第1種楕円積分のランデン変換

2018.3.23　　鈴木　実

1　はじめに

ランデン (Landen) 変換は楕円積分、ヤコビの楕円関数、楕円テータ関数などの母数を増減させる変換公式である。母数が増加する場合は上昇ランデン変換 (ascending Landen transformation)，減少する場合を下降ランデン変換 (ascending Landen transformation) という．変換前の母数を k，変換後の母数を k_1 とすると，上昇変換の場合，

$$k_1 = \frac{2\sqrt{k}}{1+k}, \tag{1}$$

下降変換の場合は

$$k_1 = \frac{1-k'}{1+k'} \tag{2}$$

である．ただし，$k' = \sqrt{1-k^2}$ は k の補母数である．それぞれの場合，1 回の変換で母数は図 1 のように増加または減少する．図からわかるように，増減の程度が著しいので，数回のランデン変換で母数は 1 または 0 に非常に近くなるため，3,4 回のランデン変換で楕円積分の非常に精度の高い数値計算結果が得られる．そのため，電子計算機がなかった時代にはこうした手法が重用されたようである．

岩波書店の「数学公式 I」[1]，ウィキペディア [2] では説明が不十分であるか，統一されていないので，わかりにくい．ここでは，第 1 種不完全楕円積分の場合を対象として，ランデン変換を整理しておこう．

2　上昇ランデン変換

第 1 種不完全楕円積分を

$$F(\phi, k) = \int_0^\phi \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} \tag{3}$$

と表す．上昇ランデン変換を施す場合，次式により θ から ψ へ変数変換を行う．

$$\sin(2\psi - \theta) = k\sin\theta. \tag{4}$$

この式を変形することにより，

$$\tan\theta = \frac{\sin 2\psi}{k+\cos 2\psi} \tag{5}$$

となる．これから，

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} = \frac{k+\cos 2\psi}{\sqrt{(k+\cos 2\psi)^2+\sin^2 2\psi}} = \frac{k+\cos 2\psi}{\sqrt{(k+1)^2-4k(1-\cos 2\psi)}} \\ &= \frac{1}{1+k}\frac{k+\cos 2\psi}{\sqrt{1-k_1^2\sin^2\psi}} \end{aligned} \tag{6}$$

$$\sin\theta = \tan\theta\cos\theta = \frac{1}{1+k}\frac{\sin 2\psi}{\sqrt{1-k_1^2\sin^2\psi}} \tag{7}$$

となる．ここで，

$$k_1 = \frac{2\sqrt{k}}{1+k} \tag{8}$$

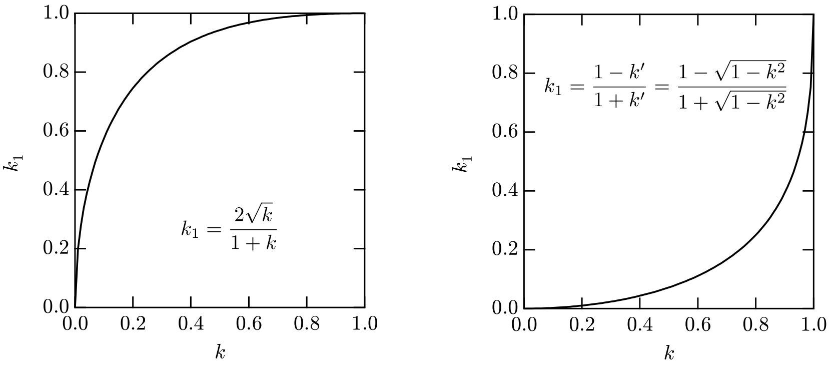

図 1: 左図：上昇ランデン変換の母数変換．変換前の母数を k，変換後の母数を k_1 とすると，$k_1 = 2\sqrt{k}/(1+k)$．右図：下降ランデン変換の母数変換．$k_1 = (1-\sqrt{1-k^2})/(1+\sqrt{1-k^2})$．

とおいた．したがって，式 (6)，(7) を用いると，

$$\begin{aligned}\sqrt{1-k^2\sin^2\theta} &= \sqrt{1-\sin^2(2\psi-\theta)} = \cos(2\psi-\theta) = \cos 2\psi\cos\theta + \sin 2\psi\sin\theta \\ &= \frac{1}{1+k}\frac{1+k\cos 2\psi}{\sqrt{1-k_1^2\sin^2\psi}}\end{aligned} \tag{9}$$

となる．また，式 (5) を微分することにより，

$$\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{2\cos 2\psi(k+\cos 2\psi)+2\sin^2 2\psi}{(k+\cos 2\psi)^2}\mathrm{d}\psi = \frac{2(1+k\cos 2\psi)}{(k+\cos 2\psi)^2}\mathrm{d}\psi, \tag{10}$$

