Kaufmanの２次元イジングモデル厳密解の論文を読む　その４（完）

2019.3.1　　鈴木　実

3. THE EIVENVALUES AND EIGENVECTORS OF V （Vの固有値および固有ベクトル）

Dual Transformation （双対変換）

まず，もともと固有値を求めるべき $\mathbf{V} = \mathbf{V}_2\mathbf{V}_1$ の形を思い出してみよう．$\mathbf{V}_1$ と $\mathbf{V}_2$ は，

$$\mathbf{V}_1 = \exp(H^*\mathbf{B}) = \exp(H^*\sum_{r=1}^{n}\mathbf{C}_r) = \prod_{r=1}^{n}\exp(-\mathrm{i}H^*\mathbf{P}_r\mathbf{Q}_r) \tag{1}$$

$$\mathbf{V}_2 = \exp(H'\mathbf{A}) = \exp(H'\sum_{r=1}^{n}\mathbf{s}_r\mathbf{s}_{r+1}) = \prod_{r=1}^{n-1}\exp(\mathrm{i}H'\mathbf{P}_{r+1}\mathbf{Q}_r)\exp(-\mathrm{i}H'\mathbf{P}_1\mathbf{Q}_n\mathbf{U}) \tag{2}$$

というものであった（「その2」[1] の式 (O-13)，(O-14) を再掲．指数部の符号が Kaufman の論文と違うことに注意）.「その2」の末尾に述べたように，$\mathbf{V}_2$ は次の「回転」によって $\mathbf{V}_1$ から変換される．

$$\mathbf{P}_r \to \mathbf{P}_{r+1} \tag{3}$$

$$\mathbf{Q}_r \to \mathbf{Q}_r \tag{4}$$

実際，これを式 (1) に適用すると，$1 \le r \le n-1$ では $\mathbf{P}_{r+1}\mathbf{Q}_r$ となるのがすぐわかるが，$r = n$ の場合は，

$$\mathbf{P}_n \to \mathbf{P}_{n+1} = \mathbf{C}_1\mathbf{C}_2\cdots\mathbf{C}_n\mathbf{s}_{n+1} = \mathbf{C}_1\mathbf{C}_2\cdots\mathbf{C}_n\mathbf{s}_1 = \mathbf{U}\mathbf{P}_1 \tag{5}$$

となるので，式 (2) の最後の因子も $\mathbf{P}_n\mathbf{Q}_n \to \mathbf{U}\mathbf{P}_1\mathbf{Q}_n = \mathbf{P}_1\mathbf{Q}_n\mathbf{U}$ になることがわかる．しかし，これは $\mathbf{P}_r\mathbf{Q}_r \to \mathbf{P}_{r+1}\mathbf{Q}_r$ と変換するものの，厳密には，指数部の符号は一致してしない．かつ，同じ回転によって $\mathbf{V}_2$ は $\mathbf{V}_1$ には変換されず，別の量に変わってしまうことに注意を要する．

一方，この $\mathbf{V}_2$ と $\mathbf{V}_1$ の双対な関係は次の $\mathbf{D}$ という回転で相互に正しく変換されることを Onsager が示している [2].

$$\mathbf{D}: \quad \mathbf{P}_r \to \mathbf{Q}_r \tag{6}$$

$$\mathbf{Q}_r \to \mathbf{P}_{r+1} \tag{7}$$

そうすると，$\mathbf{P}_r\mathbf{Q}_r$ は

$$\mathbf{D}: \quad -\mathrm{i}\mathbf{P}_r\mathbf{Q}_r \to -\mathrm{i}\mathbf{Q}_r\mathbf{P}_{r+1} = \mathrm{i}\mathbf{P}_{r+1}\mathbf{Q}_r, \tag{8}$$

$$\mathrm{i}\mathbf{P}_{r+1}\mathbf{Q}_r \to \mathrm{i}\mathbf{Q}_{r+1}\mathbf{P}_{r+1} = -\mathrm{i}\mathbf{P}_{r+1}\mathbf{Q}_{r+1} \tag{9}$$

のように変換される．$r = n$ の場合の式 (1) は，$\mathbf{Q}_n \to \mathbf{P}_{n+1} = \mathbf{U}\mathbf{P}_1$ であるから，

$$-\mathrm{i}\mathbf{P}_n\mathbf{Q}_n \to -\mathrm{i}\mathbf{Q}_n\mathbf{P}_{n+1} = -\mathrm{i}\mathbf{Q}_n\mathbf{U}\mathbf{P}_1 = -\mathrm{i}\mathbf{P}_1\mathbf{Q}_n\mathbf{U} \tag{10}$$

となり，$r = n$ の場合の式 (2) の最後の因子では，

$$-\mathrm{i}\mathbf{P}_1\mathbf{Q}_n\mathbf{U} \to -\mathrm{i}\mathbf{Q}_1\mathbf{P}_{n+1}\mathbf{U} = -\mathrm{i}\mathbf{Q}_1\mathbf{U}\mathbf{P}_1\mathbf{U} = \mathrm{i}\mathbf{Q}_1\mathbf{P}_1\mathbf{U}^2 = \mathrm{i}\mathbf{Q}_1\mathbf{P}_1 = -\mathrm{i}\mathbf{P}_1\mathbf{Q}_1 \tag{11}$$

となるので，確かに $\mathbf{V}_2$ と $\mathbf{V}_1$ は相互に変換されることがわかる．

この回転は，Onsager の表現を使うと，

$$\mathbf{C}_r \to \mathbf{s}_r\mathbf{s}_{r+1} \tag{12}$$

$$\mathbf{s}_r\mathbf{s}_{r+1} \to \mathbf{C}_{r+1} \tag{13}$$

である．この式の変換を式 (1)，(2) に施せば，$\mathbf{C}_{n+r} = \mathbf{C}_r$，$\mathbf{s}_{n+r} = \mathbf{s}_r$ という周期的境界条件が適用されるので，$\mathbf{V}_1$ と $\mathbf{V}_2$ は互いに入れ替わるということがわかる．この相互変換 $\mathbf{D}$ は dual transformation（双対変換）と言われ，Kramers と Wannier [3] が最初に着目したものである．

ここで，$\mathbf{V}_1 \equiv \mathbf{V}_1(H^*)$，$\mathbf{V}_2 \equiv \mathbf{V}_2(H')$，$\mathbf{V} = \mathbf{V}_2\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_2(H')\mathbf{V}_1(H^*) \equiv \mathbf{V}(H, H')$ と書くことにしよう．そうすると，回転 $\mathbf{D}$ により，

$$\mathbf{D}: \quad \mathbf{V}_1(H^*)\mathbf{V}_2(H') \to \mathbf{V}_2(H^*)\mathbf{V}_1(H') \to \mathbf{V}_1(H')\mathbf{V}_2(H^*), \tag{14}$$

$$\mathbf{V}(H, H') \to \mathbf{V}(H'^*, H^*) \tag{15}$$

となる．もともと，分配関数は $\cdots \mathbf{V}_2\mathbf{V}_1\mathbf{V}_2\mathbf{V}_1\mathbf{V}_2\mathbf{V}_1 \cdots$ という行列の積の跡 (trace) であるが，縦方向のスピン列が十分長い場合，あるいは周期的強化条件のもとでは，$\cdots \mathbf{V}_1\mathbf{V}_2\mathbf{V}_1\mathbf{V}_2\mathbf{V}_1\mathbf{V}_2 \cdots$ の跡と考えてもよい．したがって，その場合には $\mathbf{V}_2\mathbf{V}_1$ と $\mathbf{V}_1\mathbf{V}_2$ の固有値は等しい．以上のことを考えると，この双対変換は回転 $\mathbf{D}$ により，$H' \to H^*$（これは $H'^* \to H$ と同じ）となることに等しい．すなわち，式 (14) の第 3 式への変換になる．数式の上では，式 (1) と (2) の H' と H^* の交換である．Kramers と Wannier のモデルでは $H' = H$ であったので，相互作用の係数の H^* と H の交換を意味する．

相転移は秩序状態の有無で判断できる．いまの場合，秩序状態は異方性とみなしてもよい．H と H' は違っていても，回転による差がないということは異方性がないということを意味する．それは，$H' = H^*$ あるいは $H'^* = H$ という条件に一致する．この条件から転移温度を計算することができる．H^* の定義から，$\sinh H \sinh H^* = 1$ であるから，転移点の条件は

$$\sinh H \sinh H' = 1 \tag{16}$$

と表すこともできる．

* * * * *

Procedure for Diagonalization V（V 対角化の手順）

$\mathbf{V}_1$ は 2 次の行列の直積で表される．したがって，$\mathbf{V}_1$ のみなら，「その 3」[4] の式 (O-25) または式 (34) のように，簡単な行列の直積で表すことができるようになるので，2^n 次の行列とは言え，固有値問題は n 個の 2 次の行列の固有値問題にすることができる．しかし，$\mathbf{V}_2$ については，$\mathbf{V}_1$ のような簡単な 2 次の行列の直積にはならない．

$\mathbf{V}_2$ は式 (2) から明らかなように，指数部の $\mathbf{P}_{r+1}\mathbf{Q}_r$ 同士は反可換であるので，前の因子は $\mathbf{V}_1$ のようのように 2 次の行列の直積にすることができる．$\mathbf{P}_1\mathbf{Q}_n\mathbf{U}$ についても，自分自身と反可換の関係にあるので，やはり，2 次の行列の直積となり，結局，$\mathbf{V}_2$ も 2 次行列の直積で表される．この部分の意味は，$\mathbf{V}_1$ の固有値が求められれば，$\mathbf{V}_2$ は $\mathbf{V}_1$ から変換して得られるので，そうした変換により固有値を求める手立てが存在するということである．

まず，$\mathbf{V}_1$ に着目すると，$\mathbf{V}_1$ の r 番目の直積成分が $\mathbf{P}_r\mathbf{Q}_r = \mathrm{i}\mathbf{C}_r$ となり，それ以外は単位行列であるということがわかる．この場合には，論文の式 (O-25) または「その 3」の式 (34) のような指数関数の展開とその因

数分解が可能である．しかし，$\mathbf{V}_2$ の $\mathbf{P}_{r+1}\mathbf{Q}_r$ のように，指数関数展開する直積成分が 2 箇所ある場合は,「その 3」[4] の式 (34) のような指数関数の展開とその因数分解ができない[1]．$\mathbf{V}_1$ の形なら，全体を構成する個々の直積成分である 2 次行列の固有値を求めれば全体の固有値が求まる．つまり，n 個の永年方程式，つまり n 個の 2 次方程式を解けば良いということになるが，生憎，$\mathbf{V}_2$ がそういう形にはなっていないのである．

$\mathbf{V}_2$ がそのままなら，その固有値を求めるのは困難である．しかし，式 (3)，(4) を用いた回転を施すと，$\mathbf{V}_2$ は $\mathbf{V}_1$ に変換されることが分かっている．「その 2」に示した定理により，この回転に対応する行列 $\mathbf{S}$ が 2^n 次元空間に存在して，$\mathbf{V}_2 = \mathbf{S}\mathbf{V}_1\mathbf{S}^{-1}$ とすることができる．したがって，$\mathbf{V} = \mathbf{V}_2\mathbf{V}_1 = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{V}_1\mathbf{S}\mathbf{V}_1$ とすることができるが，$\mathrm{Tr}\,(\mathbf{S}^{-1}\mathbf{V}_1\mathbf{S}\mathbf{V}_1) = \mathrm{Tr}\,(\mathbf{V}_1\mathbf{S}^{-1}\mathbf{S}\mathbf{V}_1) = \mathrm{Tr}\,(\mathbf{V}_1^2)$ となるので，後は，$\mathbf{V}_1^2$ の固有値を求めることだけで，これは上に述べた $\mathbf{V}_1$ の固有値問題と同じである．すなわち，n 個の 2 次方程式を解いて 2^n 個の固有値を求める問題に帰着する．

しかし，論文で述べてあるように，もっと簡単に $\mathbf{V} = \mathbf{V}_2\mathbf{V}_1$ の固有値を求める方法がある．式 (1) と式 (2) を見ると，$\mathbf{V}_1$ と $\mathbf{V}_2$ も $2n$ 空間における $\mathbf{\Gamma}_k$ の回転を表していることがわかる．すなわち，$\mathbf{V}_1$ と $\mathbf{V}_2$ も $\exp(\mathrm{i}\frac{\theta}{2}\mathbf{\Gamma}_k\mathbf{\Gamma}_l)$ の積の形をしているから θ の回転になることがわかる．$\mathbf{V}_2$ の最後の因子が $\exp(\mathrm{i}\theta\mathbf{P}_1\mathbf{Q}_n\mathbf{U})$ という形をしているが，$\mathbf{Q}_n\mathbf{U} = \mathrm{i}\mathbf{P}_n$ であることに注意すれば，これも $\exp(\mathrm{i}\frac{\theta}{2}\mathbf{\Gamma}_k\mathbf{\Gamma}_l)$ の形をしていることがわかる．このような $\mathbf{V}_1$ と $\mathbf{V}_2$ に相当する回転を $\mathbf{R}_1$ および $\mathbf{R}_2$ としよう．そうすると,「その 3」[4] の式 (41) と式 (42) の下の部分で述べたように，$\mathbf{V} = \mathbf{V}_2\mathbf{V}_1$ の固有値は，$2n$ 次行列の $\mathbf{R}_2\mathbf{R}_1$ の固有値を求めれば得られることが分かっている．つまり，$\mathbf{V} = \mathbf{V}_2\mathbf{V}_1$ の固有値問題は $\mathbf{R}_2\mathbf{R}_1$ の固有値問題に帰着するのである．

$\mathbf{R}_2\mathbf{R}_1$ の固有値に関しては，$\mathbf{V}_1$ と $\mathbf{V}_2$ の関係がそのまま $\mathbf{R}_1$ と $\mathbf{R}_2$ の関係にも反映するので，$\mathbf{V}_2 = \mathbf{S}\mathbf{V}_1\mathbf{S}^{-1}$ という関係があること（$\mathbf{R}_2$ が $\mathbf{R}_1$ から回転によって得られるということ）から，定理により，$\mathbf{R}_2$ は $\mathbf{R}_1$ から導かれる．すなわち，ある直交行列を $\mathbf{R}_1$ に掛けることによって導かれる．$\mathbf{R}_1$ は $\mathbf{g}$ による変換（「その 2」の式 (16) から式 (18)）で対角化できるので，$\mathbf{R}_2\mathbf{R}_1$ の固有値を求めることは比較的簡単にできるということがわかる．

対角化のステップ 1

式 (1) と「その 3」の式 (37)，式 (39) を比較すると，$\mathbf{V}_1$ は，

$$\frac{1}{2}\theta_r = -\mathrm{i}H^*, \qquad (1 \le r \le n) \tag{17}$$

で表される角 θ_r の回転を表す行列表現であることを示す．

[1] なぜなら,「その 3」の式 (34) は，論文の式 (O-24) の変形と同じく，n 個の 2 次行列の直積の展開式を計算しており，それが成り立つ前提として，

$$\mathbf{A}\otimes\mathbf{B}\otimes\mathbf{D} + \mathbf{A}\otimes\mathbf{C}\otimes\mathbf{D} = \mathbf{A}\otimes(\mathbf{B}+\mathbf{C})\otimes\mathbf{D}$$

が成り立っていないといけないからである．つまり，以下の式変形ではこの前提が成り立つので，$\mathbf{P}_r\mathbf{Q}_r = \mathrm{i}\mathbf{C}_r$ であることに注意すると，

$$\begin{aligned}\exp(\alpha\mathbf{P}_r\mathbf{Q}_r) &= \mathbf{1} + \alpha\mathbf{P}_r\mathbf{Q}_r + \frac{1}{2!}(\alpha\mathbf{P}_r\mathbf{Q}_r)^2 + \frac{1}{3!}(\alpha\mathbf{P}_r\mathbf{Q}_r)^3 + \cdots \\ &= \mathbf{1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{1} \\ &+ \mathbf{1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{1}\otimes\mathrm{i}\alpha\mathbf{C}\otimes\mathbf{1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{1} \\ &+ \mathbf{1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{1}\otimes\frac{1}{2!}(\mathrm{i}\alpha\mathbf{C})^2\otimes\mathbf{1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{1} \\ &+ \mathbf{1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{1}\otimes\frac{1}{3!}(\mathrm{i}\alpha\mathbf{C})^3\otimes\mathbf{1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{1} \\ &+ \cdots \\ &= \mathbf{1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{1}\otimes\left[\mathbf{1} + \mathrm{i}\alpha\mathbf{C} + \frac{1}{2!}(\mathrm{i}\alpha\mathbf{C})^2 + \frac{1}{3!}(\mathrm{i}\alpha\mathbf{C})^3 + \cdots\right]\otimes\mathbf{1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{1}\end{aligned}$$

と変形することができるのである．もし，直積成分で異なる部分が 2 個以上あればこのような変形はできない．式 (2) を見ると，直積成分の r 番目と $r+1$ 番目に指数関数の展開部分があるので，式 (1) の場合と異なり，上のような因数分解はできないのである．

一方，$\mathbf{V}_2$ については，式 (2) からわかるように，最後の因子を除けば，

$$\exp(\mathrm{i}H'\mathbf{P}_{r+1}\mathbf{Q}_r) \tag{18}$$

という形をしており，これは平面上の回転である．$r = n$ の場合の周期的境界条件に相当する因子 $\exp(-\mathrm{i}H'\mathbf{P}_1\mathbf{Q}_n\mathbf{U})$ の処理をする前に，指数部に含まれる $\mathbf{U} = \mathbf{C}_1\mathbf{C}_2\cdots\mathbf{C}_n$ を変形したい．それに関しては，

$$(\mathbf{1} + \mathbf{U})\mathbf{U} = \mathbf{U} + \mathbf{U}^2 = \mathbf{U} + \mathbf{1} \tag{19}$$

$$(\mathbf{1} - \mathbf{U})\mathbf{U} = \mathbf{U} - \mathbf{U}^2 = \mathbf{U} - \mathbf{1} \tag{20}$$

であるから，次のような関係式が成り立つことに注意しよう．

$$\begin{aligned}(\mathbf{1} + \mathbf{U}) \cdot \mathrm{i}\mathbf{U} \cdot \mathbf{P}_1\mathbf{Q}_n &= (\mathbf{1} + \mathbf{U})\mathrm{i}\mathbf{P}_1\mathbf{Q}_n,\\ (\mathbf{1} - \mathbf{U}) \cdot \mathrm{i}\mathbf{U} \cdot \mathbf{P}_1\mathbf{Q}_n &= -(\mathbf{1} - \mathbf{U})\mathrm{i}\mathbf{P}_1\mathbf{Q}_n,\end{aligned} \tag{O-34}$$

次に，$\mathbf{U} = \mathbf{C}_1\mathbf{C}_2\cdots\mathbf{C}_n$ であるから，$\mathbf{P}_r$，$\mathbf{Q}_r$ とは反可換である．したがって，$\mathbf{P}_r\mathbf{Q}_s$ とは可換である．これに注意すると，次の変形が可能になる．$\mathbf{P}_1\mathbf{Q}_n\mathbf{U} = \mathbf{U}\mathbf{P}_1\mathbf{Q}_n$，$(\mathbf{U}\mathbf{P}_1\mathbf{Q}_n)^2 = -\mathbf{1}$，かつ，

$$\exp(-\mathrm{i}H'\mathbf{U}\mathbf{P}_1\mathbf{Q}_n) = \cos(-\mathrm{i}H')\mathbf{1} + \sin(-\mathrm{i}H')\mathbf{U}\mathbf{P}_1\mathbf{Q}_n \tag{21}$$

であるから，

$$\begin{aligned}
&(\mathbf{1} + \mathbf{U}) \prod_{r=1}^{n} \exp(-\mathrm{i}H^*\mathbf{P}_r\mathbf{Q}_r) \prod_{r=1}^{n-1} \exp(\mathrm{i}H'\mathbf{P}_{r+1}\mathbf{Q}_r) \exp(-\mathrm{i}H'\mathbf{U}\mathbf{P}_1\mathbf{Q}_n)\\
&= \prod_{r=1}^{n} \exp(-\mathrm{i}H^*\mathbf{P}_r\mathbf{Q}_r)(\mathbf{1} + \mathbf{U}) \prod_{r=1}^{n-1} \exp(\mathrm{i}H'\mathbf{P}_{r+1}\mathbf{Q}_r) \exp(-\mathrm{i}H'\mathbf{U}\mathbf{P}_1\mathbf{Q}_n)\\
&= \prod_{r=1}^{n} \exp(-\mathrm{i}H^*\mathbf{P}_r\mathbf{Q}_r) \prod_{r=1}^{n-1} \exp(\mathrm{i}H'\mathbf{P}_{r+1}\mathbf{Q}_r)(\mathbf{1} + \mathbf{U}) \exp(-\mathrm{i}H'\mathbf{U}\mathbf{P}_1\mathbf{Q}_n)\\
&= \prod_{r=1}^{n} \exp(-\mathrm{i}H^*\mathbf{P}_r\mathbf{Q}_r) \prod_{r=1}^{n-1} \exp(\mathrm{i}H'\mathbf{P}_{r+1}\mathbf{Q}_r)\{\cos(-\mathrm{i}H')(\mathbf{1} + \mathbf{U}) + \sin(-\mathrm{i}H')(\mathbf{1} + \mathbf{U})\mathbf{U}\mathbf{P}_1\mathbf{Q}_n\}\\
&= \prod_{r=1}^{n} \exp(-\mathrm{i}H^*\mathbf{P}_r\mathbf{Q}_r) \prod_{r=1}^{n-1} \exp(\mathrm{i}H'\mathbf{P}_{r+1}\mathbf{Q}_r)(\mathbf{1} + \mathbf{U})\{\cos(-\mathrm{i}H')\mathbf{1} + \sin(-\mathrm{i}H')\mathbf{P}_1\mathbf{Q}_n\}\\
&= \prod_{r=1}^{n} \exp(-\mathrm{i}H^*\mathbf{P}_r\mathbf{Q}_r) \prod_{r=1}^{n-1} \exp(\mathrm{i}H'\mathbf{P}_{r+1}\mathbf{Q}_r)(\mathbf{1} + \mathbf{U}) \exp(-\mathrm{i}H'\mathbf{P}_1\mathbf{Q}_n)\\
&= (\mathbf{1} + \mathbf{U}) \prod_{r=1}^{n} \exp(-\mathrm{i}H^*\mathbf{P}_r\mathbf{Q}_r) \prod_{r=1}^{n-1} \exp(\mathrm{i}H'\mathbf{P}_{r+1}\mathbf{Q}_r) \exp(-\mathrm{i}H'\mathbf{P}_1\mathbf{Q}_n)
\end{aligned} \tag{22}$$

