Kaufmanの2次元イジングモデル厳密解の論文を読む　その3

2019.1.15　　鈴木　実

2. ELEMENTS OF SPINOR ANALYSIS （続き）

Eigenvalues of the Spin-Representatives （スピノール表現行列の固有値）

具体的な$\mathbf{S}(\mathbf{o})$を求めるのは一般に困難である．しかし，平面上の回転，すなわち，$2n$次元空間の2つの基底ベクトルで決定される平面上でこれと直交するそれ以外の基底ベクトルを中心とする回転，およびその組み合わせの回転なら$\mathbf{S}(\mathbf{o})$を具体的に求めることができる．幸い，2次元イジングモデルの問題ではこの回転だけで足りるので，以下ではその回転について述べる．

まず，$\mathbf{\Gamma}_k$と$\mathbf{\Gamma}_l$を取り上げ，これを$\mathbf{\Gamma}_k$と$\mathbf{\Gamma}_l$の作る面内でθ回転させて，それぞれ$\mathbf{\Gamma}_k^*$と$\mathbf{\Gamma}_l^*$になったとする．それ以外の$\mathbf{\Gamma}_i$は回転面に垂直であるので不変に保たれる．この回転操作を表す行列を$\mathbf{K}$とすると，$\mathbf{K}$は

$$\begin{aligned}\mathbf{K}:\quad &\mathbf{\Gamma}_k \to \cos\theta\cdot\mathbf{\Gamma}_k - \sin\theta\cdot\mathbf{\Gamma}_l \equiv \mathbf{\Gamma}_k^*,\\ &\mathbf{\Gamma}_k \to \sin\theta\cdot\mathbf{\Gamma}_k + \cos\theta\cdot\mathbf{\Gamma}_l \equiv \mathbf{\Gamma}_l^*,\\ &\mathbf{\Gamma}_i \to \mathbf{\Gamma}_i \equiv \mathbf{\Gamma}_i^*,\end{aligned} \tag{O-22}$$

と表される．このとき，$\mathbf{S}(\mathbf{K})$は，

$$\mathbf{S}(\mathbf{K}) = \exp(\frac{\theta}{2}\mathbf{\Gamma}_k\mathbf{\Gamma}_l) \tag{O-23}$$

と表される．これを示すために，まず，

$$\begin{aligned}(\mathbf{\Gamma}_k\mathbf{\Gamma}_l)^2 &= \mathbf{\Gamma}_k\mathbf{\Gamma}_l\mathbf{\Gamma}_k\mathbf{\Gamma}_l = -\mathbf{\Gamma}_k\mathbf{\Gamma}_k\mathbf{\Gamma}_l\mathbf{\Gamma}_l = -\mathbf{1}\\ (\mathbf{\Gamma}_k\mathbf{\Gamma}_l)^3 &= (\mathbf{\Gamma}_k\mathbf{\Gamma}_l)^2(\mathbf{\Gamma}_k\mathbf{\Gamma}_l) = -(\mathbf{\Gamma}_k\mathbf{\Gamma}_l)\\ (\mathbf{\Gamma}_k\mathbf{\Gamma}_l)^4 &= (\mathbf{\Gamma}_k\mathbf{\Gamma}_l)^2(\mathbf{\Gamma}_k\mathbf{\Gamma}_l)^2 = (-\mathbf{1})(-\mathbf{1}) = \mathbf{1}\\ (\mathbf{\Gamma}_k\mathbf{\Gamma}_l)^5 &= (\mathbf{\Gamma}_k\mathbf{\Gamma}_l)^4(\mathbf{\Gamma}_k\mathbf{\Gamma}_l) = (\mathbf{\Gamma}_k\mathbf{\Gamma}_l)\\ (\mathbf{\Gamma}_k\mathbf{\Gamma}_l)^6 &= (\mathbf{\Gamma}_k\mathbf{\Gamma}_l)^4(\mathbf{\Gamma}_k\mathbf{\Gamma}_l)^2 = -\mathbf{1}\\ &\cdots\end{aligned}$$