となる．したがって，式 (6) を代入して，

$$\mathrm{d}\theta = \frac{2(1+k\cos 2\psi)}{(1+k)^2(1-k_1^2\sin^2\psi)}\mathrm{d}\psi, \tag{11}$$

となる．式 (9) と (11) を式 (3) に代入することにより，

$$F(\phi,k) = \frac{2}{1+k}\int_0^{\phi_1}\frac{\mathrm{d}\psi}{\sqrt{1-k_1^2\sin^2\psi}} = \frac{2}{1+k}F(\phi_1,k_1) \tag{12}$$

となり，上昇ランデン変換の公式が得られる．ϕ_1 は式 (4) から，

$$\sin(2\phi_1-\phi) = k\sin\phi. \tag{13}$$

の関係より求められる．

なお，式 (8) より，

$$k_1' = \sqrt{1-k^2} = \sqrt{\frac{(1+k)^2-4k}{(1+k)^2}} = \frac{1-k}{1+k} \tag{14}$$

$$k = \frac{1-k_1'}{1+k_1'} \tag{15}$$

$$k' = \sqrt{1-k^2} = \frac{2\sqrt{k_1'}}{1+k_1'} \tag{16}$$

という関係が導かれる．まとめて書くと，

$$\begin{cases} k_1 = \dfrac{2\sqrt{k}}{1+k} \\ k_1' = \dfrac{1-k}{1+k} \\ k = \dfrac{1-k_1'}{1+k_1'} \\ k' = \dfrac{2\sqrt{k_1'}}{1+k_1'} \end{cases} \tag{17}$$

となる．この 4 つの式から明らかなように，上昇ランデン変換により母数は増加し，補母数は減少する．この関係は次節で述べる変換の方向を逆にした場合の下降ランデン変換においても同様である．下降ランデン変換で，母数は減少し，補母数は増加する．後でわかるように，下降ランデン変換の母数と補母数の関係は，上昇ランデン変換の母数と補母数を入れ替えた関係になっている．

式 (17) から

$$1 + k = \frac{2}{1+k_1'} \tag{18}$$

であるから，これを式 (12) に代入すると，

$$F(\phi, k) = (1 + k_1')F(\phi_1, k_1) \tag{19}$$

となる．また，式 (12) を変形して，

$$F(\phi_1, k_1) = \int_0^{\phi_1} \frac{\mathrm{d}\psi}{\sqrt{1 - k_1^2 \sin^2\psi}} = \frac{1+k}{2}F(\phi, k) \tag{20}$$

と表すこともできる．以上をまとめると，

$$F(\phi, k) = \frac{2}{1+k}F(\phi_1, k_1) \tag{21}$$

$$F(\phi, k) = (1 + k_1')F(\phi_1, k_1) \tag{22}$$

$$F(\phi_1, k_1) = \frac{1+k}{2}F(\phi, k) \tag{23}$$

となる．

3 下降ランデン変換

上昇ランデン変換の変換方向を逆に見れば，母数を減少する変換とみなすことができる．つまり，下降ランデン変換が得るには，k_1 と k を交換し，ϕ_1 と ϕ 交換すればよい．そうすると，

$$F(\phi_1, k_1) = \frac{2}{1+k_1}F(\phi, k) \tag{24}$$

$$F(\phi_1, k_1) = (1 + k')F(\phi, k) \tag{25}$$

$$F(\phi, k) = \frac{1+k_1}{2}F(\phi_1, k_1) \tag{26}$$

という公式が成り立つ．このとき，母数およ補母数は以下のようになる．

$$\begin{cases} k_1 = \dfrac{1-k'}{1+k'} \\[2ex] k_1' = \dfrac{2\sqrt{k'}}{1+k'} \\[2ex] k = \dfrac{2\sqrt{k_1}}{1+k_1} \\[2ex] k' = \dfrac{1-k_1}{1+k_1} \end{cases} \tag{27}$$

以上で十分であるが，念のため，上の関係式が成り立つことは以下のようにして示すことができる．

変数変換には，式 (4) において ψ と θ，k と k_1 を交換した次の式により，ψ から θ へ変数変換を行う．

$$\sin(2\theta - \psi) = k_1 \sin\psi. \tag{28}$$

この式で，k_1 は式 (27) で与えられる．このようにおいて良いことは以下の式の展開で明らかになる．上昇ランデン変換の場合と同じようにして，式 (28) から，

$$\tan\psi = \frac{\sin 2\theta}{k + \cos 2\theta} \tag{29}$$

これから，

$$\sec^2\psi = 1 + \tan^2\psi = \frac{(k_1+1)^2 - 4k_1\sin^2\theta}{(k_1+\cos 2\theta)^2} \tag{30}$$

となる．したがって，

$$\begin{aligned} \cos\psi &= \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} = \frac{k_1+\cos 2\theta}{\sqrt{(k_1+1)^2 - 4k_1\sin^2\theta}} \\ &= \frac{1}{1+k_1}\frac{k_1+\cos 2\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}} \end{aligned} \tag{31}$$

$$\sin\psi = \tan\psi\cos\psi = \frac{1}{1+k_1}\frac{\sin 2\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} \tag{32}$$