と変形できる．$\mathbf{1}-\mathbf{U}$ についても同様に変形できるから，

$$
\begin{aligned}
&(\mathbf{1}-\mathbf{U})\prod_{r=1}^{n}\exp(-\mathrm{i}H^{*}\mathbf{P}_r\mathbf{Q}_r)\prod_{r=1}^{n-1}\exp(\mathrm{i}H'\mathbf{P}_{r+1}\mathbf{Q}_r)\exp(-\mathrm{i}H'\mathbf{U}\mathbf{P}_1\mathbf{Q}_n) \\
&=\prod_{r=1}^{n}\exp(-\mathrm{i}H^{*}\mathbf{P}_r\mathbf{Q}_r)\prod_{r=1}^{n-1}\exp(\mathrm{i}H'\mathbf{P}_{r+1}\mathbf{Q}_r)(\mathbf{1}-\mathbf{U})\{\cos(-\mathrm{i}H')\mathbf{1}+\sin(-\mathrm{i}H')\mathbf{U}\mathbf{P}_1\mathbf{Q}_n\} \\
&=\prod_{r=1}^{n}\exp(-\mathrm{i}H^{*}\mathbf{P}_r\mathbf{Q}_r)\prod_{r=1}^{n-1}\exp(\mathrm{i}H'\mathbf{P}_{r+1}\mathbf{Q}_r)\{\cos(-\mathrm{i}H')(\mathbf{1}-\mathbf{U})+\sin(\mathrm{i}H')(\mathbf{1}-\mathbf{U})\mathbf{U}\mathbf{P}_1\mathbf{Q}_n\} \\
&=\prod_{r=1}^{n}\exp(-\mathrm{i}H^{*}\mathbf{P}_r\mathbf{Q}_r)\prod_{r=1}^{n-1}\exp(\mathrm{i}H'\mathbf{P}_{r+1}\mathbf{Q}_r)(\mathbf{1}-\mathbf{U})\exp(\mathrm{i}H'\mathbf{P}_1\mathbf{Q}_n) \\
&=(\mathbf{1}-\mathbf{U})\prod_{r=1}^{n}\exp(-\mathrm{i}H^{*}\mathbf{P}_r\mathbf{Q}_r)\prod_{r=1}^{n-1}\exp(\mathrm{i}H'\mathbf{P}_{r+1}\mathbf{Q}_r)\exp(\mathrm{i}H'\mathbf{P}_1\mathbf{Q}_n) \\
&=(\mathbf{1}-\mathbf{U})\prod_{r=1}^{n}\exp(-\mathrm{i}H^{*}\mathbf{P}_r\mathbf{Q}_r)\prod_{r=1}^{n}\exp(\mathrm{i}H'\mathbf{P}_{r+1}\mathbf{Q}_r) \qquad (23)
\end{aligned}
$$

となる．式 (22)，(23) から，

$$
\begin{aligned}
\mathbf{V}&=\frac{1}{2}(\mathbf{1}+\mathbf{U})\mathbf{V}+\frac{1}{2}(\mathbf{1}-\mathbf{U})\mathbf{V} \\
&=\frac{1}{2}(\mathbf{1}+\mathbf{U})\prod_{r=1}^{n}\exp(-\mathrm{i}H^{*}\mathbf{P}_r\mathbf{Q}_r)\prod_{r=1}^{n-1}\exp(\mathrm{i}H'\mathbf{P}_{r+1}\mathbf{Q}_r)\exp(-\mathrm{i}H'\mathbf{P}_1\mathbf{Q}_n) \\
&+\frac{1}{2}(\mathbf{1}-\mathbf{U})\prod_{r=1}^{n}\exp(-\mathrm{i}H^{*}\mathbf{P}_r\mathbf{Q}_r)\prod_{r=1}^{n}\exp(\mathrm{i}H'\mathbf{P}_{r+1}\mathbf{Q}_r) \\
&=\frac{1}{2}(\mathbf{1}+\mathbf{U})\mathbf{V}^{+}+\frac{1}{2}(\mathbf{1}-\mathbf{U})\mathbf{V}^{-} \qquad \text{(O-35)}
\end{aligned}
$$

とすることができる．ただし，

$$\mathbf{V}^{+}=\prod_{r=1}^{n}\exp(-\mathrm{i}H^{*}\mathbf{P}_r\mathbf{Q}_r)\prod_{r=1}^{n-1}\exp(\mathrm{i}H'\mathbf{P}_{r+1}\mathbf{Q}_r)\exp(-\mathrm{i}H'\mathbf{P}_1\mathbf{Q}_n) \qquad (24)$$

$$\mathbf{V}^{-}=\prod_{r=1}^{n}\exp(-\mathrm{i}H^{*}\mathbf{P}_r\mathbf{Q}_r)\prod_{r=1}^{n}\exp(\mathrm{i}H'\mathbf{P}_{r+1}\mathbf{Q}_r) \qquad (25)$$

である．つまり，$\mathbf{1}\pm\mathbf{U}$ をかけることによって，$\exp(-\mathrm{i}H'\mathbf{U}\mathbf{P}_1\mathbf{Q}_n)$ が $\exp(\mp\mathrm{i}H'\mathbf{P}_1\mathbf{Q}_n)$ に変わるということである.（ここまでの式の指数部の符号が論文の式とは違っていることに注意しよう.）こうして定義された $\mathbf{V}^{+}$ と $\mathbf{V}^{-}$ はその形から明らかに $2n$ 空間の回転を表す演算子である．したがって，これにより 2^n 空間におけるスピノールによって表現した行列 $\mathbf{V}^{+}$ と $\mathbf{V}^{-}$ を $2n$ 次元空間の回転として直接的に表すことが可能となったことになる．

対角化のステップ 2

Selection of the Eigenvalues in the Two Subspaces （2 つの部分空間における固有値の選択）

$\mathbf{V}^{+}$ に対応する $2n$ 空間の回転を $\mathbf{R}^{+}$ とし，$\mathbf{V}^{-}$ に相当する $2n$ 空間の回転を $\mathbf{R}^{-}$ としよう．すなわち，

$$\mathbf{V}^{+}=\mathbf{S}(\mathbf{R}^{+}), \qquad (26)$$

$$\mathbf{V}^{-}=\mathbf{S}(\mathbf{R}^{-}) \qquad (27)$$

と表す．この新しい行列は，2^n 次元空間を 2 つの部分空間に分けて，$\mathbf{V}$ のそれぞれの空間への射影を $\mathbf{V}^+$ および $\mathbf{V}^-$ と表したということがこの後でわかる．ここではそういうふうに理解しておこう．

いまの $\mathbf{V}$ や $(\mathbf{1}\pm\mathbf{U})\mathbf{V}$ のままの表現ではまだ対角化されていないので固有値を求めるところまで至っていない．そこで，2^n 次元空間の座標（すなわち基底）を今までのスピノールからその線形結合による新しい座標（基底）に変更することを考える．つまり，相似変換する．その変換行列を「その 2」[1] の式 (16) の $\mathbf{g}=\mathbf{g}^{-1}$ を用いることにする．

$$\mathbf{g}=2^{-n/2}(\mathbf{C}+\mathbf{s})\otimes(\mathbf{C}+\mathbf{s})\otimes\cdots\otimes(\mathbf{C}+\mathbf{s}) \tag{再 O-16}$$

前に述べたようにこの行列は相似変換により作用される演算子の中の $\mathbf{C}$ と $\mathbf{s}$ を交換するので，次のような変換ができる．$\mathbf{B}$，$\mathbf{A}$，$\mathbf{U}$ をこのような変換を施し，新しい座標で表現した行列を ${}^\dagger\mathbf{B}$，${}^\dagger\mathbf{A}$，${}^\dagger\mathbf{U}$ とすると，

$${}^\dagger\mathbf{B}=\mathbf{gBg}=\mathbf{g}(\sum_{r=1}^{n}\mathbf{C}_r)\mathbf{g}=\sum_{r=1}^{n}\mathbf{s}_r \tag{28}$$

$${}^\dagger\mathbf{A}=\mathbf{gAg}=\mathbf{g}(\sum_{r=1}^{n}\mathbf{s}_r\mathbf{s}_{r+1})\mathbf{g}=\sum_{r=1}^{n}\mathbf{C}_r\mathbf{C}_{r+1} \tag{29}$$

$${}^\dagger\mathbf{U}=\mathbf{gUg}=\mathbf{g}(\mathbf{C}_1\mathbf{C}_2\cdots\mathbf{C}_n)\mathbf{g}=\mathbf{s}_1\mathbf{s}_2\cdots\mathbf{s}_n \tag{30}$$

となる．式 (30) より，${}^\dagger\mathbf{U}$ は対角行列であることがわかる．その対角要素は直積の作り方から，半数が 1 で残りの半数が -1 である．したがって，対角要素が 1 である座標のみで構成される 2^{n-1} 次元の部分空間と対角要素が -1 に対応する残りの 2^{n-1} 次元の部分空間に分けることができる．

$\mathbf{s}_k$ と $\mathbf{s}_l$ は可換であるから ${}^\dagger\mathbf{U}$ と ${}^\dagger\mathbf{B}$ は可換である．$\mathbf{C}_r$ と ${}^\dagger\mathbf{U}$ は非可換であるから，$\mathbf{C}_r\mathbf{C}_{r+1}$ と ${}^\dagger\mathbf{U}$ は可換である．したがって，${}^\dagger\mathbf{U}$ は ${}^\dagger\mathbf{A}$ と可換である．これから，${}^\dagger\mathbf{U}$ は ${}^\dagger\mathbf{A}$ および ${}^\dagger\mathbf{B}$ と可換である．以上のことから，${}^\dagger\mathbf{U}$ と ${}^\dagger\mathbf{V}={}^\dagger\mathbf{V}_2\,{}^\dagger\mathbf{V}_1=\exp(H^*\,{}^\dagger\mathbf{B})\exp(H'\,{}^\dagger\mathbf{A})$ は可換である.（${}^\dagger\mathbf{U}$ は $\boldsymbol{\Gamma}_k$ の偶数べきと可換である．r が偶数の時には $\boldsymbol{\Gamma}_{2r-1}$ と反可換，$\boldsymbol{\Gamma}_{2r}$ とは可換，r が奇数の時には $\boldsymbol{\Gamma}_{2r}$ と可換，$\boldsymbol{\Gamma}_{2r}$ とは反可換である.）

${}^\dagger\mathbf{U}$ の対角要素の 1 と -1 はそれぞれ半分ずつであるので，${}^\dagger\mathbf{U}$ の 1 になる対角要素を上半分におき，-1 になる座標を下半分におきたい．そのためには，行列表現の基底を変換すればよい.「その 1」の式 (14) で表されるスピノールがこの場合の基底になるが，通常は

$$\begin{gathered}
\tbinom{1}{0}\otimes\cdots\otimes\tbinom{1}{0}\otimes\tbinom{1}{0}\otimes\tbinom{1}{0}\\
\tbinom{1}{0}\otimes\cdots\otimes\tbinom{1}{0}\otimes\tbinom{1}{0}\otimes\tbinom{0}{1}\\
\tbinom{1}{0}\otimes\cdots\otimes\tbinom{1}{0}\otimes\tbinom{0}{1}\otimes\tbinom{1}{0}\\
\tbinom{1}{0}\otimes\cdots\otimes\tbinom{1}{0}\otimes\tbinom{0}{1}\otimes\tbinom{0}{1}\\
\vdots
\end{gathered}$$

のようになるので，1 と -1 は対角項は 1，-1，-1，1，$\cdots$ と上から続く．これを，上半分が 1 になるようにするには，n 個の $\boldsymbol{\mu}_j$ のうち，$\tbinom{0}{1}$ が偶数個のものを上半分に置いて，残りの $\tbinom{0}{1}$ が奇数個のものを下半分に置けば対角要素を上半分が 1，下半分が -1 であるようにすることができる．基底をこのような順番におくと，${}^\dagger\mathbf{U}$ は次の形をしている．

$${}^\dagger\mathbf{U}=\left(\begin{array}{c|c}
\begin{matrix}1&&\\&\ddots&\\&&1\end{matrix} & 0\\ \hline
0 & \begin{matrix}-1&&\\&\ddots&\\&&-1\end{matrix}
\end{array}\right) \tag{31}$$

この ${}^\dagger\mathbf{U}$ と可換な行列を $\mathbf{X}$ とすると，$\mathbf{X}$ は次の形をしていなければならない[2].

$$\mathbf{X} = \left(\begin{array}{c|c} & 0 \\ \hline 0 & \end{array}\right) \tag{32}$$

したがって，${}^\dagger\mathbf{V}$ も $\mathbf{X}$ と同じ形をしていなければならない.

もし，$\mathbf{Y}$ が ${}^\dagger\mathbf{U}$ と反可換であれば，上の場合に脚注で述べたのと同じ理由で，今度は $\mathbf{Y}$ は次の形をしていなければならない.

$$\mathbf{Y} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \\ \hline & 0 \end{array}\right) \tag{33}$$

また，式 (31) より，

$$\frac{1}{2}(\mathbf{1}+{}^\dagger\mathbf{U}) = \left(\begin{array}{c|c} \begin{smallmatrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{smallmatrix} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right), \qquad \frac{1}{2}(\mathbf{1}-{}^\dagger\mathbf{U}) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & \begin{smallmatrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{smallmatrix} \end{array}\right) \tag{34}$$

となる．これから以下の式が成り立つ.

$$\frac{1}{2}(\mathbf{1}+{}^\dagger\mathbf{U}) + \frac{1}{2}(\mathbf{1}-{}^\dagger\mathbf{U}) = \mathbf{1} \tag{35}$$

$$\frac{1}{2}(\mathbf{1}+{}^\dagger\mathbf{U}) \cdot \frac{1}{2}(\mathbf{1}-{}^\dagger\mathbf{U}) = \mathbf{0} \tag{36}$$

$$[\frac{1}{2}(\mathbf{1}\pm{}^\dagger\mathbf{U})]^2 = \frac{1}{2}(\mathbf{1}\pm{}^\dagger\mathbf{U}) \tag{37}$$

以上の関係式と，${}^\dagger\mathbf{U}$ と $\dagger\mathbf{V}$ が可換であることに注意すると，

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(\mathbf{1}+{}^\dagger\mathbf{U}){}^\dagger\mathbf{V} &= \frac{1}{4}(\mathbf{1}+{}^\dagger\mathbf{U})^2 \cdot {}^\dagger\mathbf{V} \cdot [\frac{1}{2}(\mathbf{1}+{}^\dagger\mathbf{U}) + \frac{1}{2}(\mathbf{1}-{}^\dagger\mathbf{U})] \\
&= \frac{1}{2}(\mathbf{1}+{}^\dagger\mathbf{U}) \cdot {}^\dagger\mathbf{V} \cdot [\frac{1}{2}(\mathbf{1}+{}^\dagger\mathbf{U})][\frac{1}{2}(\mathbf{1}+{}^\dagger\mathbf{U}) + \frac{1}{2}(\mathbf{1}-{}^\dagger\mathbf{U})] \\
&= \frac{1}{2}(\mathbf{1}+{}^\dagger\mathbf{U}) \cdot {}^\dagger\mathbf{V} \cdot [\frac{1}{4}(\mathbf{1}+{}^\dagger\mathbf{U})^2 + \frac{1}{4}(\mathbf{1}+{}^\dagger\mathbf{U})(\mathbf{1}-{}^\dagger\mathbf{U})] \\
&= \frac{1}{2}(\mathbf{1}+{}^\dagger\mathbf{U}) \cdot {}^\dagger\mathbf{V} \cdot \frac{1}{2}(\mathbf{1}+{}^\dagger\mathbf{U}) \\
&= \frac{1}{2}(\mathbf{1}+{}^\dagger\mathbf{U}) \cdot {}^\dagger\mathbf{V}^+ \cdot \frac{1}{2}(\mathbf{1}+{}^\dagger\mathbf{U})
\end{aligned} \tag{38}$$

となる．最後の式の変形では，式 (O-35) に変換 $\mathbf{g}$ を施して左から $\frac{1}{2}(\mathbf{1}+{}^\dagger\mathbf{U})$ を掛けると

$$\frac{1}{2}(\mathbf{1}+{}^\dagger\mathbf{U}){}^\dagger\mathbf{V} = \frac{1}{4}(\mathbf{1}+{}^\dagger\mathbf{U})^2 \cdot {}^\dagger\mathbf{V}^+ + \frac{1}{4}(\mathbf{1}+{}^\dagger\mathbf{U})(\mathbf{1}-{}^\dagger\mathbf{U}) \cdot {}^\dagger\mathbf{V}^- = \frac{1}{2}(\mathbf{1}+{}^\dagger\mathbf{U}) \cdot {}^\dagger\mathbf{V}^+ \tag{39}$$

となる関係を用いた．式 (38) では，この式の右辺を見ると，$\frac{1}{2}(\mathbf{1}+{}^\dagger\mathbf{U})$ を左から掛けて ${}^\dagger\mathbf{V}^+$ の上半分のみ非 0 になり，$\frac{1}{2}(\mathbf{1}+{}^\dagger\mathbf{U})$ を右上から掛けて ${}^\dagger\mathbf{V}^+$ の左半分のみ非 0 となるから，非 0 ブロックは左上 $\frac{1}{4}$ のみになる．つまり，この式の意味は $\frac{1}{2}(\mathbf{1}+{}^\dagger\mathbf{U}){}^\dagger\mathbf{V}$ により，${}^\dagger\mathbf{V}^+$ の左上 $\frac{1}{4}$ ブロックのみを取り出すという意味である[3].

同様に，$\frac{1}{2}(\mathbf{1}-{}^\dagger\mathbf{U})$ についても次の式が成り立つ.

$$\frac{1}{2}(\mathbf{1}-{}^\dagger\mathbf{U}){}^\dagger\mathbf{V}^- = \frac{1}{2}(\mathbf{1}-{}^\dagger\mathbf{U}) \cdot^\dagger \mathbf{V}^- \cdot \frac{1}{2}(\mathbf{1}-{}^\dagger\mathbf{U}^-) \tag{40}$$

[2]もし，$\mathbf{X}$ の右上の 0 ブロックの部分に 0 でない要素 a_{ij} があったとしよう．そうすると，${}^\dagger\mathbf{U}\mathbf{X}$ の (i,j) 要素は a_{ij} である．一方，$\mathbf{X}{}^\dagger\mathbf{U}$ の (i,j) 要素は $-a_{ij}$ である．可換であるためには両者は等しくなければならないから $a_{ij}=0$ である．これは最初の仮定と反するので，0 ブロックの部分は全て 0 でなければならない．左下の 0 ブロックに非 0 要素がある場合は符号が反転するが，結果は同じである.

[3]もともと V は ${}^\dagger\mathbf{U}$ は可換であるから，V は式 (32) の $\mathbf{X}$ の形をしているので，式 (38) は $\frac{1}{2}(\mathbf{1}+{}^\dagger\mathbf{U}) \cdot^\dagger \mathbf{V}^+$，または ${}^\dagger\mathbf{V}^+ \cdot \frac{1}{2}(\mathbf{1}+{}^\dagger\mathbf{U})$ でも，${}^\dagger\mathbf{V}^+$ の左上半分を取り出していることがわかる．一般の行列に関しては式 (38) で左上 $\frac{1}{4}$ を取り出すことができる.