となることに注意して$\exp(\frac{\theta}{2}\mathbf{\Gamma}_k\mathbf{\Gamma}_l)$を展開すると，

$$\begin{aligned}\mathbf{S}(\mathbf{K}) &= \exp(\frac{\theta}{2}\mathbf{\Gamma}_k\mathbf{\Gamma}_l)\\ &= \mathbf{1} + (\frac{\theta}{2}\mathbf{\Gamma}_k\mathbf{\Gamma}_l) + \frac{1}{2!}(\frac{\theta}{2}\mathbf{\Gamma}_k\mathbf{\Gamma}_l)^2 + \frac{1}{3!}(\frac{\theta}{2}\mathbf{\Gamma}_k\mathbf{\Gamma}_l)^3 + \cdots\\ &= \{1 - \frac{1}{2!}(\frac{\theta}{2})^2 + \frac{1}{4!}(\frac{\theta}{2})^4 - \cdots\}\mathbf{1} + \{\frac{\theta}{2} - \frac{1}{3!}(\frac{\theta}{2})^3 + \frac{1}{5!}(\frac{\theta}{2})^5 - \cdots\}\mathbf{\Gamma}_k\mathbf{\Gamma}_l\\ &= \cos\frac{\theta}{2}\cdot\mathbf{1} + \sin\frac{\theta}{2}\cdot\mathbf{\Gamma}_k\mathbf{\Gamma}_l\end{aligned} \tag{O-24}$$

となる．これを用いて，$\mathbf{\Gamma}_k$と$\mathbf{\Gamma}_l$を相似変換しよう．

$$\mathbf{S}(\mathbf{K})^{-1} = \cos\frac{\theta}{2}\cdot\mathbf{1} - \sin\frac{\theta}{2}\cdot\mathbf{\Gamma}_k\mathbf{\Gamma}_l \tag{31}$$

であることに注意すると，

$$\begin{aligned}\mathbf{S}(\mathbf{K})\mathbf{\Gamma}_k\mathbf{S}(\mathbf{K})^{-1} &= (\cos\frac{\theta}{2}\cdot\mathbf{1}+\sin\frac{\theta}{2}\cdot\mathbf{\Gamma}_k\mathbf{\Gamma}_l)\mathbf{\Gamma}_k(\cos\frac{\theta}{2}\cdot\mathbf{1}-\sin\frac{\theta}{2}\cdot\mathbf{\Gamma}_k\mathbf{\Gamma}_l)\\ &= (\cos\frac{\theta}{2}\cdot\mathbf{1}+\sin\frac{\theta}{2}\cdot\mathbf{\Gamma}_k\mathbf{\Gamma}_l)(\cos\frac{\theta}{2}\cdot\mathbf{\Gamma}_k-\sin\frac{\theta}{2}\cdot\mathbf{\Gamma}_l)\\ &= (\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2})\cdot\mathbf{\Gamma}_k-(2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2})\mathbf{\Gamma}_l\\ &= \cos\theta\cdot\mathbf{\Gamma}_k-\sin\theta\cdot\mathbf{\Gamma}_l\\ &= \mathbf{\Gamma}_k^* \end{aligned} \tag{32}$$

となる．同様に，

$$\begin{aligned}\mathbf{S}(\mathbf{K})\mathbf{\Gamma}_l\mathbf{S}(\mathbf{K})^{-1} &= (\cos\frac{\theta}{2}\cdot\mathbf{1}+\sin\frac{\theta}{2}\cdot\mathbf{\Gamma}_k\mathbf{\Gamma}_l)\mathbf{\Gamma}_l(\cos\frac{\theta}{2}\cdot\mathbf{1}-\sin\frac{\theta}{2}\cdot\mathbf{\Gamma}_k\mathbf{\Gamma}_l)\\ &= (\cos\frac{\theta}{2}\cdot\mathbf{\Gamma}_l+\sin\frac{\theta}{2}\cdot\mathbf{\Gamma}_k)(\cos\frac{\theta}{2}\cdot\mathbf{1}-\sin\frac{\theta}{2}\cdot\mathbf{\Gamma}_k\mathbf{\Gamma}_l)\\ &= (2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2})\cdot\mathbf{\Gamma}_k+(\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2})\mathbf{\Gamma}_l\\ &= \sin\theta\cdot\mathbf{\Gamma}_k+\cos\theta\cdot\mathbf{\Gamma}_l\\ &= \mathbf{\Gamma}_l^* \end{aligned} \tag{33}$$

