {
        w=doub_pi*v;
        q2=q*q;
        q3=q2*q;
        theta=2.0*((-cos(3.0*w)*q2*q3+cos(2.0*w))*q3-cos(w))*q+1;
        return theta;
```

```
        }
    }
}


int main()
{
    //  QKK(p),  p[0]=q, p[1]=qbis, p[2]=kk, p[3]=kkbis, p[4]=kork2, p[5]=M;
    FILE *fp;
    double k, k2, kk, kk2, kbis, sk, skbis, p[6], q, v, dv;
    double SN, CN, DN, TH4;
    int i, n;
    char *filenameout="Jacobi_0.9.txt";

    k=0.9;
    k2=k*k;
    p[5]=1;
    p[4]=k;
    QKK(p);
    q=p[0];
    kk=p[2];
    kk2=2*kk;
    sk=sqrt(k);
    skbis=sqrt(sqrt(1.0-k2));
    n=200;
    dv=4.0/n;
    fp=fopen(filenameout, "w");
    for(i=0;i<n+1;i++)
    {
        v=i*dv;
        TH4=THETA(4, v, q);
        SN=THETA(1, v, q)/(sk*TH4);
        CN=THETA(2, v, q)*skbis/(sk*TH4);
        DN=THETA(3, v, q)*skbis/TH4;
        printf("%lf\t%lf\t%lf\t%lf\n", v, SN, CN, DN);
        fprintf(fp, "%lf\t%lf\t%lf\t%lf\n", v, SN, CN, DN);
    }
    fclose(fp);
}
```

ヤコビのツェータ関数の計算プログラム

```
/*  ZETA.c  */
// provides values for the Jacobi Zeta functions form u=(2K)v
// 電子計算機のための数値計算法 III p.275
// M. Suzuki 2018.6.24

#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <string.h>
#include <math.h>

int QKK(double *p)
// p[0]=q, p[1]=qbis, p[2]=kk, p[3]=kkbis, p[4]=k;
{
```

```
    double k, k2, kork2, q, qbis, kk, kkbis;
    double eps, eps4, kbis, sqkbis, kkovpi, lnq;
    double pi=M_PI, pisq;
    int LARGE, M;

    pisq=pi*pi;
    kork2=p[4];
    M=p[5]+0.001;
    if(M==2) k2=kork2;
    else k2=kork2*kork2;
    LARGE=k2>0.5;
    if(LARGE) k2=1.0-k2;
    if(k2==0)
    {
        q=0;
        qbis=1.0;
        kk=pi/2.0;
        kkbis=1e124;
    }
    else
    {
        kbis=sqrt(1.0-k2);
        sqkbis=sqrt(kbis);
        eps=0.5*k2/((1.0+kbis+2.0*sqkbis)*(1.0+kbis));
        eps4=pow(eps, 4);
        q=((15.0*eps4+2.0)*eps4+1.0)*eps;
        kkovpi=(1.0+2.0*pow(q, 4))/(1.0+sqkbis);
        kkovpi*=2*kkovpi;
        kk=pi*kkovpi;
        lnq=log(1.0/q);
        kkbis=kkovpi*lnq;
        qbis=exp(-pisq/lnq);
    }
    if(LARGE)
    {
        p[0]=qbis;
        p[1]=q;
        p[2]=kkbis;
        p[3]=kk;
    }
    else
    {
        p[0]=q;
        p[1]=qbis;
        p[2]=kk;
        p[3]=kkbis;
    }
    return 0;
}


double ZETA(double u, double *p)
{
// QKK(p); p[0]=q, p[1]=qbis, p[2]=kk, p[3]=kkbis, p[4]=k;
    double q, q2, q3, q6, q8, q12, qbis;
    double k, k2, kk, kkbis, kk2;
    double v, w;
```

```
    double theta, ditheta, zeta;
    double pi=M_PI, doub_pi=2*pi;
    int S;

    q=p[0];
    qbis=p[1];
    kk=p[2];
    kkbis=p[3];
    k=p[4];
    k2=k*k;
    kk2=2*kk;