この式は，$\frac{1}{2}(\mathbf{1}-{}^\dagger\mathbf{U})$ により，${}^\dagger\mathbf{V}^-$ の右下 $\frac{1}{4}$ ブロックのみを取り出すという意味になる．

上の関係式は，${}^\dagger\mathbf{V}$ と ${}^\dagger\mathbf{U}$ が可換であることを用いているので，${}^\dagger\mathbf{V}$ が式 (32) の形をしていることからも成り立つことがわかる．これを式で表していることになる．

式 (O-35) を $\mathbf{g}$ で相似変換した式の行列は，次のような形をしていることがわかる．

$$
\begin{aligned}
{}^\dagger\mathbf{V} &= \frac{1}{2}(\mathbf{1}+{}^\dagger\mathbf{U}){}^\dagger\mathbf{V}^+ + \frac{1}{2}(\mathbf{1}-{}^\dagger\mathbf{U}){}^\dagger\mathbf{V}^- \\
&= \left(\begin{array}{c|c} & 0 \\ \hline 0 & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 1\ddots 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} & 0 \\ \hline 0 & \end{array}\right)}_{{}^\dagger\mathbf{V}^+} + \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & 1\ddots 1 \end{array}\right) \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} & 0 \\ \hline 0 & \end{array}\right)}_{{}^\dagger\mathbf{V}^-}
\end{aligned}
\tag{41}
$$

これから，$\mathbf{V}$ の固有値，すなわち，${}^\dagger\mathbf{V}$ の固有値は ${}^\dagger\mathbf{V}^+$ の上半分の固有値と ${}^\dagger\mathbf{V}^-$ の下半分の固有値からなることがわかる．つまり，${}^\dagger\mathbf{V}^+$ の上半分の固有値と下半分の固有値を別々に求めても構わないことを意味する．

対角化のステップ 3

結局，式 (41) から，${}^\dagger\mathbf{V}$ の固有値は，$\frac{1}{2}(\mathbf{1}+{}^\dagger\mathbf{U}){}^\dagger\mathbf{V}^+$ の左上 $\frac{1}{4}$ の固有値と，$\frac{1}{2}(\mathbf{1}-{}^\dagger\mathbf{U}){}^\dagger\mathbf{V}^-$ の左下の固有値に一致しており，互いに独立であるので，それぞれの固有値を別々に求めてもよいということがわかる．つまり，前者の行列 $\frac{1}{2}(\mathbf{1}+{}^\dagger\mathbf{U}){}^\dagger\mathbf{V}^+$ を対角化する相似変換の行列と $\frac{1}{2}(\mathbf{1}-{}^\dagger\mathbf{U}){}^\dagger\mathbf{V}^-$ を対角化する相似変換の行列は異なっていても構わない．しかも，この 2 つの行列は，後でわかるように，それぞれ $2n$ 次元空間のある回転の 2^n 次元空間におけるスピノール表現に等しい．そこで，前者の回転を $\mathbf{T}^+$，後者の回転を $\mathbf{T}^-$ としよう．すなわち，$\mathbf{S}(\mathbf{T}^+)$ は $\frac{1}{2}(\mathbf{1}+{}^\dagger\mathbf{U}){}^\dagger\mathbf{V}^+$ を対角化し，$\mathbf{S}(\mathbf{T}^-)$ は $\frac{1}{2}(\mathbf{1}-{}^\dagger\mathbf{U}){}^\dagger\mathbf{V}^-$ を対角化する．式 (O-17)（「その 2」[1]）で示される座標の直交変換は $2n$ 次元空間の回転であって，通常回転 (proper) と，その回転に付随する回映 (improper rotation) が含まれる．後で明らかになるように，$\mathbf{T}^-$ は回映の表現である．

「その 3」の最後の節で，一般の直交群の表現に関して述べたように，基底 $\{\mathbf{\Gamma}_k\}$ を基底ベクトルの系とみなして平面回転が定義できる．また，その行列表現が可能となる．さらに，その基底の 2 次の積 $\mathbf{\Gamma}_k\mathbf{\Gamma}_l$ を新しい基底とする表現も可能であった．特別な場合として，全ての $\mathbf{\Gamma}_k$ の $2n$ 次の積 $\mathbf{U}=\mathrm{i}^n\mathbf{\Gamma}_1\mathbf{\Gamma}_2\cdots\mathbf{\Gamma}_{2n}$ を基底とした場合は，表現は 1 または -1 の 2 つになる．全ての回転はこの基底を用いて表現した場合 1 に属する通常回転の場合と，-1 に属する回映の場合に分けられる．つまり，平面回転は回転か回映のいずれかになるのである．この違いは，例えば，$\mathbf{\Gamma}_1\mathbf{\Gamma}_2\cdots\mathbf{\Gamma}_{2n}$ にそのまま回転 $\mathbf{o}$ を施す場合と，$\mathbf{\Gamma}_k$ と $\mathbf{\Gamma}_l$ を置換してから回転 $\mathbf{o}$ を施す場合に相当する．後者が奇数置換の場合には符号が反転するので，前者と後者は回転後の符号が異なる．これが，回転と回映の表現の符号の違いになる．

${}^\dagger\mathbf{U}$ の固有値は半分が 1 で残り半分が -1 であるが，その違いは基底にしているスピノールに依存する．${}^\dagger\mathbf{U}$ の対角要素の半分を占める 1 を上半分に移すために，$\binom{0}{1}$ を偶数個含む基底スピノールを上半分に移した.（スピノールを列ベクトルの成分とみなした.）しかし，スピノールの $\binom{0}{1}$ と $\binom{1}{0}$ の順番を変えれば ${}^\dagger\mathbf{U}$ の表現が変わるだけで，つまり，対角成分の 1 と -1 の位置が変わるだけで，${}^\dagger\mathbf{U}$ が $-{}^\dagger\mathbf{U}$ に変わるわけではない．${}^\dagger\mathbf{U}$ に変わるためには，${}^\dagger\mathbf{U}$ の直積成分のうちの 1 つの $\mathbf{s}$ が $-\mathbf{s}$ に変わればよい．これは，${}^\dagger\mathbf{\Gamma}_k$ を反転することに相当する．つまり，$2n$ 次元空間における $\mathbf{\Gamma}_k$ の回転操作の中で奇数個の ${}^\dagger\mathbf{\Gamma}_k$ の反転が含まれている回転ならば，${}^\dagger\mathbf{U}$ に作用して $-{}^\dagger\mathbf{U}$ に変えることができる．これは，すなわち回映である．したがって，$\mathbf{T}^+$ を通常の回転と

すれば，$\mathbf{T}^-$ は回映である．そうすると，式 (O-33)（「その 3」[4]）にしたがって，

$$
\begin{array}{ll}
 & \mathbf{T}^+ : {}^\dagger\mathbf{U} \to {}^\dagger\mathbf{U} \\
\text{すなわち，} & \mathbf{S}(\mathbf{T}^+)\,{}^\dagger\mathbf{U}\ \ \mathbf{S}(\mathbf{T}^+)^{-1} = {}^\dagger\mathbf{U} \\
\text{あるいは，} & \mathbf{S}(\mathbf{T}^+)\,{}^\dagger\mathbf{U} = {}^\dagger\mathbf{U}\mathbf{S}(\mathbf{T}^+) \\
 & \mathbf{T}^- : {}^\dagger\mathbf{U} \to -{}^\dagger\mathbf{U} \\
\text{すなわち，} & \mathbf{S}(\mathbf{T}^-)\,{}^\dagger\mathbf{U}\ \ \mathbf{S}(\mathbf{T}^-)^{-1} = -\,{}^\dagger\mathbf{U} \\
\text{あるいは，} & \mathbf{S}(\mathbf{T}^-)\,{}^\dagger\mathbf{U} = -\,{}^\dagger\mathbf{U}\mathbf{S}(\mathbf{T}^-)
\end{array}
\tag{42}
$$

という関係が成り立つ．したがって、$\mathbf{S}(\mathbf{T}^+)$ は式 (32) の $\mathbf{X}$ の形をもち，$\mathbf{S}(\mathbf{T}^-)$ は式 (33) の $\mathbf{Y}$ の形をしていることになる．

このような性質をもつ $\mathbf{T}^+$ と $\mathbf{T}^-$ を用いて，$\frac{1}{2}(\mathbf{1}+{}^\dagger\mathbf{U})\,{}^\dagger\mathbf{V}^+$ と $\frac{1}{2}(\mathbf{1}-{}^\dagger\mathbf{U})\,{}^\dagger\mathbf{V}^-$ を対角化すれば，

$$
\begin{aligned}
\mathbf{S}(\mathbf{T}^+)\{\frac{1}{2}(\mathbf{1}+{}^\dagger\mathbf{U})\,{}^\dagger\mathbf{V}^+\}\mathbf{S}(\mathbf{T}^+)^{-1} &= \frac{1}{2}(\mathbf{1}+{}^\dagger\mathbf{U})\mathbf{S}(\mathbf{T}^+)\,{}^\dagger\mathbf{V}^+\mathbf{S}(\mathbf{T}^+)^{-1} \\
&= \frac{1}{2}(\mathbf{1}+{}^\dagger\mathbf{U})\mathbf{S}[\mathbf{T}^+\,\mathbf{R}^+\,(\mathbf{T}^+)^{-1}] \qquad \text{(O-37-1)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{S}(\mathbf{T}^-)\{\frac{1}{2}(\mathbf{1}-{}^\dagger\mathbf{U})\,{}^\dagger\mathbf{V}^-\}\mathbf{S}(\mathbf{T}^-)^{-1} &= \frac{1}{2}(\mathbf{S}(\mathbf{T}^-)-\mathbf{S}(\mathbf{T}^-){}^\dagger\mathbf{U})\,{}^\dagger\mathbf{V}^-\mathbf{S}(\mathbf{T}^-)^{-1} \\
&= \frac{1}{2}(\mathbf{1}+{}^\dagger\mathbf{U})\mathbf{S}(\mathbf{T}^-)\,{}^\dagger\mathbf{V}^-\mathbf{S}(\mathbf{T}^-)^{-1} \qquad (43) \\
&= \frac{1}{2}(\mathbf{1}+{}^\dagger\mathbf{U})\mathbf{S}[\mathbf{T}^-\,\mathbf{R}^-(\mathbf{T}^-)^{-1}] \qquad \text{(O-37-2)}
\end{aligned}
$$

とすることができる．

式 (O-37-1) の意味するところは次のようになるだろう．$\frac{1}{2}(\mathbf{1}+{}^\dagger\mathbf{U})\,{}^\dagger\mathbf{V}^+$ も ${}^\dagger\mathbf{V}^+$ も，左上のブロックに限れば $\mathbf{S}(\mathbf{T}^+)$ を用いて対角化することができる．これが成り立つためには，$\mathbf{S}(\mathbf{T}^+)$ は $\mathbf{X}$ 形の行列でなければならない．$\mathbf{S}(\mathbf{T}^+)$ の左上のブロックが ${}^\dagger\mathbf{V}^+$ の左上のブロックを対角化する．上半分を取り出したものと等しい，ということである．$\mathbf{S}(\mathbf{T}^+)$ で意味があるのは，左上のブロックだけである．$\mathbf{S}(\mathbf{T}^+)$ の右下のブロックは任意で構わないが，ここでは単位行列にして考えることにしよう．それ以外のブロック，つまり右上と左下のブロックは 0 である．

式 (O-37-2) の意味するところは上の場合と少し異なる．$\mathbf{S}(\mathbf{T}^-)$ を用いて $\frac{1}{2}(\mathbf{1}-{}^\dagger\mathbf{U})\,{}^\dagger\mathbf{V}^-$ の右下ブロックを対角化すると，対角行列は左上ブロックに移動し，下半分は 0 になる．このとき，$\mathbf{S}(\mathbf{T}^-)$ は $\mathbf{Y}$ 形の行列でなければならない．$\mathbf{S}(\mathbf{T}^-)$ の右上ブロックが ${}^\dagger\mathbf{V}^-$ の右下ブロックを対角化していることになる．上の場合と同じように，$\mathbf{S}(\mathbf{T}^-)$ の左下のブロックは任意で構わないが，ここでは単位行列にして考える．

$2n$ 次元空間の回転 $\mathbf{R}^-$ の $\mathbf{\Gamma}_k$ による表現である $2n$ 次行列の固有値が

$$
\exp(\pm\gamma_{2r}), \qquad (1 \le r \le n) \tag{44}
$$

であるとしよう．そうすると，$\mathbf{R}^-$ の 2^n 次元空間のスピノールによる表現 ${}^\dagger\mathbf{V}^-$ は，式 (O-26) から式 (O-29) により，

$$
\mathbf{S}(\mathbf{T}^-)\,{}^\dagger\mathbf{V}^-\mathbf{S}(\mathbf{T}^-)^{-1} = \mathbf{S}(\mathbf{K}) = \prod_{r=1}^{n}\mathbf{S}(\mathbf{K}_r) = \prod_{r=1}^{n}\exp(-\frac{\mathrm{i}}{2}\gamma_{2r}\mathbf{P}_r^*\mathbf{Q}_r^*) \equiv \mathbf{\Lambda}^- \tag{45}
$$

と表される．$\mathbf{\Lambda}^-$ は対角行列である．その固有値は式 (O-29) から，

$$
\exp(\frac{1}{2}(\pm\gamma_2 \pm \gamma_4 \pm \cdots \pm \gamma_{2n}) \tag{46}
$$

である．複号は独立しているから，固有値は合計 2^n 個ある．本来求めるべき固有値は式 (O-37-2) の左辺の対角行列で，これは上半分が 0 であるから，0 でない固有値は式 (46) の 2^n 個の半分である．式 (O-37-2) の左辺は

変形して式 (43) になり，これは式 (45) に左から $\frac{1}{2}(\mathbf{1}+{}^\dagger\mathbf{U})$ を掛けた形であるから，式 (45) の対角要素の上半分がそのまま残り，残りの下半分の対角要素は 0 となる．一方，${}^\dagger\mathbf{V}^-$ の固有値は，式 (45) の形から，$-\mathrm{i}\mathbf{P}_r^*\mathbf{Q}_r^*$ の符号に依存することがわかる．一方，${}^\dagger\mathbf{U}$ も次の式のように $-\mathrm{i}\mathbf{P}_r^*\mathbf{Q}_r^*$ の符号に関係している．

$$
{}^\dagger\mathbf{U} = \mathbf{s}_1\mathbf{s}_2\cdots\mathbf{s}_n = \prod_{r=1}^{n}(-\mathrm{i}\mathbf{P}_r^*\mathbf{Q}_r^*) \tag{47}
$$

したがって，$\frac{1}{2}(\mathbf{1}+{}^\dagger\mathbf{U})$ を掛けて残るのは ${}^\dagger\mathbf{U}=1$ の場合であるから，これから式 (O-37-2) の 0 でない固有値を知ることができる．

まず，${}^\dagger\mathbf{U}=1$ の対角成分が 1 となるのは,

$$
{}^\dagger\mathbf{U}_{ii} = 1 = \prod_{r=1}^{n}(-\mathrm{i}\mathbf{P}_r^*\mathbf{Q}_r^*)_{ii} \tag{48}
$$

が成り立つときである．この式で，$-\mathrm{i}\mathbf{P}_r^*\mathbf{Q}_r^* = \mathbf{s}_r$ であり，その成分はスピノールによる期待値であるから，非対角成分は 0，対角成分は 1 または -1 である．したがって，$\prod_{r=1}^{n}(-\mathrm{i}\mathbf{P}_r^*\mathbf{Q}_r^*)_{ii}$ は 1 か -1 のいずれかである．つまり，これが 1 になるのは，n 個の $(-\mathrm{i}\mathbf{P}_r^*\mathbf{Q}_r^*)_{ii}$ のうち，-1 となる個数が偶数の場合であることがわかる．このことは，${}^\dagger\mathbf{U}_{ii}$ が 1 になることと，式 (45) で $\gamma_r/2$ の係数のうち -1 の個数が偶数の場合である条件は一致することを示す．つまり，$\frac{1}{2}(\mathbf{1}+{}^\dagger\mathbf{U})$ により上半分に残る固有値は，式 (46) の固有値の中で，複号の $-$ の数が偶数の固有値であることがわかる[4]．

同様のことが $\mathbf{R}^+$ のスピノール表現である $\mathbf{V}^+$ についても成り立つ．上の場合と同様に，$\mathbf{R}^+$ の $2n$ 個の固有値を

$$
\exp(\pm\gamma_{2r-1}), \qquad (1 \le r \le n) \tag{49}
$$

であるとしよう．そうすると，$\mathbf{V}^+$ の固有値は式 (O-29) から,

$$
\exp(\frac{1}{2}(\pm\gamma_1 \pm \gamma_3 \pm \cdots \pm \gamma_{2n-1}) \tag{50}
$$

である．式 (O-37-1) の左辺の 0 でない固有値は対角行列の上半分に位置し，式 (50) の固有値の半分である．式 (O-37-1) の右辺は $\{\frac{1}{2}(\mathbf{1}+{}^\dagger\mathbf{U})$ の因子を持つので，$\mathbf{S}(\mathbf{T}^+)\,{}^\dagger\mathbf{V}^+\mathbf{S}(\mathbf{T}^+)^{-1}$ が 0 でない対角成分を持つのは，式 (O-37-2) の場合と同じように，式 (48) が成り立つときである．すなわち，式 (50) の指数部の $-$ の個数が偶数の場合が式 (O-37-1) の左辺の 0 でない固有値になる．

以上をまとめると，${}^\dagger\mathbf{V}$ の固有値，すなわち，$\mathbf{V}$ の固有値は，式 (46) と式 (50) のうち，指数部の項の負号の数が偶数のものが該当する．$\mathrm{i}\gamma_{2r}$ は $\mathbf{R}^-$ の回転角，$\mathrm{i}\gamma_{2r-1}$ は $\mathbf{R}^+$ の回転角である．$\exp(\pm\mathrm{i}\gamma_{2r})$ と $\exp(\pm\mathrm{i}\gamma_{2r-1})$ は $\mathbf{R}^-$ と $\mathbf{R}^+$ を表す $2n$ 次行列の固有値として与えられる．

* * * * *

[4] 負号の数が偶数の場合の固有値の数は 2^{n-1} となる．すなわち,

$$
\sum_{r=0}^{[n/2]}\binom{n}{2r} = \sum_{r=0}^{[n/2]}\binom{n}{2r+1}
$$

である．なぜなら,

$$
(1+x)^n = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}x^r
$$

であるが，$x=-1$ を代入すると,

$$
0 = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + \mathrm{sgn}\left(\left[\frac{n}{2}\right] - \frac{n}{2} + \frac{1}{4}\right)\binom{n}{n}
$$

であるから，上の式が成り立つ．

一般に，正規行列を対角化するユニタリ行列は一意的には決まらない．なぜなら，対角化したときに対角部分に並ぶ固有値の順番によってユニタリ行列は変わるからである．したがって，$\mathbf{R}^-$ と $\mathbf{R}^+$ を対角化したときに，その固有値の順番も一意的には決まらない[5]．そうすると，$\mathbf{R}^+$ の固有値 $\exp(\gamma_k)$ の順番が，そのまま ${}^\dagger\mathbf{V}^+$ の固有値 $\exp(\sum\gamma_k/2)$ の指数部の γ_k の順番になるので，${}^\dagger\mathbf{V}^+$ の対角成分の上半分を $\frac{1}{2}(1+{}^\dagger\mathbf{U})$ で取り出し，下半分から $\frac{1}{2}(1-{}^\dagger\mathbf{U})$ で取り出すときに，$\mathbf{R}^+$ の固有値 $\exp(\gamma_k)$ の順番に関わらずに，確実に同じ固有値のみを取り出すことができるのか，というと必ずしも自明ではない．論文では，この部分の説明が不十分と思われるので，ここでは次のように説明したい．

まず，

$$(\mathbf{T}^+)(\mathbf{R}^+)(\mathbf{T}^+)^{-1} = \mathbf{K} \tag{51}$$

として，$\mathbf{R}^+$ が対角化されて $\mathbf{K}$ になったとしよう．さらに，固有値の並び方は一意的に決まらないので，式 (46) では，対角部の上から，

$$\mathrm{e}^{\gamma_1},\, \mathrm{e}^{-\gamma_1},\, \mathrm{e}^{\gamma_3},\, \mathrm{e}^{-\gamma_3},\, \cdots,\mathrm{e}^{\gamma_{2n-1}},\, \mathrm{e}^{-\gamma_{2n-1}} \tag{52}$$

と並んでいるとしよう．これに対して，${}^\dagger V^+$ の固有値は，

$$\exp\{\frac{1}{2}(\pm\gamma_1 \pm \gamma_3 \cdots \pm \gamma_{2n-1})\} \tag{53}$$

となる．${}^\dagger V^+$ を対角化した行列において，2^n 個の固有値のうち，対角位置の上半分には式 (52) の指数部の負号が偶数個の γ_{2r-1} を選んだものが並び，下半分には負号が偶数個の γ_{2r-1} を選んだものを並べたものである．

ここで，式 (51) のユニタリ行列 $\mathbf{T}^+$ の代わりに固有値 (52) の順番が替わる別のユニタリ行列にしよう．これを $\mathbf{PT}^+$ と表す．このとき，$\mathbf{P}$ は (51) の固有値の順番を替えるユニタリ行列である．つまり，

$$(\mathbf{PT}^+)(\mathbf{R}^+)(\mathbf{PT}^+)^{-1} = \mathbf{K}' \tag{54}$$

とする．$\mathbf{K}'$ は $\mathbf{K}$ と同様の式 (O-29) の形をしていて，$\mathbf{K}$ の固有値の順番を変えた対角行列である．これに対して，$\mathbf{S}[(\mathbf{PT}^+)(\mathbf{R}^+)(\mathbf{PT}^+)^{-1}]$ の対角部分も変化して順番が変わるが，上半分と下半分の組み合わせが入れ替わることは無いだろうか，という問題が起こる．この入れ替えが起こらなければ問題はない．

固有値が互換されるということは，式 (52) で言うと，e^{γ_r} と e^{γ_s} が互換されることになる．これは γ_r と γ_s を交換すると言っても同じことであるので，以下では簡単にこのように言うことにしよう．

一般の置換 $\mathbf{P}$ を考えれば良いのだが，その前に，まず基本的な互換を考えよう．今は，互換（あるいは置換）を考えているので γ_k を 1 つの添字のように扱うことにしよう．したがって，γ_k と $-\gamma_k$ を異なる添字とし

[5]実際，対角行列に対して，次のように対角要素を交換することができる．

$$\begin{pmatrix} 1 &&&&&& \\ & \ddots &&&&& \\ && 0 & \cdots & 1 && \\ && \vdots & \ddots & \vdots && \\ && 1 & \cdots & 0 && \\ &&&&& \ddots & \\ &&&&&& 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a &&&&&& \\ & \ddots &&&&& \\ && p &&&& \\ &&& \ddots &&& \\ &&&& q && \\ &&&&& \ddots & \\ &&&&&& r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 &&&&&& \\ & \ddots &&&&& \\ && 0 & \cdots & 1 && \\ && \vdots & \ddots & \vdots && \\ && 1 & \cdots & 0 && \\ &&&&& \ddots & \\ &&&&&& 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a &&&&&& \\ & \ddots &&&&& \\ && q &&&& \\ &&& \ddots &&& \\ &&&& p && \\ &&&&& \ddots & \\ &&&&&& t \end{pmatrix}$$

て扱う．${}^\dagger V^+$ の固有値では，各 γ_k の前の符号は正か負のいずれかであるから，いずれの固有値においても，各 k について，γ_k と $-\gamma_k$ はいずれか一方が存在し，両方共存在するとか両方共存在しないということはない．

$\mathbf{R}^+$ の固有値の互換により，${}^\dagger V^+$ の固有値の対角上の位置が替わるが，それが上半分，あるいは下半分の中に留まれば全体として ${}^\dagger\mathbf{V}^+$ の固有値に変化はない．このとき，許される互換には，$\gamma_k \leftrightarrow -\gamma_k$ か，あるいは $\gamma_k \leftrightarrow \gamma_l$ と $-\gamma_k \leftrightarrow -\gamma_l$ の同時互換しかない．