となる．すなわち，これで $\mathbf{S}(\mathbf{K})$ が 2^n 次元空間のスピノールで表現された行列で，$2n$ 次元空間の回転 $\mathbf{K}$ に対応しており，相似変換により $\mathbf{\Gamma}_k$ と $\mathbf{\Gamma}_l$ を $\mathbf{\Gamma}_k^*$ と $\mathbf{\Gamma}_l^*$ に変換することが確かめられた．

前のエントリー [1] で述べたように，$\mathbf{o}$ の全体は群を形成し，したがって $\mathbf{S}(\mathbf{o})$ も群を作る．$\mathbf{S}(\mathbf{o})$ は直交群 $\mathbf{o}$ の 2 値表現になっている．つまり，直交群における 1 つの回転角の値に対し $\mathbf{S}(\mathbf{o})$ は符号が $\pm$ の 2 つの値を有する．これは $\mathbf{K}$ の表現 (O-23) からわかる．すなわち，式 (O-24) と式 (32)，(33) の関係から明らかで，θ と $\theta+2\pi$ の回転は $\mathbf{K}$ では同じ回転になるが，$\mathbf{S}(\mathbf{K})$ では符号が ± 2 つの値をとる．ちょうど，スピン $\frac{1}{2}$ のスピノールと同じ振る舞いをする．

回転角 θ が実数なら，球面の 1 点から他のもう 1 点への回転角として表すことができる．虚数の場合は，回転双極面上の 2 点間の距離になる [2]．すなわち，$\theta=\mathrm{i}\gamma$ のときには，$\cos\theta$，$\sin\theta$ が $\cosh\gamma$，$\sinh\gamma$ になる．実際，後でこのような計算式が出てくる．

$\mathbf{V}_1$ の [1] の式 (18) を再掲すると，

$$\mathbf{g}\mathbf{V}_1\mathbf{g}=\prod_{r=1}^{n}\exp(-\mathrm{i}H^*\mathbf{P}_r^*\mathbf{Q}_r^*) \tag{再 18}$$

となっており，そのうちの因子の $\exp(-\mathrm{i}H^*\mathbf{P}_r^*\mathbf{Q}_r^*)$ では，$\mathbf{P}_r^*$ と $\mathbf{Q}_r^*$ が重複しないで対になって現れ，$\theta=-2\mathrm{i}H^*$ の場合の $\mathbf{S}(\mathbf{K})$ の形をしていることがわかる．つまり，$\mathbf{S}(\mathbf{K})$ において $\mathbf{\Gamma}_k=\mathbf{P}_r^*$，$\mathbf{\Gamma}_l=\mathbf{Q}_r^*$ の場合である．しかも，$\mathbf{P}_r^*\mathbf{Q}_r^*$ は対角行列であるから，$\mathbf{S}(\mathbf{K})$ も対角行列になり，したがって，固有値が簡単にわかる．実際，$P_r^*\mathbf{Q}_r^*=\mathrm{i}\mathbf{s}_r$（[1] の式 (17)）を用いると，

$$\begin{aligned}\mathbf{S}(\mathbf{K}) &= \exp(\frac{\theta}{2}\mathbf{P}_r^*\mathbf{Q}_r^*)\\ &= \exp(\mathrm{i}\frac{\theta}{2}\mathbf{s}_r)\\ &= \cos\frac{\theta}{2}\mathbf{1}_r+\sin\frac{\theta}{2}\mathbf{s}_r\\ &= \mathbf{1}\otimes\mathbf{1}\otimes\cdots\otimes\left(\cos\frac{\theta}{2}\mathbf{1}+\sin\frac{\theta}{2}\mathbf{s}\right)\otimes\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{1}\\ &= \mathbf{1}\otimes\mathbf{1}\otimes\cdots\otimes\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2} & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta/2}\end{pmatrix}\otimes\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{1}\end{aligned} \tag{34}$$

となる．これは対角行列で，直積であるから，固有値は $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}$ と $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta/2}$ で，それぞれ固有値は 2^{n-1} 重に縮退している．

一方，$\mathbf{K}$ の固有値を見てみよう．$\mathbf{K}$ は定義から，$\mathbf{\Gamma}_k$ と $\mathbf{\Gamma}_l$ に関係する行と列を抜き出せば，