    S=(u>0)-(u<0);
    u=fabs(u);
    while(u>kk2) u-=kk2;
    v=u/kk2;

    if(k2<=0.5)
    {
        w=doub_pi*v;
        q2=q*q;
        q3=q*q2;
        q8=q3*q3*q2;
        ditheta=sin(w)-2*q3*sin(2*w)+3*q8*sin(3*w);
        theta=1-2*q*(cos(w)-q3*cos(2*w)+q8*cos(3*w));
        zeta=doub_pi*q*(ditheta/theta)/kk;
        return S*zeta;
    }
    else
    {
        w=pow(qbis, 2.0*v);
        q2=qbis*qbis;
        q6=q2*q2*q2;
        q12=q6*q6;
        ditheta=((((((-7*q12*w-5*q6)*w-3*q2)*w-1)*w+1)*w+3*q2)*w+5*q6)*w+7*q12;
        theta=((((((q12*w+q6)*w+q2)*w+1.0)*w+1.0)*w+q2)*w+q6)*w+q12;
        zeta=(pi/kkbis/2)*(ditheta/theta-u/kk);
        return S*zeta;
    }
}

int main()
{
    FILE *fp;
    double k, kk, kk2, v, dv, u, z;
    double p[6], pi;
    int i, j, n;
    pi=M_PI;
    n=200;
    dv=2.0/n;
    k=0.999;
    p[5]=1;
    p[4]=k;
    QKK(p);
    kk=p[2];
    kk2=2*kk;
```

```
    char *filenameout="zeta_0.999.txt";
    fp=fopen(filenameout, "w");
    for(i=0;i<n;i++)
    {
        v=dv*i;
        u=v*kk2;
        z=ZETA(u, p);
        printf("%lf\t%le\n", v, z);
        fprintf(fp, "%lf\t%le\n", v, z);
    }
    fclose(fp);
}
```

比熱の温度依存性の計算プログラム

```
/*  Specific_heat_Osager.c  */
// at an arbitrary ratio of r for J'/J for the 2D Ising model
// M. Suzuki 2018.6.24

#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <string.h>
#include <math.h>

int QKKEE(double *p)
// QKKEE(p); p[0]=q, p[1]=qbis, p[2]=kk, p[3]=kkbis, p[4]=ee, p[5]=eebis, p[6]=k;
{
    double k, k2, kbis, skbis, eps, eps4, q, lnq, qbis, q2, q3, th32;
    double kk, kkbis, ee, eebis;
    double pi=3.14159265359;
    double piov2, piov6, pi2;
    int LARGE;
    piov2=pi/2.0;
    piov6=pi/6.0;
    pi2=pi*pi;
    k=p[6];
    k2=k*k;
    LARGE=(k2>0.5);
    if(LARGE) k2=1-k2;
    if(k2==0)
    {
        p[0]=0;
        p[1]=1.0;
        p[2]=piov2;
        p[3]=1e124;
        p[4]=piov2;
        p[5]=1.0;
        return 0;
    }
    kbis=sqrt(1-k2);
    skbis=sqrt(kbis);
    eps=0.5*k2/(2*(1+skbis*(1+kbis)+kbis)-k2);
    eps4=pow(eps, 4);
    q=((15.0*eps4+2.0)*eps4+1.0)*eps;
    lnq=log(q);
```

```
    qbis=exp(pi2/lnq);
    q2=q*q;
    q3=q2*q;
    th32=(((q2*q3+1.0)*q3+1.0)*q*2.0+1.0);
    th32*=th32;
    kk=piov2*th32;
    kkbis=-0.5*lnq*th32;
    ee=(piov6/th32)*(1.0+th32*th32*(2.0-k2)
            -((((144.0*q2+168.0)*q2+96.0)*q2+72)*q2+24.0)*q2);
    eebis=kkbis*(1.0-ee/kk)+1.0/th32;
    if(LARGE)
    {
        p[0]=qbis;
        p[1]=q;
        p[2]=kkbis;
        p[3]=kk;
        p[4]=eebis;
        p[5]=ee;
    }
    else
    {
        p[0]=q;
        p[1]=qbis;
        p[2]=kk;
        p[3]=kkbis;
        p[4]=ee;
        p[5]=eebis;
    }
    return 0;
}


double ZETA(double u, double *p)
{
// QKKEE(p); p[0]=q, p[1]=qbis, p[2]=kk, p[3]=kkbis, p[4]=ee, p[5]=eebis, p[6]=k;
    double q, q2, q3, q6, q8, q12, qbis;
    double k, k2, kk, kkbis, kk2;
    double v, w;
    double theta, ditheta, zeta;
    double pi=M_PI, doub_pi=2*pi;
    int S;

    q=p[0];
    qbis=p[1];
    kk=p[2];
    kkbis=p[3];
    k=p[6];
    k2=k*k;
    kk2=2*kk;