なぜなら，$\gamma_k \leftrightarrow \gamma_l$，あるいは $-\gamma_k \leftrightarrow -\gamma_l$ という互換を考えてみよう．そうすると，式 (52) では $\gamma_k \leftrightarrow \gamma_l$ としても問題はないが，式 (54) の ${}^\dagger V^+$ の固有値では，互換前に γ_k と $-\gamma_l$ の両方を含む固有値が必ずあるが，それが互換により γ_l と $-\gamma_l$ を共に含むようになり，これはあり得ない．同様に，$\gamma_k \leftrightarrow -\gamma_l$ のような互換もあり得ない．(ここで，γ_l を含むということは $-\gamma_l$ が含まれるということではない．互換，置換を議論するときには，γ_l と $-\gamma_l$ は別の項と考えている.）したがって，互換で許されるのは，$\gamma_k \leftrightarrow -\gamma_k$ のみであることがわかる．

上で述べた $\gamma_k \leftrightarrow \gamma_l$ という互換は許されないが，それは ${}^\dagger V^+$ の固有値で γ_k を含み，γ_l を含まない（つまり $-\gamma_l$ を含む）場合に互換により γ_l と $-\gamma_l$ を両方含むことになるからであった．したがって，$\gamma_k \leftrightarrow \gamma_l$ という互換と同時にもう一つの互換 $-\gamma_k \leftrightarrow -\gamma_l$ も行う操作なら上のような不都合は生じない．実際，これは次のようにして確認することができる．${}^\dagger V^+$ の固有値で，γ_k と γ_l の両方，または $-\gamma_k$ と $-\gamma_l$ の両方を含む固有値の集合を考えると，2 つの互換を同時に施すことで，添字の k と l が交換するのみで，集合全体としては変わらない．${}^\dagger V^+$ の固有値で，γ_k と γ_l のうち，一方が含まれない場合，例えば γ_l が含まれない場合は，γ_k と $-\gamma_l$ が含まれ，上の同時互換により，γ_l と $-\gamma_k$ を含むようになり，これは γ_l を含み γ_k を含まない固有値の集合に属することになる．以上の互換では符号が変わらないので，負号の数が変わる固有値はない．

負号の数が変化するのは，許された互換の中で残る $\gamma_k \leftrightarrow -\gamma_k$ の互換の場合である．式 (54) の ${}^\dagger\mathbf{V}^+$ の固有値もこの互換により指数部の対応する添字が $\gamma_k \leftrightarrow -\gamma_k$ と変化する．${}^\dagger\mathbf{V}^+$ の全ての固有値は $-\gamma_k$ を含む固有値とここで，$-\gamma_k$ を含まない固有値の 2 種類に分けることができることに注意しよう．$-\gamma_k$ を含む固有値はこの互換により $-\gamma_k$ が γ_k に替わるために負号の数が 1 個減る．これにより，負号の数が偶数だった固有値（対角行列の上半分）は奇数の固有値へ、負号の数が奇数だった固有値（対角行列の下半分）は偶数の固有値へ変わる．一方，$-\gamma_k$ を含まない固有値は γ_k が $-\gamma_k$ に替わるために負号の数が 1 個増える．つまり，負号の数が偶数だった固有値（対角行列の上半分）は奇数の固有値へ、負号の数が奇数だった固有値（対角行列の下半分）は偶数の固有値へ変わる．結局，$\gamma_l \leftrightarrow -\gamma_l$ の互換により ${}^\dagger\mathbf{V}^+$ の負号の数が奇数の固有値は偶数の固有値へ，負号の数が偶数の固有値は奇数の固有値へと変わる．すなわち，負号の数の偶奇が入れ替わり，対角化された ${}^\dagger\mathbf{V}^+$ の固有値の上半分は負号の数が奇数，下半分は負号の数が偶数となり，${}^\dagger\mathbf{V}^+$ の本来取るべき上半分の固有値が，この互換により下半分に移ったことになる．

一般の置換の場合，以上の 2 種類の互換の組み合わせによって表すことができる．つまり，$\gamma_k \leftrightarrow \gamma_l$ と $-\gamma_k \leftrightarrow -\gamma_l$ の同時互換と $\gamma_k \leftrightarrow -\gamma_k$ という互換の組み合わせである．前者では 2 つの互換であり，固有値の負号の数は変化しない．後者は 1 つの互換であり，固有値の負号の数が変化する．このような互換を組み合わせた置換は，後者の互換が奇数回含まれていれば全体としては固有値指数部 $\gamma_k/2$ の負号の数が変化することがわかる．つまり，固有値の置換を表すユニタリ行列 $\mathbf{P}$ を考えたとき，最初の単位行列からの互換の回数は行列式 $\det\mathbf{P}$ の符号に現れる．互換の数が奇数の時は $\det\mathbf{P} = -1$ となり，${}^\dagger\mathbf{V}^+$ の固有値の上半分と下半分が入れ替わることになる．一方，論文では，$\det\mathbf{P} = -1$ のとき，置換は回映であるから，

$$\mathbf{PT}^+ : {}^\dagger\mathbf{U} \to -{}^\dagger\mathbf{U}$$

すなわち，

$$\mathbf{S}(\mathbf{PT}^+)({}^\dagger\mathbf{U})\mathbf{S}(\mathbf{PT}^+)^{-1} = -{}^\dagger\mathbf{U} \tag{55}$$

となるので，

$$\mathbf{S}(\mathbf{PT}^+)\{\frac{1}{2}(1+{}^\dagger\mathbf{U})^\dagger\mathbf{V}^+\}\mathbf{S}(\mathbf{PT}^+)^{-1}=\mathbf{S}(\mathbf{PT}^+)\{\frac{1}{2}(1+{}^\dagger\mathbf{U})\}\mathbf{S}(\mathbf{PT}^+)^{-1}\mathbf{S}(\mathbf{PT}^+)^\dagger\mathbf{V}^+\mathbf{S}(\mathbf{PT}^+)^{-1}$$
$$=\{\frac{1}{2}(1-{}^\dagger\mathbf{U})\}\mathbf{S}(\mathbf{PT}^+)^\dagger\mathbf{V}^+\mathbf{S}(\mathbf{PT}^+)^{-1} \tag{56}$$

となる．このことは，置換によって，それが正常な回転でも回映でも良く，固有値の順番が変わっても，$\frac{1}{2}(1-{}^\dagger\mathbf{U})$ によって 2^n 次行列の上半分を取り出す操作は変わらず，置換が回映の場合はこの式により下半分が取り出されることを示している．つまり，回映置換 $\mathbf{P}$ であっても，$\frac{1}{2}(1+{}^\dagger\mathbf{U})$ によって $\mathbf{S}[(\mathbf{T}^+)\cdot(\mathbf{R}^+)(\mathbf{T}^+)^{-1}]$ から取り出した上半分の固有値の集合は，$\frac{1}{2}(1-{}^\dagger\mathbf{U})$ によって $\mathbf{S}[(\mathbf{PT}^+)\cdot(\mathbf{R}^+)(\mathbf{PT}^+)^{-1}]$ から取り出した下半分の固有値の集合と等しい，ということである．

この固有値の置換に関する性質は $\mathbf{V}^{-1}=\mathbf{S}(\mathbf{R}^{-1})$ についても同様に成り立つ．

* * * * *

The Complete Partition Function （全分配関数）

式 (O-9)（「その 1」[5]）から分配関数は，

$$Z=(2\sinh 2H)^{mn/2}\ \mathrm{Tr}\ (\mathbf{V}^m)=(2\sinh 2H)^{mn/2}\ (\sum_{i=1}^{2^n}\ \lambda_i^m) \tag{57}$$

であるが，$\mathrm{Tr}\ {}^\dagger\mathbf{V}=\mathrm{Tr}\ (\mathbf{gVg}^{-1})=\mathrm{Tr}\ (\mathbf{V})$ であることと，式 (41) から，

$$\begin{aligned}Z&=(2\sinh 2H)^{mn/2}\ \mathrm{Tr}\ \left[\tfrac{1}{2}(\mathbf{1}+{}^\dagger\mathbf{U})\cdot{}^\dagger\mathbf{V}^++\tfrac{1}{2}(\mathbf{1}-{}^\dagger\mathbf{U})^\dagger\mathbf{V}^-\right]^m\\&=(2\sinh 2H)^{mn/2}\ \mathrm{Tr}\ \left[\{\tfrac{1}{2}(\mathbf{1}+{}^\dagger\mathbf{U})\cdot{}^\dagger\mathbf{V}^+\}^m+\{\tfrac{1}{2}(\mathbf{1}-{}^\dagger\mathbf{U})^\dagger\mathbf{V}^-\}^m\right]\\&=(2\sinh 2H)^{mn/2}\ \{\sum_{r=1}^n\exp[\frac{m}{2}(\pm\gamma_1\pm\gamma_3\pm\cdots\pm\gamma_{2r-1})]+\sum_{r=1}^n\exp[\frac{m}{2}(\pm\gamma_2\pm\gamma_4\pm\cdots\pm\gamma_{2r})]\}\end{aligned} \tag{O-38}$$

となる．ここで，

$$\prod_{r=1}^n(\mathrm{e}^{a\gamma_r}+\mathrm{e}^{-a\gamma_r})+\prod_{r=1}^n(\mathrm{e}^{a\gamma_r}-\mathrm{e}^{-a\gamma_r})=2\sum\exp[a(\pm\gamma_1\pm\gamma_2+\cdots\pm\gamma_n)] \tag{58}$$

という関係式が成り立つことに注意しよう．ただし，右辺は負号の数が偶数の場合のみの和である．この式が成り立つことは，左辺で $\mathrm{e}^{-\alpha\gamma_r}$ の奇数次の項は打ち消すことからわかる．この式を式 (O-38) に適用すると，

$$Z=\frac{1}{2}(2\sinh 2H)^{mn/2}\left\{\prod_{r=1}^n(2\cosh\frac{m}{2}\gamma_{2r})+\prod_{r=1}^n(2\sinh\frac{m}{2}\gamma_{2r})+\prod_{r=1}^n(2\cosh\frac{m}{2}\gamma_{2r-1})+\prod_{r=1}^n(2\sinh\frac{m}{2}\gamma_{2r-1})\right\} \tag{O-39}$$

が得られる．これは近似のない全体の分配関数である．

* * * * *

The Rotation Represented by $\mathbf{V}^-$, Its Eigenvalues and Eigenvectors （V^- の示す回転の固有値と固有ベクトル）

これから，$\mathbf{V}^+$ と $\mathbf{V}^-$ の具体的な固有値と固有ベクトルを求めよう．式 (24) と式 (25) を比較すると $\mathbf{V}^-$ のほうが式が扱いやすいので，最初に，$\mathbf{V}^-$ から始めよう．まず，

$$\mathbf{V}^m=\cdots\mathbf{VVV}\cdots=\cdots(\mathbf{V}_2\mathbf{V}_1)(\mathbf{V}_2\mathbf{V}_1)\cdots=\cdots(\mathbf{V}_1^{1/2}\mathbf{V}_2\mathbf{V}_1^{1/2})(\mathbf{V}_1^{1/2}\mathbf{V}_2\mathbf{V}_1^{1/2})\cdots \tag{59}$$

であるから，

$$\mathbf{V}_0 \equiv \mathbf{V}_1^{1/2}\mathbf{V}_2\mathbf{V}_1^{1/2} = \mathbf{V}_1^{1/2}\mathbf{V}_2\mathbf{V}_1\mathbf{V}_1^{-1/2} = \mathbf{V}_1^{1/2}\mathbf{V}\mathbf{V}_1^{-1/2} \tag{60}$$

とおくと，分配関数は $\mathbf{V}^m$ の跡であるから，$\mathbf{V}_0$ の固有値を求めれば分配関数は得られる．$\mathbf{V}_0$ は $\mathbf{V}$ の相似変換でもある．したがって，$\mathbf{V}_0$ と $\mathbf{V}$ の固有値は等しい[6]．これから，

$$\mathbf{V}_0 = \mathbf{V}_1^{-1/2}\mathbf{V}\mathbf{V}_1^{1/2} \tag{61}$$

とおいても構わないことがわかる[7]．$\mathbf{V}$ の固有値，すなわち ${}^\dagger\mathbf{V}$ の固有値は ${}^\dagger\mathbf{V}^+$ の固有値の上半分と ${}^\dagger\mathbf{V}^-$ の固有値の下半分からなる．${}^\dagger\mathbf{V}^-$ と $\mathbf{V}^-$ の固有値は等しいから，

$$\mathbf{V}_0^- = \mathbf{V}_1^{-1/2}\mathbf{V}^-\mathbf{V}_1^{1/2} \tag{62}$$

とおいて，$\mathbf{V}_0^-$ の固有値を求めよう．式 (1) と式 (25) を式 (62) に代入すると，

$$\mathbf{V}_0^- = \prod_{r=1}^{n}\exp(-\frac{\mathrm{i}}{2}H^*\mathbf{P}_r\mathbf{Q}_r)\prod_{r=1}^{n}\exp(\mathrm{i}H'\mathbf{P}_{r+1}\mathbf{Q}_r)\prod_{r=1}^{n}\exp(-\frac{\mathrm{i}}{2}H^*\mathbf{P}_r\mathbf{Q}_r) \equiv \mathbf{S}(\mathbf{R}_0^-) \tag{O-41}$$

となる（この式は論文の式 (41) と指数部の符号が違うことに注意）．この 2^n 次元空間の表現に対応する $2n$ 次元空間の回転を $\mathbf{R}_0^-$ とする．$\mathbf{V}_0^-$ の最初の積 $\prod\exp(-\frac{\mathrm{i}}{2}H^*\mathbf{P}_r\mathbf{Q}_r)$ で，$\exp(-\frac{\mathrm{i}}{2}H^*\mathbf{P}_r\mathbf{Q}_r)$ は「その 3」[4] の式 (36)，(37) で

$$\frac{\theta_r}{2} = -\frac{1}{2}\mathrm{i}H^* \tag{63}$$

の場合である．したがって，

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\mathbf{P}_k^*\\ \mathbf{Q}_l^*\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\cos\mathrm{i}H^* & \sin\mathrm{i}H^*\\ -\sin\mathrm{i}H^* & \cos\mathrm{i}H^*\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{P}_k\\ \mathbf{Q}_l\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\cosh H^* & \mathrm{i}\sinh H^*\\ -\mathrm{i}\sinh H^* & \cosh H^*\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{P}_k\\ \mathbf{Q}_l\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{64}$$

となる．(ここの $\mathbf{P}_r^*$ 等は式 (O-17)（「その 2」[1]）の意味で使っている.）この $2n$ 次の行列を $\mathbf{R}_1^{1/2}$ とする．すなわち，

$$\prod\exp(-\frac{\mathrm{i}}{2}H^*\mathbf{P}_r\mathbf{Q}_r) \equiv \mathbf{S}(\mathbf{R}_1^{1/2}) \tag{65}$$

とする．

したがって，$\prod\exp(-\frac{\mathrm{i}}{2}H^*\mathbf{P}_r\mathbf{Q}_r)$ を $2n$ 次元空間の回転を表す行列にすると，

$$\begin{pmatrix}\mathbf{P}_1^*\\ \mathbf{Q}_1^*\\ \mathbf{P}_2^*\\ \mathbf{Q}_2^*\\ \vdots\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cosh H^* & \mathrm{i}\sinh H^* & & & \\ -\mathrm{i}\sinh H^* & \cosh H^* & & & \\ & & \cosh H^* & \mathrm{i}\sinh H^* & \\ & & -\mathrm{i}\sinh H^* & \cosh H^* & \\ & & & & \ddots\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{P}_1\\ \mathbf{Q}_1\\ \mathbf{P}_2\\ \mathbf{Q}_2\\ \vdots\end{pmatrix} \tag{66}$$

となる．一方，$\prod_{r=1}^{n}\exp(\mathrm{i}H'\mathbf{P}_{r+1}\mathbf{Q}_r)$ に関しては,「その 3」[4] の式 (36)，(37) の関係から，

$$\frac{\theta_r}{2} = \mathrm{i}H' \tag{67}$$

---

[6] A が B の相似変換であるとき，すなわち，$A = P^{-1}BP$ なら，A の固有値を λ として，A の特性方程式は

$$|A-\lambda E| = |P^{-1}P||A-\lambda E| = |P^{-1}||A-\lambda E||P| = |P^{-1}AP-\lambda E| = |B-\lambda E| = 0$$

となり，A と B の固有値は同じ特性方程式で与えられるので，一致する．

[7] 論文では，式 (O-3) では $\mathbf{V} = \mathbf{V}_2\mathbf{V}_1$ であったが，ここでは $\mathbf{V} = \mathbf{V}_1\mathbf{V}_2$ と考えているようで，このような入れ替えはしていない．しかし，周期的な境界条件を考えればどちらも正しいことになる．

である．また，$\mathbf{P}_{r+1}\mathbf{Q}_r$ 面における回転であるので，式 (69) で対になる変数が 1 行ずつずれることになる．したがって，これを $2n$ 次の行列で表すと，

$$
\begin{pmatrix} \mathbf{P}_1^* \\ \mathbf{Q}_1^* \\ \mathbf{P}_2^* \\ \mathbf{Q}_2^* \\ \mathbf{P}_3^* \\ \vdots \\ \mathbf{Q}_n^* \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
\cosh 2H' & & & & & \cdots & -\mathrm{i}\sinh 2H' \\
& \cosh 2H' & \mathrm{i}\sinh 2H' & & & & \\
& -\mathrm{i}\sinh 2H' & \cosh 2H' & & & & \\
& & & \cosh 2H' & \mathrm{i}\sinh 2H' & & \\
& & & -\mathrm{i}\sinh 2H' & \cosh 2H' & & \\
\vdots & & & & & \ddots & \\
\mathrm{i}\sinh 2H' & & & & & & \cosh 2H'
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{P}_2 \\ \mathbf{Q}_2 \\ \mathbf{P}_3 \\ \vdots \\ \mathbf{Q}_n \end{pmatrix}
\tag{68}
$$

となる．この $2n$ 次の行列を $\mathbf{R}_2$ とする．すなわち，

$$
\prod_{r=1}^{n} \exp(\mathrm{i}H'\mathbf{P}_{r+1}\mathbf{Q}_r) \equiv \mathbf{S}(\mathbf{R}_2) \tag{69}
$$

とする．

行列 $\mathbf{R}_1^{1/2}$ および $\mathbf{R}_2$ は 2 行 2 列単位の巡回行列 (cyclic matrix) である．

これから，$\mathbf{R}_1^{1/2}\mathbf{R}_2\mathbf{R}_1^{1/2}$ の行列の成分を求めよう．式が長くなるので，ここでは，

$$
\begin{aligned}
\cosh H^* \equiv c^*, \quad & \sinh H^* \equiv s^*, \\
\cosh 2H^* \equiv c_2^*, \quad & \sinh 2H^* \equiv s_2^*, \\
\cosh 2H' \equiv c_2', \quad & \sinh 2H' \equiv s_2'
\end{aligned}
\tag{70}
$$

と表すことにする．

まず，

$$
\mathbf{R}_1^{1/2}\mathbf{R}_2 =
\begin{pmatrix}
c^*c_2' & \mathrm{i}s^*c_2' & -s^*s_2' & & & & & & -\mathrm{i}c^*s_2' \\
-\mathrm{i}s^*c_2' & c^*c_2' & \mathrm{i}c^*s_2' & & & & & & -s^*s_2' \\
& -\mathrm{i}c^*s_2' & c^*c_2' & \mathrm{i}s^*c_2' & -s^*s_2' & & & & \\
& -s^*s_2' & -\mathrm{i}s^*c_2' & c^*c_2' & \mathrm{i}c^*s_2' & & & & \\
\vdots & & & & & \ddots & & & \vdots \\
-s^*s2' & & & & & & -\mathrm{i}c^*s_2' & c^*c_2' & \mathrm{i}s^*c_2' \\
\mathrm{i}c^*s2' & & & & & \cdots & -s^*s_2' & -\mathrm{i}s^*c_2' & c^*c_2'
\end{pmatrix}
\tag{71}
$$