となる．ここで式 (27) を用いた．式 (29) を微分して，

$$\mathrm{d}\psi = \frac{2(1+k_1\cos 2\theta)}{(1+k_1)^2(1-k^2\sin^2\theta)}\mathrm{d}\theta \tag{33}$$

を得る．式 (31) と式 (32) を用いて，

$$\begin{aligned} \sqrt{1-k_1^2\sin^2\psi} &= \sqrt{1-\sin^2(2\theta-\psi)} = \cos(2\theta-\psi) = \cos 2\theta\cos\psi + \sin 2\theta\sin\psi \\ &= \frac{1}{1+k_1}\frac{1+k_1\cos 2\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} \end{aligned} \tag{34}$$

となる．式 (33) と式 (34) から，

$$F(\phi_1, k_1) = \int_0^{\phi_1}\frac{\mathrm{d}\psi}{\sqrt{1-k_1^2\sin^2\psi}} = \frac{2}{1+k_1}\int_0^{\phi}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} = \frac{2}{1+k_1}F(\phi, k) \tag{35}$$

となる．この式は式 (24) と一致する。その他の式もこの式から導かれる。ϕ_1 は式 (28) から，

$$\sin(2\phi - \phi_1) = k_1\sin\phi_1 \tag{36}$$

として得られる．

* * * * *

変数変換の関係式 (28) は，$2\theta-\psi=(\theta-\psi)+\theta$ および $\psi=\theta-(\theta-\psi)$ として，

$$\sin(\theta-\psi)\cos\theta+\cos(\theta-\psi)\sin\theta=k_1\{\cos(\theta-\psi)\sin\theta-\sin(\theta-\psi)\cos\theta\} \tag{37}$$

と変形することができる．両辺を $\cos(\theta-\psi)\cos\theta$ で割ると，

$$\tan(\theta-\psi)+\tan\theta=k_1\{\tan\theta-\tan(\theta-\psi)\} \tag{38}$$

となるから，

$$\tan(\theta-\psi)=-\frac{1-k_1}{1+k_1}\tan\theta \tag{39}$$

が得られる．すなわち，

$$\tan(\psi-\theta)=k'\tan\theta \tag{40}$$

という下降ランデン変換の変数変換式のもう一つの表現が得られる．ここで，式 (27) を用いた．

また，式 (27) より，$k_1+1=2/(1+k')$ であるから，式 (32) は，

$$\sin\psi=\frac{1+k'}{2}\frac{\sin 2\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}=(1+\sqrt{1-k^2})\frac{\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} \tag{41}$$

となり，この式も下降ランデン変換の変数変換式となる．

「数学公式 I」[1] では，下降ランデン変換のみが記述され，変数変換式は，式 (28)，式 (40)，式 (41) の記載がある．なお,「岩波公式 I」p.145 の式 (28) に対応する式の k は $k_1=(1-k')/(1+k')$ の誤りである．同じ頁の次の項目 d) にも誤りがあるので注意する必要がある．

ウィキペディア [2] では上昇ランデン変換の説明のみがあって，変数変換は，下降変換の式 (41) において k と k_1 を交換した式が与えられている．

4　第 1 種完全楕円積分の下降ランデン変換

第 1 種完全楕円積分 $K(k)$ は，

$$K(k)=F(\frac{\pi}{2},k) \tag{42}$$

であり，$k=1$ で発散するので，ランデン変換を用いた数値計算では下降変換を利用する．式 (36) で $\phi=\frac{\pi}{2}$ とすると，$(1-k_1)\sin\phi_1=0$ であるから，$\phi_1=\pi$ である．式 (26) から，

$$\begin{aligned}K(k)&=\frac{1+k_1}{2}F(\phi_1,k_1)=\frac{1+k_1}{2}\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}\psi}{\sqrt{1-k_1^2\sin^2\psi}}=(1+k_1)\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\psi}{\sqrt{1-k_1^2\sin^2\psi}}\\&=(1+k_1)K(k_1)\end{aligned} \tag{43}$$

となる．$K(k_1)$ にさらに下降ランデン変換を施すことにより $K(k_2)$，k_2 はさらに小さくなる．3，4 回程度繰り返すと，母数 k_4 はほぼ 0 となり，$K(k_4)\simeq\pi/2$ と近似することができる．例えば $k=1/\sqrt{2}$ なら，$k_4=4.8646\cdots\times10^{-11}$，$k=0.1$ なら，$k_3=6.22724\cdots\times10^{-13}$ となる．

参考文献

[1] 森口繁一，宇田川⿰金圭久，一松信,「数学公式 I」（岩波書店）, 1971 年, p.144.

[2] `https://ja.wikipedia.org/wiki/ランデン変換`