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{35}$$

となり，それ以外の $\mathbf{\Gamma}_i$ に関しては式 (O-22) より単位行列になる．したがって，固有値は $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ と $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$ となり，それ以外は $2n-2$ 重に縮退した 1 である．

連続して回転する基底ベクトルの対も同様に考え，その 1 つを $\mathbf{\Gamma}_{r_1}$ と $\mathbf{\Gamma}_{r_2}$ $(r=1,2,\cdots,n)$ とする．この回転を $\mathbf{K}_r$ とすると，$\mathbf{K}_r$ と $\mathbf{S}(\mathbf{K}_r)$ はそれぞれ

$$\mathbf{K}_r = \overbrace{\mathbf{1}\oplus\mathbf{1}\oplus\cdots\oplus\mathbf{1}}^{r-1} \oplus \begin{pmatrix} \cos\theta_r & -\sin\theta_r \\ \sin\theta_r & \cos\theta_r \end{pmatrix} \oplus \mathbf{1}\oplus\cdots\oplus\mathbf{1}\oplus\mathbf{1} \tag{36}$$

$$\mathbf{S}(\mathbf{K}_r) = \exp(\frac{\theta_r}{2}\mathbf{\Gamma}_{r_1}\mathbf{\Gamma}_{r_2}) \tag{37}$$

と表される．$\oplus$ は行列の直和を表す．式 (18) のように全ての回転を加えた場合は $\mathbf{K}$ と $\mathbf{S}(\mathbf{K})$ となり，

$$\begin{aligned}\mathbf{K} = \prod_{r=1}^{n}\mathbf{K}_r &= \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix} \oplus\cdots\oplus \begin{pmatrix} \cos\theta_r & -\sin\theta_r \\ \sin\theta_r & \cos\theta_r \end{pmatrix} \\ &\oplus\cdots\oplus \begin{pmatrix} \cos\theta_n & -\sin\theta_n \\ \sin\theta_n & \cos\theta_n \end{pmatrix}\end{aligned} \tag{38}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{S}(\mathbf{K}) = \prod_{r=1}^{n}\mathbf{S}(\mathbf{K}_r) &= \exp(\frac{\theta_1}{2}\mathbf{\Gamma}_{1_1}\mathbf{\Gamma}_{1_2}) \otimes \exp(\frac{\theta_2}{2}\mathbf{\Gamma}_{2_1}\mathbf{\Gamma}_{2_2}) \otimes\cdots\otimes \exp(\frac{\theta_r}{2}\mathbf{\Gamma}_{r_1}\mathbf{\Gamma}_{r_2}) \\ &\otimes\cdots\otimes\exp(\frac{\theta_n}{2}\mathbf{\Gamma}_{n_1}\mathbf{\Gamma}_{n_2})\end{aligned} \tag{39}$$

と表される．式 (18) の右辺は，$\mathbf{\Gamma}_{r_1} = \mathbf{P}_r^*$ と $\mathbf{\Gamma}_{r_2} = \mathbf{Q}_r^*$ という特別な場合で，

$$\begin{aligned}\mathbf{S}(\mathbf{K}) = \prod_{r=1}^{n}\mathbf{S}(\mathbf{K}_r) &= \exp(\frac{\theta_1}{2}\mathbf{P}_1^*\mathbf{Q}_1^*) \otimes \exp(\frac{\theta_2}{2}\mathbf{P}_2^*\mathbf{Q}_2^*) \otimes\cdots\otimes \exp(\frac{\theta_r}{2}\mathbf{P}_r^*\mathbf{Q}_r^*) \\ &\otimes\cdots\otimes\exp(\frac{\theta_n}{2}\mathbf{P}_n^*\mathbf{Q}_n^*) \\ &= \begin{pmatrix} \exp(\mathrm{i}\theta_1/2) & 0 \\ 0 & \exp(-\mathrm{i}\theta_1/2) \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \exp(\mathrm{i}\theta_2/2) & 0 \\ 0 & \exp(-\mathrm{i}\theta_2/2) \end{pmatrix} \\ &\otimes\cdots\otimes \begin{pmatrix} \exp(\mathrm{i}\theta_r/2) & 0 \\ 0 & \exp(-\mathrm{i}\theta_r/2) \end{pmatrix} \otimes\cdots\otimes \begin{pmatrix} \exp(\mathrm{i}\theta_n/2) & 0 \\ 0 & \exp(-\mathrm{i}\theta_n/2) \end{pmatrix}\end{aligned} \tag{40}$$