となるから，

$$
\mathbf{R}_1^{1/2}\mathbf{R}_2\mathbf{R}_1^{1/2} = \mathbf{R}_0^- =
$$

$$
\left(\begin{array}{cccccccccc}
(c^{*2}+s^{*2})c_2' & 2\mathrm{i}s^*c^*c_2' & -c^*s^*s_2' & -\mathrm{i}s^{*2}s_2' & & & \cdots & & & -s^*c^*s_2' & -\mathrm{i}c^{*2}s_2' \\
-2\mathrm{i}s^*c^*c_2' & (s^{*2}+c^{*2})c_2' & \mathrm{i}c^{*2}s_2' & -c^*s^*s_2' & & & \cdots & & & \mathrm{i}s^{*2}s_2' & -s^*c^*s_2' \\
-s^*c^*s_2' & -\mathrm{i}c^{*2}s_2' & (c^{*2}+s^{*2})c_2' & 2\mathrm{i}s^*c^*c_2' & -s^*c^*s_2' & -\mathrm{i}s^{*2}s_2' & & & & & \\
\mathrm{i}s^{*2}s_2' & -c^*s^*s_2' & -2\mathrm{i}s^*c^*c_2' & (s^{*2}+c^{*2})c_2' & \mathrm{i}c^{*2}s_2' & -s^*c^*s_2' & & & & & \\
\vdots & & & & & & \ddots & & & & \vdots \\
-s^*c^*s2' & -\mathrm{i}s^{*2}s_2' & & & & & & -s^*c^*s_2' & -\mathrm{i}c^{*2}s_2' & (c^{*2}+s^{*2})c_2' & 2\mathrm{i}s^*c^*c_2' \\
\mathrm{i}c^{*2}s_2' & -s^*c^*s_2' & & & & & \cdots & \mathrm{i}c^{*2}s_2' & -c^*s^*s_2' & -2\mathrm{i}s^*c^*c_2' & (c^{*2}+s^{*2})c_2'
\end{array}\right)
$$

$$
= \left(\begin{array}{ccccccccccc}
c_2^*c_2' & \mathrm{i}s_2^*c_2' & -\frac{1}{2}s2^*s_2' & -\mathrm{i}s^{*2}s_2' & & & \cdots & & & -\frac{1}{2}s_2^*s_2' & -\mathrm{i}c^{*2}s_2' \\
-\mathrm{i}s_2^*c_2' & c_2^*c_2' & \mathrm{i}c^{*2}s_2' & -\frac{1}{2}s_2^*s_2' & & & \cdots & & & \mathrm{i}s^{*2}s_2' & -\frac{1}{2}s_2^*s_2' \\
-\frac{1}{2}s_2^*s_2' & -\mathrm{i}c^{*2}s_2' & c_2^*c_2' & \mathrm{i}s_2^*c_2' & -\frac{1}{2}s_2^*s_2' & -\mathrm{i}s^{*2}s_2' & & & & & \\
\mathrm{i}s^{*2}s_2' & -\frac{1}{2}s_2^*s_2' & -\mathrm{i}s_2^*c_2' & c_2^*c_2' & \mathrm{i}c^{*2}s_2' & -\frac{1}{2}s_2^*s_2' & & & & & \\
\vdots & & & & & & \ddots & & & & \vdots \\
-\frac{1}{2}s_2^*s_2' & -\mathrm{i}s^{*2}s_2' & & & & & & -\frac{1}{2}s_2^*s_2' & -\mathrm{i}c^{*2}s_2' & c_2^*c_2' & \mathrm{i}s_2^*c_2' \\
\mathrm{i}c^{*2}s_2' & -\frac{1}{2}s_2^*s_2' & & & & & \cdots & \mathrm{i}s^{*2}s_2' & -\frac{1}{2}s_2^*s_2' & -\mathrm{i}s_2^*c_2' & c_2^*c_2'
\end{array}\right)
$$

$$
= \begin{pmatrix}
\mathbf{a} & \mathbf{b} & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & \mathbf{b}^* \\
\mathbf{b}^* & \mathbf{a} & \mathbf{b} & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 \\
0 & \mathbf{b}^* & \mathbf{a} & \mathbf{b} & 0 & \cdot & \cdot & & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\
\mathbf{b} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \mathbf{b}^* & \mathbf{a}
\end{pmatrix} \tag{72}
$$

となる．ただし，

$$
\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \cosh 2H' \cosh 2H^* & \mathrm{i}\cosh 2H' \sinh 2H^* \\ -\mathrm{i}\cosh 2H' \sinh 2H^* & \cosh 2H' \cosh 2H^* \end{pmatrix} \tag{73}
$$

$$
\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sinh 2H' \sinh 2H^* & -\mathrm{i}\sinh 2H' \sinh^2 H^* \\ \mathrm{i}\sinh 2H' \cosh^2 H^* & -\frac{1}{2}\sinh 2H' \sinh 2H^* \end{pmatrix} \tag{74}
$$

$$
\mathbf{b}^* = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sinh 2H' \sinh 2H^* & -\mathrm{i}\sinh 2H' \cosh^2 H^* \\ \mathrm{i}\sinh 2H' \sinh^2 H^* & -\frac{1}{2}\sinh 2H' \sinh 2H^* \end{pmatrix} \tag{75}
$$

である．式 (73)–(75) の結果は論文の式と 1 行 2 列および 2 行 1 列の符号が反対である．

* * * * *

巡回行列の固有値および固有ベクトルは以下のようにして得られる．以下，しばらく巡回行列の一般的な性質について述べることにする．

次の n 次正方巡回行列 $\boldsymbol{\alpha}$ を考えよう．

$$
\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix}
a & b & c & d & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & g & h \\
h & a & b & c & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & g \\
g & h & a & b & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\
b & c & d & c & \cdot & \cdot & \cdot & & & a
\end{pmatrix} \tag{O-44}
$$

a，b，c，$\cdots$，h はスカラーである．この巡回行列の正規化された固有ベクトル $\mathbf{u}$ は

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\begin{pmatrix} \epsilon^{2r} \\ \epsilon^{4r} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \epsilon^{2(n-1)r} \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad (r=1,\cdots,n) \tag{O-45}$$

で与えられる．ただし，

$$\epsilon \equiv \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/n}, \qquad \epsilon^{2nr}=1 \tag{76}$$

である．実際，$\mathbf{u}$ が $\boldsymbol{\alpha}$ の固有ベクトルであることは，

$$\boldsymbol{\alpha}\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{n}}\begin{pmatrix} a\epsilon^{2r}+b\epsilon^{4r}+c\epsilon^{6r}+\cdots+h\epsilon^{2nr} \\ h\epsilon^{2r}+a\epsilon^{4r}+b\epsilon^{6r}+\cdots+g\epsilon^{2nr} \\ g\epsilon^{2r}+h\epsilon^{4r}+a\epsilon^{6r}+\cdots+\cdots \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b\epsilon^{2r}+c\epsilon^{4r}+d\epsilon^{6r}+\cdots+a\epsilon^{2nr} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{n}}\begin{pmatrix} \epsilon^{2r}(a+b\epsilon^{2r}+c\epsilon^{4r}+\cdots+h\epsilon^{2(n-1)r}) \\ \epsilon^{4r}(h\epsilon^{2(n-1)r}+a+b\epsilon^{2r}+\cdots+g\epsilon^{2(n-2)r}) \\ \epsilon^{6r}(g\epsilon^{2(n-2)r}+h\epsilon^{2(n-1)r}+a+\cdots+\cdots) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \epsilon^{nr}(b\epsilon^{2r}+c\epsilon^{4r}+d\epsilon^{6r}+\cdots+a) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}}(a+b\epsilon^{2r}+c\epsilon^{4r}+\cdots+h\epsilon^{2(n-1)r})\begin{pmatrix} \epsilon^{2r} \\ \epsilon^{2r} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \epsilon^{2(n-1)r} \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{77}$$

となる．この式から固有値は

$$a+b\epsilon^{2r}+c\epsilon^{4r}+\cdots+h\epsilon^{2(n-1)r} \tag{O-46}$$

である．

この巡回行列の考えを拡張して，行列の成分が行列である場合でも式 (O-44)，(O-45) と同様の式が成り立つ．巡回行列 $\boldsymbol{\alpha}$ の成分が f 次の行列だった場合，$\boldsymbol{\alpha}$ は nf 次の行列で，その固有ベクトルは式 (O-45) から類推できるように，

$$\begin{pmatrix} \epsilon^{2r}\mathbf{W}_{2r} \\ \epsilon^{4r}\mathbf{W}_{2r} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \epsilon^{2(n-1)r}\mathbf{W}_{2r} \\ \epsilon^{2nr}\mathbf{W}_{2r} \end{pmatrix}, \qquad (r=1,\cdots,n) \tag{O-47}$$

で与えられる．ここで，$\mathbf{W}_{2r}$ は次の f 次行列の固有ベクトルである．

$$\boldsymbol{\alpha}_{2r} = \mathbf{a}+\epsilon^{2r}\mathbf{b}+\epsilon^{4r}\mathbf{c}+\cdots+\epsilon^{2(n-1)r}\mathbf{h} \tag{O-48}$$

λ_{2r} を $\boldsymbol{\alpha}_{2r}$ の固有値としよう．すなわち，

$$\boldsymbol{\alpha}_{2r}\mathbf{W}_{2r}=(\mathbf{a}+\epsilon^{2r}\mathbf{b}+\epsilon^{4r}\mathbf{c}+\cdots+\epsilon^{2(n-1)r}\mathbf{h})\mathbf{W}_{2r}=\lambda_{2r}\mathbf{W}_{2r} \tag{78}$$

としよう．そうすると，

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\alpha}\begin{pmatrix}\epsilon^{2r}\mathbf{W}_{2r}\\ \epsilon^{4r}\mathbf{W}_{2r}\\ \vdots\\ \epsilon^{2nr}\mathbf{W}_{2r}\end{pmatrix}
&=\begin{pmatrix}\mathbf{a}&\mathbf{b}&\mathbf{c}&\cdots&\mathbf{h}\\ \mathbf{h}&\mathbf{a}&\mathbf{b}&\cdots&\mathbf{g}\\ \vdots&&&&\vdots\\ \mathbf{b}&\mathbf{c}&\mathbf{d}&\cdots&\mathbf{a}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\epsilon^{2r}\mathbf{W}_{2r}\\ \epsilon^{4r}\mathbf{W}_{2r}\\ \vdots\\ \epsilon^{2nr}\mathbf{W}_{2r}\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}(\epsilon^{2r}\mathbf{a}+\epsilon^{4r}\mathbf{b}+\epsilon^{6r}\mathbf{c}+\cdots+\epsilon^{2nr}\mathbf{h})\mathbf{W}_{2r}\\ (\epsilon^{2r}\mathbf{h}+\epsilon^{4r}\mathbf{a}+\epsilon^{6r}\mathbf{b}+\cdots+\epsilon^{2nr}\mathbf{g})\mathbf{W}_{2r}\\ \vdots\\ (\epsilon^{2r}\mathbf{b}+\epsilon^{4r}\mathbf{c}+\epsilon^{6r}\mathbf{d}+\cdots+\epsilon^{2nr}\mathbf{a})\mathbf{W}_{2r}\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}\epsilon^{2r}(\mathbf{a}+\epsilon^{2r}\mathbf{b}+\epsilon^{4r}\mathbf{c}+\cdots+\epsilon^{2(n-1)r}\mathbf{h})\mathbf{W}_{2r}\\ \epsilon^{4r}(\epsilon^{2nr}\mathbf{h}+\mathbf{a}+\epsilon^{2r}\mathbf{b}+\cdots+\epsilon^{2(n-2)r}\mathbf{g})\mathbf{W}_{2r}\\ \vdots\\ \epsilon^{2nr}(\epsilon^{2r}\mathbf{b}+\epsilon^{4r}\mathbf{c}+\epsilon^{6r}\mathbf{d}+\cdots+\mathbf{a})\mathbf{W}_{2r}\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}\epsilon^{2r}\lambda_{2r}\mathbf{W}_{2r}\\ \epsilon^{4r}\lambda_{2r}\mathbf{W}_{2r}\\ \vdots\\ \epsilon^{2nr}\lambda_{2r}\mathbf{W}_{2r}\end{pmatrix}=\lambda_{2r}\begin{pmatrix}\epsilon^{2r}\mathbf{W}_{2r}\\ \epsilon^{4r}\mathbf{W}_{2r}\\ \vdots\\ \epsilon^{2nr}\mathbf{W}_{2r}\end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{79}$$

となり，$\boldsymbol{\alpha}_{2r}$ の固有値は同時に $\boldsymbol{\alpha}$ の固有値である．したがって，nf 次巡回行列の固有値問題は f 次行列の固有値問題となる．

以上の巡回行列の結果を $\mathbf{R}_0^-$ に適用することを考えよう．式 (72) から，$\mathbf{R}_0^-$ は nf 次巡回行列で，$f=2$ であることがわかる．したがって，$\mathbf{R}_0^-$ の $2n$ 個の固有値は n 個の 2 次行列

$$\boldsymbol{\alpha}_{2r}=\mathbf{a}+\epsilon^{2r}\mathbf{b}+\epsilon^{2(n-1)r}\mathbf{b}^* \tag{O-50}$$

$$=\begin{pmatrix}c_2'c_2^*-\frac{1}{2}\epsilon^{2r}s_2's_2^*-\frac{1}{2}\epsilon^{2(n-1)r}s_2's_2^* & -\mathrm{i}c_2's_2^*+\mathrm{i}\epsilon^{2r}s_2's^{*2}+\mathrm{i}\epsilon^{2(n-1)r}s_2'c^{*2}\\ \mathrm{i}c_2's_2^*-\mathrm{i}\epsilon^{2r}s_2'c^{*2}-\mathrm{i}\epsilon^{2(n-1)r}s_2's^{*2} & c_2'c_2^*-\frac{1}{2}\epsilon^{2r}s_2's_2^*-\frac{1}{2}\epsilon^{2(n-1)r}s_2's_2^*\end{pmatrix} \tag{80}$$

の固有値であることがわかる．この行列の行列式を計算すると、

$$\begin{aligned}
\det\boldsymbol{\alpha}_{2r}&=(c_2'c_2^*-\tfrac{1}{2}\epsilon^{2r}s_2's_2^*-\tfrac{1}{2}\epsilon^{2(n-1)r}s_2's_2^*)^2+(-c_2's_2^*+\epsilon^{2r}s_2's^{*2}+\epsilon^{2(n-1)r}s_2'c^{*2})(c_2's_2^*-\epsilon^{2r}s_2'c^{*2}-\epsilon^{2(n-1)r}s_2's^{*2})\\
&=\cosh^2 2H'\cosh^2 2H^*+\tfrac{1}{4}\epsilon^{4r}\sinh^2 2H'\sinh^2 2H^*+\tfrac{1}{4}\epsilon^{-4r}\sinh^2 2H'\sinh^2 2H^*\\
&-\epsilon^{2r}\cosh 2H'\sinh 2H'\cosh 2H^*\sinh 2H^*+\tfrac{1}{2}\sinh^2 2H'\sinh^2 2H^*-\epsilon^{-2r}\cosh 2H'\sinh 2H'\cosh 2H^*\sinh 2H^*\\
&-\cosh^2 2H'\sinh^2 2H^*-\epsilon^{4r}\sinh^2 2H'\sinh^2 H^*\cosh^2 H^*-\epsilon^{-4r}\sinh^2 2H'\sinh^2 H^*\cosh^2 H^*\\
&+\epsilon^{2r}\cosh 2H'\sinh 2H'\sinh 2H^*(\cosh^2 H^*+\sinh^2 H^*)\\
&+\epsilon^{-2r}\cosh 2H'\sinh 2H'\sinh 2H^*(\sinh^2 H^*+\cosh^2 H^*)-\sinh^2 2H'(\cosh^4 H^*+\sinh^4 H^*)
\end{aligned}$$

ϵ^{2r}，ϵ^{4r}，ϵ^{-2r}，ϵ^{-4r} の項は相殺されて消えるので，

$$\begin{aligned}
&=\cosh^2 2H'\cosh^2 2H^*+\tfrac{1}{2}\sinh^2 2H'\sinh^2 2H^*-\cosh^2 2H'\sinh^2 2H^*-\sinh^2 2H'(\cosh^4 H^*+\sinh^4 H^*)\\
&=\cosh^2 2H'(\cosh^2 2H^*-\sinh^2 2H^*)+\tfrac{1}{2}\sinh^2 2H'\sinh^2 2H^*-\sinh^2 2H'(\cosh^2 2H^*-\tfrac{1}{2}\sinh^2 2H^*)\\
&=\cosh^2 2H'+\sinh^2 2H'\sinh^2 2H^*+\sinh^2 2H'\cosh^2 2H^*\\
&=\cosh^2 2H'-\sinh^2 2H'=1
\end{aligned} \tag{81}$$

となる．したがって，$\boldsymbol{\alpha}_{2r}$ の 2 つの固有値 λ_r の積は 1 であるから，互いに逆数の関係にあるから

$$\lambda_r = \exp(\pm\gamma_{2r}) \tag{82}$$

と書くことができる．跡の $\mathrm{Tr}\, AB = \mathrm{Tr}\, BA$ という関係を使えば，γ_{2r} と H' および H^* との関係を導くことができる．すなわち，$\mathrm{Tr}\,\boldsymbol{\alpha}_{2r} = \mathrm{e}^{\gamma_{2r}} + \mathrm{e}^{\gamma_{-2r}}$ であるから，

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,\boldsymbol{\alpha}_{2r} &= \cosh 2H' \cosh 2H^* - \tfrac{1}{2}\epsilon^{2r} \sinh 2H' \sinh 2H^* - \tfrac{1}{2}\epsilon^{2(n-1)r} \sinh 2H' \sinh 2H^* \\
&= \cosh 2H' \cosh 2H^* - \sinh 2H' \sinh 2H^* \frac{1}{2}(\epsilon^{2r} + \epsilon^{-2r}) \\
&= \cosh 2H' \cosh 2H^* - \sinh 2H' \sinh 2H^* \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}r/n} + \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}r/n}) \\
&= \cosh 2H' \cosh 2H^* - \sinh 2H' \sinh 2H^* \cos\frac{2\pi r}{n} \\
&= \cosh 2H' \cosh 2H^* - \sinh 2H' \sinh 2H^* \cos\omega_{2r} = \cosh\gamma_{2r}
\end{aligned} \tag{83}$$

となる．ただし，

$$\omega_{2r} = \frac{2\pi r}{n} \tag{84}$$

である．この関係式は，図 1 に示す双曲三角形の第 1 双曲余弦定理である．したがって，この双曲三角形の頂点 D^* と D' の角度をそれぞれ δ^* および δ' とすれば，次の第 2 双曲余弦定理および双曲正弦定理が成り立つ [7].

$$\begin{aligned}
&\sinh 2H^* \cosh 2H' - \cosh 2H^* \sinh 2H' \cos\omega_{2r} = \sinh\gamma_{2r} \cos\delta'_{2r} \\
&\frac{\sinh 2H'}{\sin\delta'_{2r}} = \frac{\sinh\gamma_{2r}}{\sin\omega_{2r}}
\end{aligned} \tag{O-52}$$

以上の関係式を式 (O-50) に適用すると，

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\alpha}_{2r} &= \begin{pmatrix} \cosh\gamma_{2r} & -\mathrm{i}\cosh 2H' \sinh 2H^* + \mathrm{i}\sinh 2H'(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{2r}} \sinh^2 H^* + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{2r}} \cosh^2 H^*) \\ \mathrm{i}\cosh 2H' \sinh 2H^* - \mathrm{i}\sinh 2H'(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{2r}} \cosh^2 H^* + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{2r}} \sinh^2 H^*) & \cosh\gamma_{2r} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cosh\gamma_{2r} & -\mathrm{i}\cosh 2H' \sinh 2H^* + \frac{\mathrm{i}}{2}\sinh 2H'(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{2r}}[\cosh 2H^* - 1] + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{2r}}[\cosh 2H^* + 1]) \\ \mathrm{i}\cosh 2H' \sinh 2H^* - \frac{\mathrm{i}}{2}\sinh 2H'(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{2r}}[\cosh 2H^* + 1] + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{2r}}[\cosh 2H^* - 1]) & \cosh\gamma_{2r} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cosh\gamma_{2r} & -\mathrm{i}\cosh 2H' \sinh 2H^* + \mathrm{i}\sinh 2H'(\cos\omega_{2r} \cosh 2H^* - \mathrm{i}\sin\omega_{2r}) \\ \mathrm{i}\cosh 2H' \sinh 2H^* - \mathrm{i}\sinh 2H'(\cos\omega_{2r} \cosh 2H^* + \mathrm{i}\sin\omega_{2r}) & \cosh\gamma_{2r} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

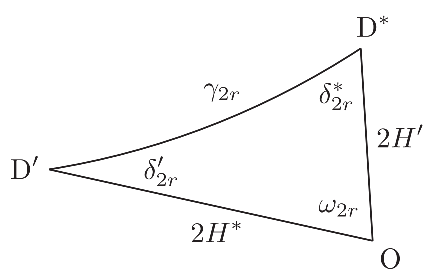

図 1: 双曲三角形およびその辺長，角度

式 (O-52) を適用して,

$$
\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} \cosh\gamma_{2r} & -\mathrm{i}\sinh\gamma_{2r}\cos\delta'_{2r} + \sinh 2H'\sin\omega_{2r} \\ \mathrm{i}\sinh\gamma_{2r}\cos\delta'_{2r} + \sinh 2H'\sin\omega_{2r} & \cosh\gamma_{2r} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cosh\gamma_{2r} & -\mathrm{i}\sinh\gamma_{2r}\cos\delta'_{2r} + \sinh\gamma_{2r}\sin\delta'_{2r} \\ \mathrm{i}\sinh\gamma_{2r}\cos\delta'_{2r} + \sinh\gamma_{2r}\sin\delta'_{2r} & \cosh\gamma_{2r} \end{pmatrix} \\
&= \cosh\gamma_{2r}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sinh\gamma_{2r}\begin{pmatrix} 0 & \sin\delta'_{2r} - \mathrm{i}\cos\delta'_{2r} \\ \sin\delta'_{2r} + \mathrm{i}\cos\delta'_{2r} & 0 \end{pmatrix} \\
&= \cosh\gamma_{2r}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \sinh\gamma_{2r}\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta'_{2r}} \\ -\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta'_{2r}} & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{85}
$$

この式を用いて, $\boldsymbol{\alpha}_{2r}$ の固有ベクトルを求めよう. 固有ベクトルを $\binom{x}{y}$ とすると, $\lambda = \mathrm{e}^{\gamma_{2r}}$ のとき,

$$
\begin{aligned}
\cosh\gamma_{2r}x - \mathrm{i}\sinh\gamma_{2r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta'_{2r}}y &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta'_{2r}}x \\
\cosh\gamma_{2r}y + \mathrm{i}\sinh\gamma_{2r}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta'_{2r}}x &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta'_{2r}}y
\end{aligned} \tag{86}
$$

であるから,

$$
\begin{aligned}
-\sinh\gamma_{2r}x &= \mathrm{i}\sinh\gamma_{2r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta'_{2r}}y \\
-\sinh\gamma_{2r}y &= -\mathrm{i}\sinh\gamma_{2r}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta'_{2r}}x
\end{aligned} \tag{87}
$$

となり, 正規化した固有ベクトルは, 対称性を考えて,

$$
\mathbf{W_{2r}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta'_{2r}/2} \\ \mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta'_{2r}/2} \end{pmatrix} \tag{O-53-1}
$$

となる. $\lambda = \mathrm{e}^{\gamma_{2r}}$ のときも同様にして,

$$
\mathbf{W_{2r}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta'_{2r}/2} \\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta'_{2r}/2} \end{pmatrix} \tag{O-53-2}
$$

となる.