    S=(u>0)-(u<0);
    u=fabs(u);
    while(u>kk2) u-=kk2;
    v=u/kk2;

    if(k2<=0.5)
    {
```

```
        w=doub_pi*v;
        q2=q*q;
        q3=q*q2;
        q8=q3*q3*q2;
        ditheta=sin(w)-2*q3*sin(2*w)+3*q8*sin(3*w);
        theta=1-2*q*(cos(w)-q3*cos(2*w)+q8*cos(3*w));
        zeta=doub_pi*q*(ditheta/theta)/kk;
        return S*zeta;
    }
    else
    {
        w=pow(qbis, 2.0*v);
        q2=qbis*qbis;
        q6=q2*q2*q2;
        q12=q6*q6;
        ditheta=((((((-7*q12*w-5*q6)*w-3*q2)*w-1)*w+1)*w+3*q2)*w+5*q6)*w+7*q12;
        theta=((((((q12*w+q6)*w+q2)*w+1.0)*w+1.0)*w+q2)*w+q6)*w+q12;
        zeta=(pi/kkbis/2)*(ditheta/theta-u/kk);
        return S*zeta;
    }
}

double function(double x, double k)
{
    double y, z;
    y=sinh(x);
    z=1.0/sqrt(1+k*k*y*y);
    return z;
}


double simpson(double b, double k)
{
    char buffer[100];
    double a, x, h, sumodd, sumeven, z;
    int i, n;
    n=200;
    a=0;
    h=(b-a)/n;
    sumodd=0;
    sumeven=0;
    for(i=1;i<n;i+=2)
    {
        x=a+i*h;
        z=function(x, k);
        sumodd+=z;
    }
    for(i=2;i<n;i+=2)
    {
        x=a+i*h;
        z=function(x, k);
        sumeven+=z;
    }
    z=(function(a, k)+function(b, k)+4*sumodd+2*sumeven)*h/3.0;
    return z;
}
```

```
int main()
{
// QKKEE(p); p[0]=q, p[1]=qbis, p[2]=kk, p[3]=kkbis, p[4]=ee, p[5]=eebis, p[6]=k;
    FILE *fp;
    char *filenameout="C-T_0.00001.txt";
    char buffer[100];
    double ee, k, kbis, kk, kkbis, v, dv, u, y, z, ZETAbis;
    double H, Hbis, Hast, H2, Hbis2, Hast2;
    double p[7], pi;
    double bis, tt, dtt, a;
    int i, j, n, LOWER;
    pi=M_PI;
    bis=0.00001;
    n=400;
    dtt=5.0/n;
    fp=fopen(filenameout, "w");
    for(i=1;i<n;i++)
    {
        tt=i*dtt;
        H=2.0/(1+bis)/tt;
        H2=H*2.0;
        Hbis=H*bis;
        Hbis2=Hbis*2.0;
        Hast=0.5*log(1.0/tanh(H));
        Hast2=Hast*2.0;
        LOWER=(Hbis>Hast);
        if(LOWER)
        {
            k=1.0/(sinh(H2)*sinh(Hbis2));
            kbis=sqrt(1-k*k);
            a=simpson(Hbis2, k);
            p[6]=kbis;
            QKKEE(p);
            ZETAbis=ZETA(a, p);
            p[6]=k;
            QKKEE(p);
            kk=p[2];
            kkbis=p[3];
            ee=p[4];
            y=(Hbis/sinh(Hbis2));
            y*=y;
            z=y;
            y=(H/sinh(H2));
            y*=y;
            z-=y;
            z*=kk*cosh(Hast2)*tanh(Hbis2)-kk*ZETAbis-pi*a/kkbis/2.0;
            z+=(kk*cosh(Hast2)/tanh(Hbis2)-pi/2.0)*y+2.0*(kk-ee)*H*Hbis;
        }
        else
        {
            k=sinh(H2)*sinh(Hbis2);
            kbis=sqrt(1-k*k);
            a=simpson(Hast2, k);
            p[6]=kbis;
            QKKEE(p);
            ZETAbis=ZETA(a, p);
```

```
            p[6]=k;
            QKKEE(p);
            kk=p[2];
            kkbis=p[3];
            ee=p[4];
            y=(Hbis/sinh(Hbis2));
            y*=y;
            z=y;
            y=(H/sinh(H2));
            y*=y;
            z-=y;
            z*=kk*cosh(Hbis2)*tanh(Hast2)-kk*ZETAbis-pi*a/kkbis/2.0;
            z+=(kk*cosh(Hbis2)/tanh(Hast2)-pi/2.0)*y+2.0*(kk-ee)*H*Hbis/k;
        }
        z*=4.0/pi;
        printf("%lf\t%lf\n", tt, z);
        fprintf(fp, "%lf\t%lf\n", tt, z);
    }
    fclose(fp);
}
```