と表される．以上から，$\mathbf{K}$ の固有値は，

$$\mathrm{e}^{\pm\theta_1}, \mathrm{e}^{\pm\theta_1}, \cdots, \mathrm{e}^{\pm\theta_1} \tag{41}$$

となり，$\mathbf{S}(\mathbf{K})$ の固有値 λ は，

$$\lambda = \exp[\frac{\mathrm{i}}{2}(\pm\theta_1 \pm \theta_1 \pm\cdots\pm \theta_1)] \tag{42}$$

となる．指数部の複号は独立に取ることになるので，全部で 2^n 個の固有値が存在する．

一般に，$\mathbf{o}$ が $\mathbf{\Gamma}_k$ の線形結合で表される回転の場合でも，$\mathbf{o}$ は直交行列であるから，その固有値の絶対値は 1 である．したがって，固有値を一般に $\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\theta_r}(1 \le r \le n)$ と表すことができるので，$\mathbf{o}$ をそのように対角化する $2n$ 次ユニタリ行列が存在する．その列と行を固有値が $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_r}$ と $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_r}$ になるように配置すれば，上の計算と同じ

ような $\mathbf{\Gamma}_k\mathbf{\Gamma}_l$ を求めることができる．これに対応する 2^n 次元スピン空間の変換 $\mathbf{S}(\mathbf{o})$ は式 (37) または式 (39) のように簡単に構成することができる．

ここで明らかになったことは非常に重要で，基底ベクトル $\mathbf{\Gamma}_k$ の回転を表す $2n$ 次元空間の行列 $\mathbf{o}$ がわかり，その固有値が式 (41) で与えられれば，2^n 次元空間の $\mathbf{S}(\mathbf{o})$ の固有値は式 (42) で与えられる，ということである．このとき，どのような $\mathbf{o}$ であっても，それに対応する $\mathbf{S}(\mathbf{o})$ は相似変換で互いに返還されるので固有値は変わらない．もともと，相似変換によって変換される行列を等しいものと考えれば $\mathbf{o}$ に対応する表現は 1 つしかないということだったから，これは当然の帰結である．

Other Representaions of the Orthogonal Group （直交群の他の表現）

反交換関係を満足する演算子の系 $\{\mathbf{\Gamma}_k\}$ から，同じく反交換関係を満足する演算子の系 $\{\mathbf{\Gamma}^*_k\}$ への変換は行列 $\{o_{ij}\}$ で表され，かつこの行列 $\{o_{ij}\}$ は直交行列で $2n$ 次元空間の回転を表していることがわかった．前節で示したような $\mathbf{o}$ の演算関係から，明らかに $\{\mathbf{o}\}$ は群を構成することがわかった．すなわち，$\{\mathbf{o}\}$ は回転群でもある．

前節で述べられているように，回転群の元 $\mathbf{o}$ は，基底 $\{\mathbf{\Gamma}_k\}$ を用いて 1 つの行列で表現することができる．この表現は $2n$ 次の行列である．また，同時に，この元 $\mathbf{o}$ を 2^n 次元の行列 $\mathbf{S}(\mathbf{o})$ として表現することもできることがわかった．

ここでは，以上の 2 つの表現以外にも，$\{\mathbf{\Gamma}_k\}$ から f 個の積 $\mathbf{\Gamma}_i, \mathbf{\Gamma}_j \cdots \mathbf{\Gamma}_r$ を作って，これを基底にすることにより，$\binom{2n}{f}$ 次の行列による表現も可能である．これも回転群 $\mathbf{o}$ の表現である．