以上で $\boldsymbol{\alpha}_{2r}$ の固有ベクトル $\mathbf{W_{2r}}$ が求められたので, 式 (O-47) により bR_0^- の固有ベクトルは, $\omega_{2r} = 2\pi r/n$, および $\epsilon^{2r} = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}r/n} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{2r}}$ であることに注意すると, $\lambda = \mathrm{e}^{\gamma_{2r}}$ と $\lambda = \mathrm{e}^{-\gamma_{2r}}$ に対応して, それぞれ,

$$
\mathbf{u}_{2r} \equiv \frac{1}{\sqrt{2n}}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_{2r}+\delta'_{2r}/2)} \\ \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_{2r}-\delta'_{2r}/2)} \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_{4r}+\delta'_{2r}/2)} \\ \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_{4r}-\delta'_{2r}/2)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_{2nr}+\delta'_{2r}/2)} \\ \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_{2nr}-\delta'_{2r}/2)} \end{pmatrix}, \qquad
\mathbf{v}_{2r} \equiv \frac{1}{\sqrt{2n}}\begin{pmatrix} \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_{2r}+\delta'_{2r}/2)} \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_{2r}-\delta'_{2r}/2)} \\ \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_{4r}+\delta'_{2r}/2)} \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_{4r}-\delta'_{2r}/2)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_{2nr}+\delta'_{2r}/2)} \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_{2nr}-\delta'_{2r}/2)} \end{pmatrix} \tag{O-54}
$$

となる. $\mathbf{u}_{2r}$ と $\mathbf{v}_{2r}$ が正規直交基底になることは, $\omega_{2r} = 2\pi\mathrm{i}/n$ であることに注意すると, 以下のようにして

示すことができる．

$$
\begin{aligned}
2n\langle\, \mathbf{u}_{2r} \mid \mathbf{u}_{2s} \,\rangle &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_{2r}+\delta'_{2r}/2)+\mathrm{i}(\omega_{2s}+\delta'_{2s}/2)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_{2r}-\delta'_{2r}/2)+\mathrm{i}(\omega_{2s}-\delta'_{2s}/2)} \\
&\quad + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_{4r}+\delta'_{4r}/2)+\mathrm{i}(\omega_{2s}+\delta'_{2s}/2)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_{4r}+\delta'_{4r}/2)+\mathrm{i}(\omega_{2s}-\delta'_{2s}/2)} \cdots + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_{2nr}-\delta'_{2r}/2)+\mathrm{i}(\omega_{2ns}-\delta'_{2s}/2)} \\
&= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_{2r}-\omega_{2s})}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\delta'_{2r}-\delta'_{2s})/2} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_{2r}-\omega_{2s})}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\delta'_{2r}-\delta'_{2s})/2} + \cdots \\
&= (\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}k(r-s)/n})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\delta'_{2r}-\delta'_{2s})/2} + (\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}k(r-s)/n})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\delta'_{2r}-\delta'_{2s})/2} \\
&= 2(\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}k(r-s)/n}) \cos\frac{\delta'_{2r}-\delta'_{2s}}{2} \\
&= 2n\delta_{r,s}
\end{aligned} \tag{88}
$$

同様に，

$$
\begin{aligned}
2n\langle\, \mathbf{v}_{2r} \mid \mathbf{v}_{2s} \,\rangle &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_{2r}-\omega_{2s})}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\delta'_{2r}-\delta'_{2s})/2} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_{2r}-\omega_{2s})}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\delta'_{2r}-\delta'_{2s})/2} + \cdots \\
&= (\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}k(r-s)/n})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\delta'_{2r}-\delta'_{2s})/2} + (\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}k(r-s)/n})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\delta'_{2r}-\delta'_{2s})/2} \\
&= 2(\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}k(r-s)/n}) \cos\frac{\delta'_{2r}-\delta'_{2s}}{2} \\
&= 2n\delta_{r,s}
\end{aligned} \tag{89}
$$

となる．最後に，

$$
\begin{aligned}
2n\langle\, \mathbf{u}_{2r} \mid \mathbf{v}_{2s} \,\rangle &= \mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_{2r}-\omega_{2s})}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\delta'_{2r}-\delta'_{2s})/2} - \mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_{2r}-\omega_{2s})}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\delta'_{2r}-\delta'_{2s})/2} + \cdots \\
&= \mathrm{i}(\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}k(r-s)/n})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\delta'_{2r}-\delta'_{2s})/2} - \mathrm{i}(\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}k(r-s)/n})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\delta'_{2r}-\delta'_{2s})/2} \\
&= 2(\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}k(r-s)/n}) \sin\frac{\delta'_{2r}-\delta'_{2s}}{2} \\
&= 2n\delta_{r,s} \sin\frac{\delta'_{2r}-\delta'_{2s}}{2} = 0
\end{aligned} \tag{90}
$$

となる．したがって，直交基底となる．

$\mathbf{u}_{2r}$ と $\mathbf{v}_{2r}$ が正規直交基底になるから，$\mathbf{R}_0^-$ を対角化する行列 $\mathbf{t}^{-1}$ （これは $\mathbf{t}$ とするのが普通）は上の固有ベクトルを横に並べた行列として得られる．

$$
\mathbf{t}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_2 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{u}_4 & \mathbf{v}_4 & \cdots & \mathbf{u}_{2n} & \mathbf{v}_{2n} \end{pmatrix} \tag{91}
$$

とすると，

$$
\mathbf{t}\mathbf{R}_0^-\mathbf{t}^{-1} = \begin{pmatrix}
\mathrm{e}^{\gamma_2} & & & & & & & 0 \\
& \mathrm{e}^{-\gamma_2} & & & & & & \\
& & \mathrm{e}^{\gamma_4} & & & & & \\
& & & \mathrm{e}^{-\gamma_4} & & & & \\
& & & & \ddots & & & \\
& & & & & \ddots & & \\
& & & & & & \mathrm{e}^{\gamma_{2n}} & \\
0 & & & & & & & \mathrm{e}^{-\gamma_{2n}}
\end{pmatrix} \equiv \boldsymbol{\lambda}^- \tag{O-55}
$$

となる．

論文のほうには，$\mathbf{t}$ と $\boldsymbol{\lambda}^-$ も直交行列ではないと書いてあるが，上の計算から明らかに $\mathbf{t}$ は直交行列である．しかし，$\mathbf{t}$ のままでは，$\mathbf{t}\mathbf{R}_0^-\mathbf{t}^{-1}$ は対角行列になって，もともとは「その 3」の式 (38) のような形になってもらいたいわけである．これは，論文では canonical form と呼んでいるようであるが，そのような形にするには，$\mathbf{t}$ に相似変換 $\mathbf{I}$ を施せばよい．このような $\mathbf{I}$ は，

$$
\mathbf{I}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}
1 & \mathrm{i} & & & & & & 0\\
\mathrm{i} & 1 & & & & & & \\
 & & 1 & \mathrm{i} & & & & \\
 & & \mathrm{i} & 1 & & & & \\
 & & & & \ddots & & & \\
 & & & & & \ddots & & \\
 & & & & & & & \mathrm{i}\\
0 & & & & & & \mathrm{i} & 1
\end{pmatrix}
\qquad
\mathbf{I}^{-1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}
1 & -\mathrm{i} & & & & & & 0\\
-\mathrm{i} & 1 & & & & & & \\
 & & 1 & -\mathrm{i} & & & & \\
 & & -\mathrm{i} & 1 & & & & \\
 & & & & \ddots & & & \\
 & & & & & \ddots & & \\
 & & & & & & & -\mathrm{i}\\
0 & & & & & & -\mathrm{i} & 1
\end{pmatrix}
\tag{92}
$$

とすることができる．ここで，$\mathbf{I}^{-1}=\mathbf{I}^*$ で，bI^* は bI の随伴行列である．そうすると，

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{I}\,\boldsymbol{\lambda}^-\,\mathbf{I}^{-1}\\
&=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}
e^{\gamma_2}+e^{-\gamma_2} & -\mathrm{i}(e^{\gamma_2}-e^{-\gamma_2}) & & & & & & 0\\
\mathrm{i}(e^{\gamma_2}-e^{-\gamma_2}) & e^{\gamma_2}+e^{-\gamma_2} & & & & & & \\
 & & e^{\gamma_2}+e^{-\gamma_2} & -\mathrm{i}(e^{\gamma_2}-e^{-\gamma_2}) & & & & \\
 & & \mathrm{i}(e^{\gamma_2}-e^{-\gamma_2}) & e^{\gamma_2}+e^{-\gamma_2} & & & & \\
 & & & & \ddots & & & \\
 & & & & & \ddots & & \\
 & & & & & & e^{\gamma_{2n}}+e^{-\gamma_{2n}} & -\mathrm{i}(e^{\gamma_{2n}}-e^{-\gamma_{2n}})\\
0 & & & & & & \mathrm{i}(e^{\gamma_{2n}}-e^{-\gamma_{2n}}) & e^{\gamma_{2n}}+e^{-\gamma_{2n}}
\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}
\cosh\gamma_2 & -\mathrm{i}\sinh\gamma_2 & & & & & & 0\\
\mathrm{i}\sinh\gamma_2 & \cosh\gamma_2 & & & & & & \\
 & & \cosh\gamma_4 & -\mathrm{i}\sinh\gamma_4 & & & & \\
 & & \mathrm{i}\sinh\gamma_4 & \cosh\gamma_4 & & & & \\
 & & & & \ddots & & & \\
 & & & & & \ddots & & \\
 & & & & & & \cosh\gamma_{2n} & -\mathrm{i}\sinh\gamma_{2n}\\
0 & & & & & & \mathrm{i}\sinh\gamma_{2n} & \cosh\gamma_{2n}
\end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{93}
$$

となる．これはさらに書き換えて，

$$
\mathbf{I}\,\boldsymbol{\lambda}^-\,\mathbf{I}^{-1}=\begin{pmatrix}
\cos\mathrm{i}\gamma_2 & -\sin\mathrm{i}\gamma_2 & & & & & & 0\\
\sin\mathrm{i}\gamma_2 & \cos\mathrm{i}\gamma_2 & & & & & & \\
 & & \cos\mathrm{i}\gamma_4 & -\sin\mathrm{i}\gamma_4 & & & & \\
 & & \sin\mathrm{i}\gamma_4 & \cos\mathrm{i}\gamma_4 & & & & \\
 & & & & \ddots & & & \\
 & & & & & \ddots & & \\
 & & & & & & \cos\mathrm{i}\gamma_{2n} & -\sin\mathrm{i}\gamma_{2n}\\
0 & & & & & & \sin\mathrm{i}\gamma_{2n} & \cos\mathrm{i}\gamma_{2n}
\end{pmatrix}\equiv\mathbf{K}
\tag{94}
$$

とすることができる．これを用いると，

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{t}^{-1}\,\mathbf{I}^{-1}\\
&=\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\begin{array}{cc:cc:c:cc}
\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_2+\delta_2/2)} & 0 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_4+\delta_4/2)} & 0 & \cdots & \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_{2n}+\delta_{2n}/2)} & 0\\
0 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_2-\delta_2/2)} & 0 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_4-\delta_4/2)} & & 0 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_{2n}-\delta_{2n}/2)}\\ \hdashline
\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_4+\delta_2/2)} & 0 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_8-\delta_4/2)} & 0 & \cdots & \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_{4n}+\delta_{2n}/2)} & 0\\
0 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_4-\delta_2/2)} & 0 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_8-\delta_4/2)} & & 0 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_{4n}-\delta_{2n}/2)}\\ \hdashline
\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_6+\delta_2/2)} & 0 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_{12}+\delta_4/2)} & 0 & \cdots & \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_{6n}+\delta_{2n}/2)} & 0\\
0 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_6-\delta_2/2)} & 0 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_{12}-\delta_4/2)} & & 0 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_{6n}-\delta_{2n}/2)}\\ \hdashline
& \vdots & & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \hdashline
\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_{2n}+\delta_2/2)} & 0 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_{4n}+\delta_4/2)} & 0 & \cdots & \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_{2n^2}+\delta_{2n}/2)} & 0\\
0 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_{2n}-\delta_2/2)} & 0 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_{4n}-\delta_4/2)} & & 0 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_{2n^2}-\delta_{2n}/2)}
\end{array}\right)\\
&\equiv\mathbf{T}
\end{aligned}
\tag{95}
$$

となる．この行列の 2×2 ブロックの第 a 行第 r 列は

$$
\begin{array}{:cc:}
\hdashline
\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_{2ar}+\delta_{2r}/2)} & 0\\
0 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_{2ar}-\delta_{2r}/2)}\\
\hdashline
\end{array}
\tag{96}
$$

である．このようにして，

$$
\mathbf{I}\,\boldsymbol{\lambda}^-\,\mathbf{I}^{-1}=\mathbf{It}\,\mathbf{R}_0^-\,\mathbf{t}^{-1}\,\mathbf{I}^{-1}=\mathbf{T}\,\mathbf{R}_0^-\,\mathbf{T}^{-1}=\mathbf{K} \tag{O-56}
$$

という関係が得られる．

この関係式 (O-56) は $\mathbf{V}_0^-$ の固有値を得るために重要な式である．この式は論文の式と同じであるが，その中の $\mathbf{I}$ と $\mathbf{T}$ は異なる．論文の式 (O-58) はこの式 (O-56) の定義では導くことができない．対角行列 $\boldsymbol{\lambda}^-$ を相似変換により式 (94) のような canonical 形式にするには，式 (92) の形のユニタリ行列が必須であり，それを用いて $\mathbf{T}=\mathbf{It}$ を計算しても，式 (O-58) にはならないのである．Kaufman はこの部分をごまかしているのではないだろうか．彼は論文で，$\mathbf{I}$ を与えておらず，$\mathbf{T}$ のスピノール表現を具体的に求める必要はない，直交行列であることを確かめれば十分である，と書いているのもごまかすための苦しい文章であるような気がする．

それなら，Kaufman はなぜこの部分をごまかそうとしたのだろうか．それには，式 (O-56) の意味を考えてみよう．まず，$\mathbf{R}_0^-$ の固有値を用いて $2n$ 次元の平面の回転を表す canonical 形式 $\mathbf{K}$ が表される．これから，$\mathbf{K}$ の 2^n 次元空間の演算子が求められる．もし，この $\mathbf{S}(\mathbf{K})$ の固有値が $\mathbf{V}_0^-$ の固有値に等しければ，つまり $\mathbf{S}(\mathbf{K})$ と $\mathbf{V}_0^-$ の間に相似変換の関係が成り立てば $\mathbf{V}_0^-$ の固有値は求められたということになる．そのときの 2^n 次元空間の相似変換関係が，式 (O-56) の $2n$ 次元空間の相似変換関係から直接そのまま移すことができれば良いのだが，果たしてできるのだろうか，という問題がある．

Kaufman は論文の式 (O-58)（この式は導くことができない）の $\mathbf{T}$ を用いてそれが直交行列であることを示し，したがって，回転 $\mathbf{T}$ を表す 2^n 次元空間の演算子 $\mathbf{S}(\mathbf{T})$ が存在するので，

$$
\mathbf{T}\,\mathbf{R}_0^-\,\mathbf{T}^{-1}=\mathbf{K} \tag{O-56}
$$

の関係から，

$$
\mathbf{S}(\mathbf{T})(\mathbf{V}_0^-)\mathbf{S}(\mathbf{T})^{-1}=\mathbf{S}(\mathbf{K}) \tag{O-59}
$$

という相似変換の関係式が 2^n 次元空間で表現されるので，結局，$\mathbf{V}_0^-$ の固有値が得られる，と結んでいる．しかし，これは 2 つの点でおかしい．

まず，一つは論文のように直交行列 $\mathbf{T}$ が導かれないことである．論文に書いてある条件で行列 $\mathbf{T}$ を求めると式 (93) となり，これはユニタリ行列であって直交行列ではない．

もう一つは，ユニタリ行列もユニタリ空間での一般的な回転を表すが，式 (O-10) の反交換条件を満たす基底変換の係数が複素数の場合にも，係数の行列がユニタリ行列になるか，という問題である．ただし，Kaufman は論文では o_{jk} は一般に複素数であると述べている．

この部分が明確にならないために，Kaufman は論文の中で式 (O-58) のような直交行列を考えだして，矛盾をごまかすために行列 $\mathbf{I}$ を明示しなかったのではないのだろうか，と思われる．

では，基底変換の係数 o_{jk} が複素数の場合に，変換の定義を拡張することにより，係数行列がユニタリ行列になるのか，確かめてみることにしよう．いま，問題を複雑にしているのは，$\mathbf{\Gamma}_k$ が 2^n 次元ユニタリ空間の行列であると同時に，$2n$ 次元空間のベクトル基底としても扱われていることである．さらに，$2n$ 次元空間の回転を考えているから，回転によって長さが変わらないという意味で，$2n$ 次元空間の計量が必要である．ユークリッド空間の場合は，実数であるから暗黙の定量の定義で問題ないが，複素数の場合は計量を伴った定義が必要である．さらに，反交換関係 (O-10) が要請されるために，計量の設定を厳密に定義する上で，やや，曖昧な部分が残っているかもしれない．

まず，

$$\mathbf{\Gamma}_k^* = \sum_{j=1}^{2n} o_{jk}\mathbf{\Gamma}_j \tag{O-17}$$

とする．2 個以上の $\mathbf{\Gamma}_k$ の積の場合，例えば，$\mathbf{\Gamma}_k$ と $\mathbf{\Gamma}_l$ の積を考えよう．計量を取り入れれば，一方は転置複素共役でなければならない．しかし，元々2^n 次元空間の行列を $2n$ 次元空間のベクトル基底とみなしているわけであるから，転置という概念，あるいは $\mathbf{\Gamma}_k$ に対する双対な量がないので，ここでは $\mathbf{\Gamma}_k$ は双対な量を兼ねると考える．つまり，$[\quad]^*$ で双対量を表すことにすると，$[\mathbf{\Gamma}_k]^*$ は $\mathbf{\Gamma}_k$ の双対量で，$[\mathbf{\Gamma}_k]^* = \mathbf{\Gamma}_k$，$[\mathbf{\Gamma}_k^*]^* = \mathbf{\Gamma}_k^*$ でなければならない．すなわち，$\mathbf{\Gamma}_k$ と $\mathbf{\Gamma}_l$ の計量積は

$$[\mathbf{\Gamma}_k]^*\mathbf{\Gamma}_l = \mathbf{\Gamma}_k\mathbf{\Gamma}_l = \mathbf{\Gamma}_k[\mathbf{\Gamma}_l]^*, \qquad [\mathbf{\Gamma}_k^*]^*\mathbf{\Gamma}_l^* = \mathbf{\Gamma}_k^*\mathbf{\Gamma}_l^* = \mathbf{\Gamma}_k^*[\mathbf{\Gamma}_l^*]^*, \tag{97}$$

ということになる．この定義を式 (O-17) に適用すると，紛らわしいが o_{ik} の複素数を o_{ik}^* と表すことにすれば，

$$\mathbf{\Gamma}_k^*\mathbf{\Gamma}_l^* = \sum_{i,j=1}^{2n} o_{ik}^* o_{jl}\mathbf{\Gamma}_i\mathbf{\Gamma}_j = \sum_{i,j=1}^{2n} o_{ik} o_{jl}^*\mathbf{\Gamma}_i\mathbf{\Gamma}_j \tag{98}$$

となる．

$2n$ 次元空間の計量を求めるときには，上のように解釈し，一方，2^n 次元空間の行列とみなす場合は，単に行列の積とみなすことになることに注意が必要である．

以上の考えを基に，$2n$ 次元の回転の係数 o_{kl} の関係を明らかにするために $2n$ 次元空間における $\mathbf{\Gamma}_k^*$ と $\mathbf{\Gamma}_l^*$ の計量積を考えよう．そうすると，

$$\begin{aligned}\mathbf{\Gamma}_k^*\mathbf{\Gamma}_l^* &= \sum_{i,j=1,i\neq j}^{2n} o_{ik}^* o_{jl}\mathbf{\Gamma}_i\mathbf{\Gamma}_j + \sum_{j=1}^{2n} o_{jk}^* o_{jl}\mathbf{\Gamma}_j^2 \\ &= \sum_{i,j=1,i\neq j}^{2n} o_{ik}^* o_{jl}\mathbf{\Gamma}_i\mathbf{\Gamma}_j + \sum_{j=1}^{2n} o_{jk}^* o_{jl}\end{aligned} \tag{99}$$

一方，式 (98) の第 2 式を用い，第 2 式右辺第 1 項で i と j を入れ替えれば，

$$\begin{aligned}\mathbf{\Gamma}_l^*\mathbf{\Gamma}_k^* &= \sum_{i,j=1,i\neq j}^{2n} o_{il} o_{jk}^*\mathbf{\Gamma}_i\mathbf{\Gamma}_j + \sum_{j=1}^{2n} o_{jl} o_{jk}^*\mathbf{\Gamma}_j^2 \\ &= \sum_{i,j=1,i\neq j}^{2n} o_{jl} o_{ik}^*\mathbf{\Gamma}_j\mathbf{\Gamma}_i + \sum_{j=1}^{2n} o_{jl} o_{jk}^*\end{aligned} \tag{100}$$

となる．式 (99) と (100) を辺辺加えて式 (O-10) の反交換関係を用いると，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Gamma}_k^*\boldsymbol{\Gamma}_l^* + \boldsymbol{\Gamma}_l^*\boldsymbol{\Gamma}_k^* &= \sum_{i\neq j}^{2n} o_{jl}o_{ik}^*(\boldsymbol{\Gamma}_i\boldsymbol{\Gamma}_j + \boldsymbol{\Gamma}_j\boldsymbol{\Gamma}_i) + 2\sum_{j=1}^{2n} o_{jl}o_{jk}^* \\ &= 2\sum_{j=1}^{2n} o_{jk}^* o_{jl} \end{aligned} \tag{101}$$

となる．これから，$\boldsymbol{\Gamma}_k^*$ と $\boldsymbol{\Gamma}_l^*$ が式 (O-10) の反交換関係を満たすためには，

$$\sum_{j=1}^{2n} o_{jk}^* o_{jl} = \delta_{kl} \tag{102}$$

でなければならない．この関係式は ${}^{\mathrm{t}}\mathbf{o}^*\mathbf{o} = \mathbf{1}$ であり，行列 $\mathbf{o}$ がユニタリ行列であることを示している．すなわち，$\mathbf{o}$ は $2n$ 次元ユニタリ空間の回転を表すことがわかる．

しかし，ここで重要なことはユニタリ空間での回転がユニタリ行列で表され，ユニタリ行列であれば，それが表す 2^n 次元空間から 2^n 次元空間への写像は 2^n 次元空間おいて相似変換する行列 $\mathbf{S}(\mathbf{o})$ が存在するということである．そうなることの必要十分条件は,「その 2」の付録の条件 I であったが，それを再掲すると，

$$\begin{aligned}&(\lambda X)^* = \lambda X^* \\ &(X+Y)^* = X^* + Y^* \\ &(XY)^* = X^*Y^* \end{aligned} \tag{I}$$

である．これは,「その 2」の付録 B で述べたように，$\boldsymbol{\Gamma}_k$ および $\boldsymbol{\Gamma}_k^*$ において，反交換関係 (O-10) が満たされれば成り立つことを示した．つまり，$2n$ 次元ユニタリ空間の回転により，2^n 次元空間の行列がもう 1 つの行列へ写像された場合，2 つの行列は相似変換関係にあり，その回転に対応する相似変換の行列が必ず存在する，ということである．結局，長くなったが，$2n$ 次元ユークリッド空間の場合と同じ関係式が成立するということである．

以上の結果から，$\boldsymbol{\Gamma}_k$ に，ユニタリ行列で表される回転 $\mathbf{o}$ を施すと，変換された $\boldsymbol{\Gamma}_k^*$ は 2^n 次元空間で $\boldsymbol{\Gamma}_k$ の $\mathbf{S}(\mathbf{o})$ による相似変換で表すことができることがわかった．一方，式 (95) の $\mathbf{T}$ は明らかにユニタリ行列である．したがって，$\mathbf{T}$ によって回転される 2^n 次元空間の行列は，$\mathbf{S}(\mathbf{T})$ という行列が存在して，相似変換で表すことができる．すなわち，

$$\mathbf{T} : \boldsymbol{\Gamma}_k \to \sum_{j=1}^{2n} T_{jk}\boldsymbol{\Gamma}_j = \mathbf{S}(\mathbf{T})\boldsymbol{\Gamma}_k\mathbf{S}(\mathbf{T})^{-1} \tag{103}$$

となるような $\mathbf{S}(\mathbf{T})$ が存在する．したがって，式 (O-56) で示される回転は，$\mathbf{S}(\mathbf{T})$ を用いて，

$$\mathbf{S}(\mathbf{T}\ \mathbf{R}_\mathbf{0}^-\ \mathbf{T}^{-1}) = \mathbf{S}(\mathbf{T})\ \mathbf{V}_\mathbf{0}^-\ \mathbf{S}(\mathbf{T})^{-1} \tag{104}$$

と相似変換することができる．一方，$\mathbf{T}\,\mathbf{R}_0^-\,\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{K}$ は canonical 形式であるから，式 (O-29) の形式になり，固有値が式 (44) として求められる．これから，$\mathbf{S}(\mathbf{T})\mathbf{V}_\mathbf{0}^-\mathbf{S}(\mathbf{T})^{-1}$ の固有値も式 (46) として求められる．したがって，$\mathbf{V}_0^-$ の固有値はこの行列の固有値に等しいから，結局，$\mathbf{V}_0^-$ の固有値が求められることになる．すなわち，

$$\mathbf{S}(\mathbf{T})(\mathbf{V}_0^-)\mathbf{S}(\mathbf{T})^{-1} = \mathbf{S}(\mathbf{K}) = \prod_{r=1}^{n} \exp[-\frac{\mathrm{i}}{2}\gamma_{2r}\mathbf{P}_r\mathbf{Q}_r] \tag{O-59}$$

となるので，$\exp[-\frac{\mathrm{i}}{2}\gamma_{2r}\mathbf{P}_r\mathbf{Q}_r]$ を対角化すれば固有値は求まる．

* * * * *

Diagonalizatioin of $\mathbf{V}^-$

上の式 (O-59) で，$\exp[-\frac{\mathrm{i}}{2}\gamma_{2r}\mathbf{P}_r\mathbf{Q}_r]$ はまだ対角化されていない．なぜなら，$\mathrm{i}\mathbf{P}_r\mathbf{Q}_r = -\mathbf{C}_r$ だからである．しかし，これは式 (O-16) の $\mathbf{g}$ を用いることで対角化できる．すなわち，

$$\mathbf{g} = 2^{n/2}(\mathbf{C}+\mathbf{s})\otimes(\mathbf{C}+\mathbf{s})\otimes\cdots\otimes(\mathbf{C}+\mathbf{s}) = \mathbf{g}^{-1} \tag{105}$$

$$\mathbf{g}\mathbf{C}_r\mathbf{g}^{-1} \tag{106}$$

を用いれば良い．ちなみに，$\mathbf{g}$ は $2n$ 次元の回転を表してはいない．この $\mathbf{g}$ を用いると，

$$\mathbf{g}\mathbf{S}(\mathbf{T})(\mathbf{V}_0^-)\mathbf{S}(\mathbf{T})^{-1}\mathbf{g} = \mathbf{g}\mathbf{S}(\mathbf{K})\mathbf{g} = \mathbf{\Lambda}^- \tag{O-60}$$

となる．

ここで，$\mathbf{H}$ を導入し，$\mathbf{V}_1^{-1/2}$ の回転を表すことにする．すなわち，

$$\mathbf{H}\colon \quad \begin{array}{l} \mathbf{P}_r \to \cosh H^*\mathbf{P}_r - \mathrm{i}\sinh H^* Q_r \\ \mathbf{Q}_r \to \mathrm{i}\sinh H^*\mathbf{P}_r + \mathrm{i}\cosh H^* Q_r \end{array} \tag{O-63}$$

とすると，

$$\mathbf{V}_0^- = \mathbf{V}_1^{-1/2}\mathbf{V}^-\mathbf{V}_1^{1/2} = \mathbf{S}(\mathbf{H})\mathbf{V}^-\mathbf{S}(\mathbf{H})^{1/2} \tag{107}$$

であるから，式 (O-60) と組み合わせて，

$$\mathbf{g}\mathbf{S}(\mathbf{TH})(\mathbf{V}^-)\mathbf{S}(\mathbf{TH})^{-1}\mathbf{g} \equiv \mathbf{\Psi}_-(\mathbf{V}^-)\mathbf{\Psi}_-^{-1} = \mathbf{\Lambda}^- \tag{O-61}$$

となる．ただし，

$$\mathbf{\Psi}_- = \mathbf{g}\mathbf{S}(\mathbf{TH}) \tag{O-62}$$

である．この $\mathbf{\Psi}_-$ について，Kaufman は，これに含まれる回転は十分把握されているにも拘らず，$\mathbf{S}(\mathbf{T})$ が複雑であるため具体的に書き下ろすことができない，と述べている．また，$\mathbf{\Psi}_-(\mathbf{X})\mathbf{\Psi}_-^{-1}$ の形を評価するのは余り難しくなく，それが実は重要な物理的意味を持っていて，それはこのシリーズの論文の第 3 番目の論文で説明する，と述べている．

* * * * *

Analogous Results for $\mathbf{V}^+$

$\mathbf{V}^+$ の固有値と固有ベクトルはまだ見出していない．ここで，再度 $\mathbf{V}^+$ を書き下ろすと，

$$\mathbf{V}^+ = \prod_{r=1}^{n}\exp(-\mathrm{i}H^*\mathbf{P}_r\mathbf{Q}_r)\prod_{r=1}^{n-1}\exp(\mathrm{i}H'\mathbf{P}_{r+1}\mathbf{Q}_r)\exp(-\mathrm{i}H'\mathbf{P}_1\mathbf{Q}_n) = \mathbf{S}(\mathbf{R}^+) \tag{O-64}$$

である．式 (61) と同様にして，これと式 (1) から，

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_0^+ &= \mathbf{V}_1^{-1/2}\mathbf{V}^+\mathbf{V}_1^{1/2} \\ &= \prod_{r=1}^{n}\exp(-\frac{\mathrm{i}}{2}H^*\mathbf{P}_r\mathbf{Q}_r)\prod_{r=1}^{n-1}\exp(\mathrm{i}H'\mathbf{P}_{r+1}\mathbf{Q}_r)\exp(-\mathrm{i}H'\mathbf{P}_1\mathbf{Q}_n)\prod_{r=1}^{n}\exp(-\frac{\mathrm{i}}{2}H^*\mathbf{P}_r\mathbf{Q}_r) \\ &= \prod_{r=1}^{n}\exp(-\frac{\mathrm{i}}{2}H^*\mathbf{P}_r\mathbf{Q}_r)\prod_{r=1}^{n-1}\exp(-\mathrm{i}H'\mathbf{Q}_r\mathbf{P}_{r+1})\exp(\mathrm{i}H'\mathbf{Q}_n\mathbf{P}_1)\prod_{r=1}^{n}\exp(-\frac{\mathrm{i}}{2}H^*\mathbf{P}_r\mathbf{Q}_r) \end{aligned} \tag{108}$$

となる．この式と式 (O-41) を比較すると，式 (108) の因子 $\exp(\mathrm{i}H'\mathbf{Q}_n\mathbf{P}_1)$ の指数部の符号のみが異なる．したがって，$\prod_{r=1}^{n-1}\exp(-\mathrm{i}H'\mathbf{Q}_r\mathbf{P}_{r+1})\exp(\mathrm{i}H'\mathbf{Q}_n\mathbf{P}_1)$ の部分を回転の行列にすると，

$$\begin{pmatrix} \cosh 2H' & & & & & \cdots & \mathrm{i}\sinh 2H' \\ & \cosh 2H' & \mathrm{i}\sinh 2H' & & & & \\ & -\mathrm{i}\sinh 2H' & \cosh 2H' & & & & \\ & & & \cosh 2H' & \mathrm{i}\sinh 2H' & & \\ & & & -\mathrm{i}\sinh 2H' & \cosh 2H' & & \\ \vdots & & & & & \ddots & \\ -\mathrm{i}\sinh 2H' & & & & & & \cosh 2H' \end{pmatrix} \tag{109}$$

となり，式 (??) と比較すると赤字の部分の符号が異なる．したがって，$\mathbf{V}_0^+$ に対応する $2n$ 次元空間の行列 $\mathbf{R}_0^+$ は

$$\mathbf{R}_0^+ = \boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & -\mathbf{b}^* \\ \mathbf{b}^* & \mathbf{a} & \mathbf{b} & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{b}^* & \mathbf{a} & \mathbf{b} & 0 & \cdot & \cdot & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ -\mathbf{b} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \mathbf{b}^* & \mathbf{a} \end{pmatrix} \tag{110}$$

と変わる．式 (72) の $\mathbf{R}_0^-$ と比較して，赤字の部分の符号が変わっている．

ここで，

$$\begin{pmatrix} \epsilon^{2r-1}\mathbf{W}_{2r-1} \\ \epsilon^{2(2r-1)}\mathbf{W}_{2r-1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \epsilon^{(n-1)(2r-1)}\mathbf{W}_{2r-1} \\ \epsilon^{n(2r-1)}\mathbf{W}_{2r-1} \end{pmatrix}, \qquad (r = 1, \cdots, n) \tag{O-66}$$

の形の固有ベクトルを考えよう．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}\begin{pmatrix} \epsilon^{2r-1}\mathbf{W}_{2r-1} \\ \epsilon^{2(2r-1)}\mathbf{W}_{2r-1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \epsilon^{(n-1)(2r-1)}\mathbf{W}_{2r-1} \\ \epsilon^{n(2r-1)}\mathbf{W}_{2r-1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (\epsilon^{2r-1}\mathbf{a} + \epsilon^{2(2r-1)}\mathbf{b} - \epsilon^{n(2r-1)}\mathbf{b}^*)\mathbf{W}_{2r-1} \\ (\epsilon^{2r-1}\mathbf{b}^* + \epsilon^{2(2r-1)}\mathbf{a} + \epsilon^{3(2r-1)}\mathbf{b})\mathbf{W}_{2r-1} \\ (\epsilon^{2(2r-1)}\mathbf{b}^* + \epsilon^{3(2r-1)}\mathbf{a} + \epsilon^{4(2r-1)}\mathbf{b})\mathbf{W}_{2r-1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ (\epsilon^{(n-2)(2r-1)}\mathbf{b}^* + \epsilon^{(n-1)(2r-1)}\mathbf{a} + \epsilon^{n(2r-1)}\mathbf{b})\mathbf{W}_{2r-1} \\ (-\epsilon^{2r-1}\mathbf{b} + \epsilon^{(n-1)(2r-1)}\mathbf{b}^* + \epsilon^{n(2r-1)}\mathbf{a})\mathbf{W}_{2r-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\epsilon^{2r-1}\mathbf{a} + \epsilon^{2(2r-1)}\mathbf{b} - \epsilon^{n(2r-1)}\mathbf{b}^*)\mathbf{W}_{2r-1} \\ \epsilon^{2(2r-1)}[\epsilon^{-(2r-1)}\mathbf{b}^* + \mathbf{a} + \epsilon^{(2r-1)}\mathbf{b}]\mathbf{W}_{2r-1} \\ \epsilon^{3(2r-1)}[\epsilon^{-(2r-1)}\mathbf{b}^* + \mathbf{a} + \epsilon^{(2r-1)}\mathbf{b}]\mathbf{W}_{2r-1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \epsilon^{(n-1)(2r-1)}[\epsilon^{-(2r-1)}\mathbf{b}^* + \mathbf{a} + \epsilon^{n-(2r-1)}\mathbf{b}]\mathbf{W}_{2r-1} \\ (-\epsilon^{2r-1}\mathbf{b} + \epsilon^{(n-1)(2r-1)}\mathbf{b}^* + \epsilon^{n(2r-1)}\mathbf{a})\mathbf{W}_{2r-1} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{111}$$

となる．ここで，$\epsilon^n = \mathrm{e}^{n\pi i/n} = -1$ であるから，第 1 行と第 n 行について，それぞれ変形すると，

$$\begin{aligned}
\epsilon^{2r-1}\mathbf{a} + \epsilon^{2(2r-1)}\mathbf{b} - \epsilon^{n(2r-1)}\mathbf{b}^* &= \epsilon^{2r-1}\mathbf{a} + \epsilon^{2(2r-1)}\mathbf{b} - \epsilon^n\mathbf{b}^* \\
&= \epsilon^{2r-1}\mathbf{a} + \epsilon^{2(2r-1)}\mathbf{b} + \mathbf{b}^* \\
&= \epsilon^{2r-1}[\mathbf{a} + \epsilon^{(2r-1)}\mathbf{b} + \epsilon^{-(2r-1)}\mathbf{b}^*]
\end{aligned} \tag{112}$$

および，

$$\begin{aligned}
-\epsilon^{(2r-1)}\mathbf{b} + \epsilon^{(n-1)(2r-1)}\mathbf{b}^* + \epsilon^{n(2r-1)}\mathbf{a} &= -\epsilon^{(2r-1)}\mathbf{b} + \epsilon^{-(2r-1)+2nr-n}\mathbf{b}^* + \epsilon^{2nr-n}\mathbf{a} \\
&= -\epsilon^{(2r-1)}\mathbf{b} - \epsilon^{-(2r-1)}\mathbf{b}^* - \mathbf{a} \\
&= \epsilon^{n(2r-1)}[\epsilon^{(2r-1)}\mathbf{b} + \epsilon^{-(2r-1)}\mathbf{b}^* + \mathbf{a}]
\end{aligned} \tag{113}$$

となる．したがって，これを式 (111) に代入すると，

$$\boldsymbol{\alpha}\begin{pmatrix} \epsilon^{2r-1}\mathbf{W}_{2r-1} \\ \epsilon^{2(2r-1)}\mathbf{W}_{2r-1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \epsilon^{(n-1)(2r-1)}\mathbf{W}_{2r-1} \\ \epsilon^{n(2r-1)}\mathbf{W}_{2r-1} \end{pmatrix} = \boldsymbol{\alpha}_{2r-1}\mathbf{W}_{2r-1}\begin{pmatrix} \epsilon^{2r-1} \\ \epsilon^{2(2r-1)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \epsilon^{(n-1)(2r-1)} \\ \epsilon^{n(2r-1)} \end{pmatrix} \tag{114}$$

となる．ただし，

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\alpha}_{2r-1} &= \mathbf{a} + \epsilon^{(2r-1)}\mathbf{b} + \epsilon^{-(2r-1)}\mathbf{b}^* \\
&= \begin{pmatrix} c_2'c_2^* - \dfrac{1}{2}[\epsilon^{(2r-1)} + \epsilon^{-(2r-1)}]s_2's_2^* & \mathrm{i}c_2's_2^* - \mathrm{i}s_2'[\epsilon^{(2r-1)}s^{*2} + \epsilon^{-(2r-1)}c^{*2}] \\ -\mathrm{i}c_2's_2^* + \mathrm{i}s_2'[\epsilon^{(2r-1)}c^{*2} + \epsilon^{-(2r-1)}s_2's^{*2}] & c_2'c_2^* - \dfrac{1}{2}[\epsilon^{(2r-1)} + \epsilon^{-(2r-1)}]s_2's_2^* \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} c_2'c_2^* - \cosh\dfrac{\pi\mathrm{i}(2r-1)}{n}s_2's_2^* & \mathrm{i}c_2's_2^* - \mathrm{i}s_2'(\cosh\dfrac{\pi\mathrm{i}(2r-1)}{n}c_2^* - \mathrm{i}\cosh\dfrac{\mathrm{i}\pi(2r-1)}{n}) \\ -\mathrm{i}c_2's_2^* + \mathrm{i}s_2'(\cosh\dfrac{\pi\mathrm{i}(2r-1)}{n}c_2^* + \mathrm{i}\cosh\dfrac{\mathrm{i}\pi(2r-1)}{n}) & c_2'c_2^* - \cosh\dfrac{\pi\mathrm{i}(2r-1)}{n}s_2's_2^* \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{115}$$

である．ここで，$\omega_{2r-1} = \pi(2r-1)/n$ とおいて，図 1 の ω_{2r}，δ'_{2r}，δ^*_{2r} を ω_{2r-1}，δ'_{2r-1}，δ^*_{2r-1} と置き換えた[8]，次の双曲余弦定理および双曲正弦定理

$$\begin{aligned}
&\gamma_{2r-1} = \cosh 2H'\cosh 2H^* - \sinh 2H'\sinh 2H^*\cos\omega_{2r-1} \\
&\sinh 2H^*\cosh 2H' - \cosh 2H^*\sinh 2H'\cos\omega_{2r-1} = \sinh\gamma_{2r-1}\cos\delta'_{2r-1} \\
&\frac{\sinh 2H'}{\sin\delta'_{2r-1}} = \frac{\sinh\gamma_{2r-1}}{\sin\omega_{2r-1}}
\end{aligned} \tag{116}$$

[8]つまり，図 1 の 2 辺 $2H'$ と $2H^*$ およびその間の角 $\omega_{2r-1} = \pi(2r-1)/n$ が決まれば対辺 γ_{2r-1} と両端の角 δ'_{2r-1} と δ^*_{2r-1} は自動的に決まる．

を適用すると，

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\alpha}_{2r-1} &= \begin{pmatrix} \cosh\gamma_{2r-1} & \mathrm{i}\sinh\gamma_{2r-1}\cos\delta'_{2r-1} - \sinh 2H'\sin\omega_{2r-1} \\ -\mathrm{i}\sinh\gamma_{2r-1}\cos\delta'_{2r-1} - \sinh 2H'\sin\omega_{2r-1} & \cosh\gamma_{2r-1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cosh\gamma_{2r-1} & \mathrm{i}\sinh\gamma_{2r-1}\cos\delta'_{2r-1} - \sinh\gamma_{2r-1}\sin\delta'_{2r-1} \\ -\mathrm{i}\sinh\gamma_{2r-1}\cos\delta'_{2r-1} - \sinh\gamma_{2r-1}\sin\delta'_{2r-1} & \cosh\gamma_{2r-1} \end{pmatrix} \\
&= \cosh\gamma_{2r-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \mathrm{i}\sinh\gamma_{2r-1}\begin{pmatrix} 0 & \cos\delta'_{2r-1} + \mathrm{i}\sin\delta'_{2r-1} \\ -\cos\delta'_{2r-1} + \mathrm{i}\sin\delta'_{2r-1} & 0 \end{pmatrix} \\
&= \cosh\gamma_{2r-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \mathrm{i}\sinh\gamma_{2r-1}\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{e}^{\delta'_{2r-1}} \\ -\mathrm{e}^{-\delta'_{2r-1}} & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{117}$$

となる．これより，$\boldsymbol{\alpha}_{2r-1}$ の固有値は $\mathrm{e}^{\pm\gamma_{2r-1}}$，行列式は 1，跡は $2\cosh\gamma_{2r-1}$ であることがわかる．

固有ベクトルは，$\lambda = \mathrm{e}^{\gamma_{2r-1}}$ のとき，となり，正規化した固有ベクトルは，対称性を考えて，

$$\mathbf{W_{2r-1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta'_{2r-1}/2} \\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta'_{2r-1}/2} \end{pmatrix} \tag{118}$$

となる．$\lambda = \mathrm{e}^{\gamma_{2r}}$ のときも同様にして，

$$\mathbf{W_{2r-1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta'_{2r}/2} \\ \mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta'_{2r}/2} \end{pmatrix} \tag{119}$$