例として，$f = 2$ の場合を考えてみよう．$\mathbf{\Gamma}_k$ と $\mathbf{\Gamma}_l$ は式 (O-17) で線形変換されるとすると，前と同様にして，

$$
\begin{aligned}
\mathbf{o} : \mathbf{\Gamma}_k\mathbf{\Gamma}_l \to (\sum_{i=1}^{2n} o_{ik}\mathbf{\Gamma}_i)(\sum_{j=1}^{2n} o_{jl}\mathbf{\Gamma}_j) &= \sum_{i,j=1}^{2n} o_{ik}o_{jl}\mathbf{\Gamma}_i\mathbf{\Gamma}_j \\
&= \sum_{1\le i<j}^{2n} (o_{ik}o_{jl} - o_{jk}o_{il})\mathbf{\Gamma}_i\mathbf{\Gamma}_j + \sum_{i=j=1}^{2n} o_{ik}o_{il} \\
&= \sum_{1\le i<j}^{2n} \begin{vmatrix} o_{ik} & o_{jk} \\ o_{il} & o_{jl} \end{vmatrix} \mathbf{\Gamma}_i\mathbf{\Gamma}_j \\
&= \mathbf{S}(\mathbf{o})(\mathbf{\Gamma}_i\mathbf{\Gamma}_j)\mathbf{S}(\mathbf{o})^{-1}
\end{aligned}
\tag{O-31}
$$

とすることができる．第 2 式の第 2 項は式 (O-18)（その 2[1]）を用いた．この式の意味するところは，$\mathbf{\Gamma}_k$ の f 次の基底ベクトルの 1 次結合で展開するにより別の f 次の $\mathbf{\Gamma}_k$ の基底ベクトルを作ることができる．その時の展開係数は行列 $\mathbf{o}$ の小行列式である，ということである．上の例で言えば，2 次の新しい基底 $\mathbf{\Gamma}^*_k\mathbf{\Gamma}^*_l$ は $\mathbf{\Gamma}_i\mathbf{\Gamma}_j$ に i 行 j 行 k 列 l 列の小行列式を掛けて，全ての 2 つの行の組み合わせで総和をとることによって得られる，ということになる．

特別の場合として，$\mathbf{\Gamma}_k$ の $2n$ 次の積を基底する場合がある．つまり，$\mathbf{\Gamma}_1\mathbf{\Gamma}_2 \cdots \mathbf{\Gamma}_{2n}$ が基底である．$f = 2n$ の項は 1 項しかない．つまり，1 次元である．

$$
\begin{aligned}
\mathbf{\Gamma}_1\mathbf{\Gamma}_2 \cdots \mathbf{\Gamma}_{2n} &= (\mathrm{is}^2\mathbf{C})\mathbf{C}^{2n-2} \otimes \mathbf{C}^2(\mathrm{is}^2\mathbf{C})\mathbf{C}^{2n-4} \otimes \cdots \otimes \mathbf{C}^{2n-2}(\mathrm{is}^2\mathbf{C}) \\
&= \mathrm{i}^n\mathbf{C} \otimes \mathbf{C} \otimes \cdots \otimes \mathbf{C} = \mathrm{i}^n\mathbf{U}
\end{aligned}
$$

となる．すなわち，定数の因子 i^n を無視すれば，

$$
\mathbf{U} = \mathbf{\Gamma}_1\mathbf{\Gamma}_2 \cdots \mathbf{\Gamma}_{2n} \tag{O-32}
$$

である．

$\mathbf{U}$ を基底としたとき，回転 $\mathbf{o}$ はどのように表現されるか見てみよう．回転 $\mathbf{o}$ により，$\mathbf{U}$ は次のように変化する．

$$
\begin{aligned}
\mathbf{o}:\mathbf{U}\to\mathbf{U}^* &= (\mathbf{\Gamma}_1^*)(\mathbf{\Gamma}_2^*)\cdots(\mathbf{\Gamma}_{2n}^*) \\
&= (\sum_{i=1}^{2n} o_{i1}\mathbf{\Gamma}_i)(\sum_{j=1}^{2n} o_{j1}\mathbf{\Gamma}_j)\cdots(\sum_{t=1}^{2n} o_{t1}\mathbf{\Gamma}_t) \\
&= \sum_{i=1}^{2n}\sum_{j=1}^{2n}\cdots\sum_{t=1}^{2n} o_{i1}o_{j1}\cdots o_{t1}\mathbf{\Gamma}_i\mathbf{\Gamma}_j\cdots\mathbf{\Gamma}_t \\
&= \sum_{i,j,\cdots,t=1}^{2n} \mathrm{sgn}\,(i,j,\cdots,t) o_{i1}o_{j2}\cdots o_{t,2n}\mathbf{\Gamma}_{r_1}\mathbf{\Gamma}_{r_2}\cdots\mathbf{\Gamma}_{r_{2n}}
\end{aligned} \tag{43}
$$