となる．これを $\boldsymbol{\alpha}_{2r}$ の場合と比較すると，固有値と固有ベクトルが互いに入れ替わっている．したがって，$\boldsymbol{\alpha}$ の固有ベクトルは，$\lambda = \mathrm{e}^{\gamma_{2r}}$ と $\lambda = \mathrm{e}^{-\gamma_{2r}}$ に対応して，それぞれ，

$$\mathbf{u}_{2r-1} \equiv \frac{1}{\sqrt{2n}}\begin{pmatrix} \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_{2r}+\delta'_{2r}/2)} \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_{2r}-\delta'_{2r}/2)} \\ \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_{4r}+\delta'_{2r}/2)} \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_{4r}-\delta'_{2r}/2)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_{2nr}+\delta'_{2r}/2)} \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_{2nr}-\delta'_{2r}/2)} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}_{2r-1} \equiv \frac{1}{\sqrt{2n}}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_{2r}+\delta'_{2r}/2)} \\ \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_{2r}-\delta'_{2r}/2)} \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_{4r}+\delta'_{2r}/2)} \\ \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_{4r}-\delta'_{2r}/2)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_{2nr}+\delta'_{2r}/2)} \\ \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_{2nr}-\delta'_{2r}/2)} \end{pmatrix} \tag{120}$$

となる．

$\mathbf{R}_0^+$ を対角化する行列 $\mathbf{t}^{-1}$ は上の固有ベクトルを横に並べた行列として次のようになる．

$$\mathbf{t}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{v}_1 & \mathbf{u}_3 & \mathbf{v}_3 & \cdots & \mathbf{u}_{2n-1} & \mathbf{v}_{2n-1} \end{pmatrix} \tag{121}$$

$$\mathbf{t}\mathbf{R}_0^+\mathbf{t}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\gamma_1} & & & & & & & 0 \\ & \mathrm{e}^{-\gamma_1} & & & & & & \\ & & \mathrm{e}^{\gamma_3} & & & & & \\ & & & \mathrm{e}^{-\gamma_3} & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & \mathrm{e}^{\gamma_{2n-1}} & \\ 0 & & & & & & & \mathrm{e}^{-\gamma_{2n-1}} \end{pmatrix} \equiv \boldsymbol{\lambda}^+ \tag{122}$$

$$
\mathbf{I}\,\boldsymbol{\lambda}^{+}\,\mathbf{I}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}
\cos\mathrm{i}\gamma_1 & -\sin\mathrm{i}\gamma_1 & & & & & & 0\\
\sin\mathrm{i}\gamma_1 & \cos\mathrm{i}\gamma_1 & & & & & & \\
 & & \cos\mathrm{i}\gamma_3 & -\sin\mathrm{i}\gamma_3 & & & & \\
 & & \sin\mathrm{i}\gamma_3 & \cos\mathrm{i}\gamma_3 & & & & \\
 & & & & \ddots & & & \\
 & & & & & \ddots & & \\
 & & & & & & \cos\mathrm{i}\gamma_{2n-1} & -\sin\mathrm{i}\gamma_{2n-1}\\
0 & & & & & & \sin\mathrm{i}\gamma_{2n-1} & \cos\mathrm{i}\gamma_{2n-1}
\end{pmatrix} \tag{123}
$$

となる．

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{t}^{-1}\,\mathbf{I}^{-1}\\
&=\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\begin{array}{cc|cc|c|cc}
0 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_1+\delta_1/2)} & 0 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_3+\delta_3/2)} & \cdots & 0 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_{2n-1}+\delta_{2n-1}/2)}\\
\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_1-\delta_1/2)} & 0 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_3-\delta_3/2)} & 0 & & \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_{2n-1}-\delta_{2n-1}/2)} & 0\\ \hline
0 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_2+\delta_1/2)} & 0 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_6-\delta_3/2)} & \cdots & 0 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_{2(2n-1)}+\delta_{2n-1}/2)}\\
\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_2-\delta_1/2)} & 0 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_6-\delta_3/2)} & 0 & & \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_{2(2n-1)}-\delta_{2n-1}/2)} & 0\\ \hline
0 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_3+\delta_1/2)} & 0 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_9+\delta_3/2)} & \cdots & 0 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_{3(2n-1)}+\delta_{2n-1}/2)}\\
\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_3-\delta_1/2)} & 0 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_9-\delta_3/2)} & 0 & & \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_{3(2n-1)}-\delta_{2n-1}/2)} & 0\\ \hline
\multicolumn{2}{c|}{\vdots} & \multicolumn{2}{c|}{\vdots} & \ddots & \multicolumn{2}{c}{\vdots}\\ \hline
0 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_n+\delta_1/2)} & 0 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_{3n}+\delta_3/2)} & \cdots & 0 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_{n(2n-1)}+\delta_{2n-1}/2)}\\
\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_n-\delta_1/2)} & 0 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_{3n}-\delta_3/2)} & 0 & & \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_{n(2n-1)}-\delta_{2n-1}/2)} & 0
\end{array}\right)\\
&\equiv\mathbf{T}
\end{aligned} \tag{124}
$$

この行列の 2×2 ブロックの第 a 行第 r 列は

$$
\boxed{\begin{array}{cc}
0 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_{a(2r-1)}+\delta_{2r-1}/2)}\\
\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_{a(2r-1)}-\delta_{2r-1}/2)}0 &
\end{array}} \tag{125}
$$

である．

以上のようにして，$\mathbf{V}_0^+$ の場合も固有値を求めることができた．求める固有値は γ_{2r} と γ_{2r-1} であるが，それぞれ双曲余弦定理により，H'，H^*, および整数 $1\le r\le n$ から計算できる．

また，$\mathbf{V}_0^-$ の場合と同様に，

$$
\mathbf{V}_0^+=\mathbf{V}_1^{-1/2}\mathbf{V}^+\mathbf{V}_1^{1/2}=\mathbf{S}(\mathbf{H})\mathbf{V}^+\mathbf{S}(\mathbf{H})^{1/2} \tag{126}
$$

であるから，式 (O-60) の場合と同様に，

$$
\mathbf{gS}(\mathbf{TH})(\mathbf{V}^+)\mathbf{S}(\mathbf{TH})^{-1}\mathbf{g}\equiv\boldsymbol{\Psi}_+(\mathbf{V}^+)\boldsymbol{\Psi}_+^{-1}=\boldsymbol{\Lambda}^+ \tag{O-61}
$$

となる．ただし，

$$
\boldsymbol{\Psi}_+=\mathbf{gS}(\mathbf{TH}) \tag{O-62}
$$

である．

＊　＊　＊　＊　＊

4. DISCUSSION OF THE PARTITION FUNCTION

$\mathbf{V}$ の固有値は 2^n 個存在する．したがって,「その 1」で述べたように,

$$Z = \sum_{i=1}^{2^n} \lambda_i^m \tag{127}$$

である．m が十分大きい場合は,

$$Z \sim f\lambda_{\max}^m \tag{128}$$

としてよい．f は $\lambda_{\max}$ の縮重度である．

$2n$ 次元空間の回転 $\mathbf{R}_0^-$ と $\mathbf{R}_0^+$ の固有値が式 (O-55) と式 (120) のように求められた．これに対応する 2^n 次元の行列 $\mathbf{V}_0^-$ と $\mathbf{V}_0^+$ の固有値 λ^- とは λ^+ は

$$\ln\lambda^- \equiv \frac{1}{2}(\pm\gamma_2 \pm \gamma_4 \pm \cdots \gamma_{2n}) \tag{O-71}$$

$$\ln\lambda^- \equiv \frac{1}{2}(\pm\gamma_1 \pm \gamma_3 \pm \cdots \gamma_{2n-1}) \tag{O-72}$$

となる．それぞれの固有値は複号の全ての組み合わせ，すなわち，2^n 個存在する．最大となる固有値は，それぞれの場合に $\lambda_{\max}^-$ および $\lambda_{\max}^+$ とすると，$\gamma_{2n} = \gamma_0$ として，全ての $\gamma_i > 0$ の場合に,

$$\lambda_{\max}^+ = \exp[\frac{1}{2}(\pm\gamma_1 \pm \gamma_3 \pm \cdots \gamma_{2n-1})] \tag{O-73}$$

$$\lambda_{\max}^- = \exp[\frac{1}{2}(\pm\gamma_0 \pm \gamma_2 \pm \cdots \gamma_{2n-2})] \tag{O-74}$$

となる．図 1 からわかるように，n が大きい時には ω_{2r} と ω_{2r-1} の差はほぼ 0 に近くなるので，少なくとも低温から転移温度までは $\gamma_{2r} \sim \gamma_{2r-1}$ としてよい．しかしながら，転移温度付近からそれよりも高い温度領域で γ_0 は急激に減少し，γ_1 との差が大きくなる．なぜなら，$H = H'$ の場合を考えると，γ_r と H の関係は，$\sinh 2H \sinh 2H^* = 1$ および $\cosh 2H^* = \coth 2H$ という関係 [2] を用いると,

$$\begin{aligned}\cosh\gamma_r &= \cosh 2H^* \cosh 2H - \sinh 2H^* \sinh 2H \cos\frac{\pi r}{n} \\ &= \coth 2H \cosh 2H - \cos\frac{\pi r}{n}\end{aligned} \tag{O-75}$$

となる．これから,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}H}\cosh\gamma_r = \coth 2H \sinh 2H - \frac{\cosh 2H}{\sinh^2 2H} = 0 \tag{O-76}$$

であるが，転移点では $H^* = H \equiv H_c$ であるので，$\sinh^2 2H_c = 1$ となり，上の式は 0 となるので，γ_r は γ_0 を除いて $H = H_c$ で極小となる．

γ_0 の場合は,

$$\cosh\gamma_0 = \cosh 2H^* \cosh 2H - \sinh 2H^* \sinh 2H = \cosh 2(H - H^*) \tag{O-78}$$

となり,

$$\cosh\gamma_0 = \pm 2(H - H^*) \tag{129}$$

である．これから，γ_0 は $H = H^*$ で，つまり $H = H_c$ で符号を変えることがわかる．$H \gg 1$ のときに，$\gamma_0 \simeq \gamma_1$ とすると,

$$\gamma_0 = 2(H - H^*) \tag{130}$$

である．図 2 に H^* と H の関係を示す．H と H^* が対称であることがわかる．$H = H^*$ との交点が H_c となる．H_c は H^* の定義式 $\tanh H_c = \exp(-2H_c)$ を解いて，$H_c = \frac{1}{2}\ln[\cot(\pi/8)] = 0.440687\cdots$ となる．

図 3 には γ_0 とそれ以外の γ_r と H の関係を示す.

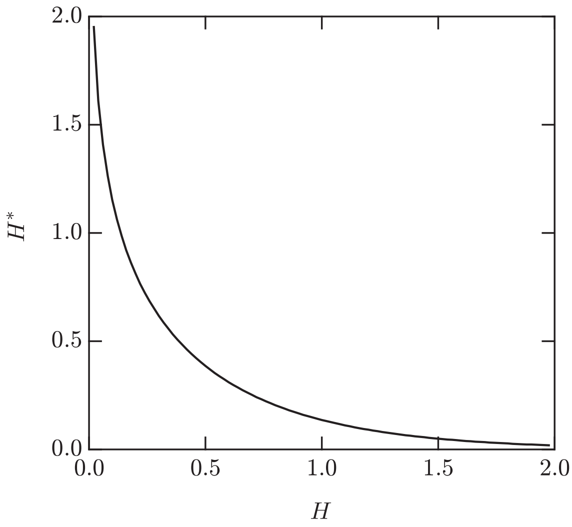

図 2: H と H^* の関係（数値計算プログラムは付録に記載）

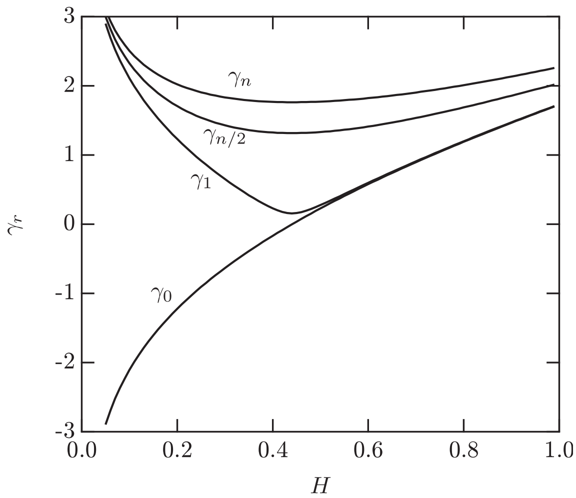

図 3: γ_r と H の関係．$r = 0, 1, n/2, n$ および $n = 20$.（数値計算プログラムは付録に記載）

$H > H_c$ では，$\gamma_{2r} \sim \gamma_{2r-1}$ であるから，$\lambda^-_{\max}$ と $\lambda^+_{\max}$ はほぼ等しい．

一方，$H < H_c$ では $\gamma_0 < 0$ となるので，$\lambda^-_{\max}$ と $\lambda^+_{\max}$ には違いが生じる．これは，式 (128) と $\gamma_0 < 0$ であることに注意して，

$$
\begin{aligned}
\lambda^-_{\max} &= \exp[\frac{1}{2}(\gamma_0 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_{2n-2})] \\
&= \exp[\frac{1}{2}(2\gamma_0 + |\gamma_0| + \gamma_2 + \cdots + \gamma_{2n-2})] \\
&= \exp(\gamma_0) \exp[\frac{1}{2}(|\gamma_0| + \gamma_2 + \cdots + \gamma_{2n-2})] \\
&\simeq \exp(\gamma_0)\lambda^+_{\max} = \simeq \exp(2(H - H^*))\lambda^+_{\max}
\end{aligned}
\tag{131}
$$

となる．これをまとめると，

$$
\frac{\lambda^-_{\max}}{\lambda^+_{\max}} = \begin{cases} 1 & \text{for} \quad H > H_c, T < T_c \\ \mathrm{e}^{2(H-H^*)} & \text{for} \quad H < H_c, T > T_c \end{cases}
\tag{O-79}
$$

となる．

m が十分大きい場合，分配関数を求めるには $\lambda_{\max}$ を知ることができれば良い．図 2 式 (O-79) で，$H < H_c$ の場合は必ず $H^* > H$ であるから，$\mathrm{e}^{2(H-H^*)} < 1$ となる．すなわち，H の全ての範囲において，$\lambda^-_{\max} < \lambda^+_{\max}$ となるので，$\lambda^+_{\max}$ を求めれば十分であることがわかる．

* * * * *

低温で秩序状態になりスピンが 1 方向になると，スピンの方向が 2 種類あるから，上を向いている場合と下を向いている場合の両方が最大の固有値となる．つまり，最大の固有値 $\lambda^+_{\max}$ が 2 重縮退する．そのとき，分配関数は，$H > H_c$ のとき，

$$(2\sinh 2H)^{-mn/2} Z \sim 2(\lambda^+_{\max})^m = 2\exp\left[\frac{m}{2}(\gamma_1 + \gamma_3 + \cdots + \gamma_{2n-1})\right] \tag{O-80-1}$$

$H < H_c$ のとき，

$$(2\sinh 2H)^{-mn/2} Z \sim (\lambda^+_{\max})^m = \exp\left[\frac{m}{2}(\gamma_1 + \gamma_3 + \cdots + \gamma_{2n-1})\right] \tag{O-80-2}$$

となる．

厳密な分配関数は，

$$\begin{aligned} Z &= \frac{1}{2}(2\sinh 2H)^{mn/2} \\ &\cdot \left\{ \prod_{r=1}^{n}\left(2\cosh\frac{m}{2}\gamma_{2r-1}\right) + \prod_{r=1}^{n}\left(2\sinh\frac{m}{2}\gamma_{2r-1}\right) + \prod_{r=1}^{n}\left(2\cosh\frac{m}{2}\gamma_{2r}\right) + \prod_{r=1}^{n}\left(2\sinh\frac{m}{2}\gamma_{2r}\right) \right\} \end{aligned} \tag{再 O-39}$$

である．転移点の極近傍を除いて，n が十分大きければ，

$$\gamma_{2r} = \gamma_{2r-1} \qquad (1 \le r \le n-1) \tag{132}$$

および，

$$\gamma_0 = \begin{cases} \gamma_1 & \mathrm{for} T < T_c (H > H_c) \\ -\gamma_1 & \mathrm{for} T > T_c (H < H_c) \end{cases} \tag{133}$$

とすることができる．これから，$T > T_c$ のときには，$\sinh\gamma_0 = -\sinh\gamma_1$ となるので，式 (再 O-39) の第 2 項と第 4 項は打ち消し合う．一方，第 1 項と第 3 項は等しくなる．したがって，

$$(2\sinh 2H)^{-mn/2} Z \simeq \prod_{r=1}^{n}\left(2\cosh\frac{m}{2}\gamma_{2r-1}\right) \tag{O-81-1}$$

となる．一方，$T > T_c$ のとき，式 (再 O-39) の第 1 項と第 3 項，および第 2 項と第 4 項は等しくなる．したがって，

$$\begin{aligned} (2\sinh 2H)^{-mn/2} Z &\simeq \prod_{r=1}^{n}\left(2\cosh\frac{m}{2}\gamma_{2r-1}\right) + \prod_{r=1}^{n}\left(2\sinh\frac{m}{2}\gamma_{2r-1}\right) \\ &= \prod_{r=1}^{n}\left(2\cosh\frac{m}{2}\gamma_{2r-1}\right)\{1 + \prod_{r=1}^{n}\left(2\tanh\frac{m}{2}\gamma_{2r-1}\right)\} \end{aligned} \tag{O-81-2}$$

とすることができる．

さらに，m が十分大きい時には，

$$2\cosh\frac{m}{2}\gamma_{2r-1} \sim \exp[\frac{m}{2}\gamma_{2r-1}] \tag{134}$$

とできるので ($x > 5$ で $\cosh x \sim \mathrm{e}^x/2$ とできる), $T > T_c$ のとき,

$$(2\sinh 2H)^{-mn/2}Z \simeq \exp[\frac{m}{2}(\gamma_1 + \gamma_3 + \cdots + \gamma_{2n-1})] = (\lambda^+_{\max})^m \tag{O-82}$$

とすることができる.

$T < T_c$ のときには,

$$(2\sinh 2H)^{-mn/2}Z \simeq \eta(\lambda^+_{\max})^m \tag{O-83}$$

とすることができる. ただし,

$$\eta = 1 + \prod_{r=1}^{n}\left(\tanh\frac{m}{2}\gamma_{2r-1}\right) \tag{135}$$

である. この式から明らかなように, $\eta \leq 2$ である. この 2 が Z の近似式 (O-80-1) の縮重度を表す 2 に相当する.

* * * * *

参考文献

[1] 「Kaufman の 2 次元イジングモデル厳密解の論文を読む　その 2」(2019/1/10 のエントリー).
`http://totoha.web.fc2.com/Kaufman_paper2.pdf`

[2] 「Onsager の 2 次元イジングモデル厳密解の論文を読む　その 1」(2017/8/7 のエントリー).
`http://totoha.web.fc2.com/Onsager_paper1.pdf`

[3] H. A. Kramers and G. H. Wannier, "Statitics of the Two-Dimensional Ferromagnet. Part I. A Two-Dimensional Model with an Order-Disorder Transition", Phys. Rev. **60**, 252-262 (1941).

[4] 「Kaufman の 2 次元イジングモデル厳密解の論文を読む　その 3」(2019/1/15 のエントリー).
`http://totoha.web.fc2.com/Kaufman_paper3.pdf`

[5] 「Kaufman の 2 次元イジングモデル厳密解の論文を読む　その 1」(2019/1/3 のエントリー).
`http://totoha.web.fc2.com/Kaufman_paper1.pdf`

[6] 「双曲余弦定理の補足」(2017/3/23 のエントリー).
`http://totoha.web.fc2.com/Hyperboloid_geo_S.pdf`

[7] 「双曲面幾何　その 2　長さ, 三角法, 余弦定理」(2017/2/10 のエントリー).
`http://totoha.web.fc2.com/Hyperboloid_geo_2.pdf`

* * * * *

付録

図 2 の数値計算プログラムソース

```
/*  Hstar-H.c  */
/*  M. Suzuki 2019.2.21  */
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>

double atanh(double y)
{
    double z;
    if(fabs(y)>0.999) return 1.0e99;
    z=(1+y)/(1-y);
    return 0.5*log(z);
}

int main(int argc, char *argv[])
{
    FILE *fp;
    char *filename="Hstar-H.txt";
    int i, n;
    double x, x0, x1, h, z;

    x0=0;
    x1=2.0;
    n=100;
    h=(x1-x0)/n;

    fp=fopen(filename, "w");
    for(i=1;i<n;i++)
    {
        x=x0+h*i;
        z=atanh(exp(-2.0*x));
        printf("%lf\t%lf\n", x, z);
        fprintf(fp, "%lf\t%lf\n", x, z);
    }
    fclose(fp);
}
```

図 3 の数値計算プログラムソース

```
/*  gamma-H.c  */
/*  M. Suzuki 2019.2.21  */
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>

double atanh(double y)
{
    double z;
    if(fabs(y)>0.999) return 1.0e99;
    z=(1+y)/(1-y);
    return 0.5*log(z);
}

double acosh(double y)
{
    double z;
    z=log(y+sqrt(y*y-1));
    return z;
}
```

```
double Hstar(double x)
{
    double z;
    z=atanh(exp(-2.0*x));
    return z;
}

int main(int argc, char *argv[])
{
    FILE *fp;
    char *filename[4]={"gamma_0-H.txt",
                       "gamma_1-H.txt",
                       "gamma_05n-H.txt",
                       "gamma_n-H.txt"};
    int i, j, m, n;
    double pi, H0, H1, h, x, y, z;
    double H, gamma, omega[4];

    pi=M_PI;
    n=20;
    m=100;
    x=pi/n;
    omega[0]=0;
    omega[1]=x;
    omega[2]=x*0.5*n;
    omega[3]=x*n;
    H0=0.0;
    H1=1.0;
    h=(H1-H0)/m;
    for(i=0;i<4;i++)
    {
        fp=fopen(filename[i], "w");
        for(j=5;j<m;j++)
        {
            H=H0+h*j;
            y=Hstar(H);
            if(i==0)
            {
                z=2*H-2*y;
            }
            else
            {
                x=cosh(2*H)*cosh(2*y)-sinh(2*H)*sinh(2*y)*cos(omega[i]);
                z=acosh(x);
            }
            printf("%lf\t%lf\n", H, z);
            fprintf(fp, "%lf\t%lf\n", H, z);
        }
        fclose(fp);
    }
}
```

（完）