となる．ただし，$r_1, r_2, \cdots, r_{2n}$ は $i, j, \cdots, t$ を重複がある場合も含めて，小さい順に並べた数列である．重複がない場合は $1, 2, \cdots, 2n$ となる．$\mathrm{sgn}\,(i, j, \cdots, t)$ は $i, j, \cdots, t$ を置換により $r_1, r_2, \cdots, r_{2n}$ に移したときに奇数回の置換なら $-$，偶数回なら $+$ の値を取る関数である．そうすると，$\mathbf{\Gamma}_{r_1}\mathbf{\Gamma}_{r_2}\cdots\mathbf{\Gamma}_{r_{2n}}$ で $r_1, r_2, \cdots, r_{2n}$ に重複がある場合の係数は行列式で等しい行が複数存在する場合に相当する．すなわち，その値は 0 である．したがって，式 (43) では $r_1, r_2, \cdots, r_{2n}$ が全て異なる場合以外は全て 0 になる．そのとき，$i, j, \cdots, t$ は $1, 2, \cdots, 2n$ の置換 $P(i, j, \cdots, t)$ である．結局，

$$
\mathbf{U}^* = \sum_{P(i,j,\cdots,t)} \mathrm{sgn}\,(P(i,j,\cdots,t)) o_{i1}o_{j2}\cdots o_{t,2n}\mathbf{\Gamma}_1\mathbf{\Gamma}_2\cdots\mathbf{\Gamma}_{2n} \tag{44}
$$

となり，$\mathbf{\Gamma}_1\mathbf{\Gamma}_2\cdots\mathbf{\Gamma}_{2n}$ の係数は行列式 $\det\mathbf{o}$ そのものであることがわかる．これは式 (O-31) の自然な延長でもある．

行列 $\mathbf{o}$ は直交行列であるから $\det(\mathbf{1}) = \det({}^{\mathrm{t}}\mathbf{o}\mathbf{o}) = (\det\mathbf{o})^2 = 1$ より，$\det\mathbf{o} = \pm 1$ である．したがって，$\mathbf{o}$ を $\mathbf{U}$ で表現した場合，1 次の行列，つまり単なる数になり，その値は 1 か -1 のいずれかである．このことは，全ての $2n$ 次元空間の回転は，$\mathbf{U} = \mathbf{\Gamma}_1\mathbf{\Gamma}_2\cdots\mathbf{\Gamma}_{2n}$ で表現した場合，1 か -1 のいずれかになるということである．表現が 1 の場合，$\mathbf{o}$ は通常の回転であり，表現が -1 の場合は，$\mathbf{o}$ は通常の回転操作の後で回転軸に垂直な面で鏡映操作をする回映に属する．

一方，$\mathbf{U}$ を 2^n 次元空間の演算子をみなせば，回転 $\mathbf{o}$ により，$\mathbf{U}$ は $\mathbf{U}^*$ に変換され，$\mathbf{U}^*$ は次の相似変換で表される．

$$
\mathbf{o}:\mathbf{U}\to\mathbf{U}^* = \pm\mathbf{U} = \mathbf{S}(\mathbf{o})\mathbf{U}\mathbf{S}(\mathbf{o})^{-1} \tag{O-33}
$$

係数が 1 の場合は通常の回転操作に相当し，-1 の場合は回映操作に相当する．すなわち，一定の角度の回転をしてからその回転面で反転する操作である．

[1] で示したように，回転 $\mathbf{o}$ のスピノールによる表現は，相互に相似変換により変換可能な行列を同じとみなせば，1 つしか無い．したがって，それ以外の行列による変換では $\mathbf{U}$ は不変には保たれない．その例として，

$$
\mathbf{g}\mathbf{U}\mathbf{g} \neq \pm\mathbf{U} \tag{45}
$$

が挙げられている．

参考文献

[1] 「Kaufman の 2 次元イジングモデル厳密解の論文を読む　その 2」(2019/1/10 のエントリー).
http://totoha.web.fc2.com/Kaufman_paper2.pdf

[2] 「双曲余弦定理の補足」(2017/3/23 のエントリー).
http://totoha.web.fc2.com/Hyperboloid_geo_S.pdf

（その 3　終わり）