Kaufman の 2 次元イジングモデル厳密解の論文を読む　その 2

2019.1.10　　鈴木　実

2. ELEMENTS OF SPINOR ANALYSIS （スピノール解析の要素）

この論文では，$2n$ 次元空間のある行列の固有値が 2^n 次元空間の行列の固有値と一定の関係があって，一方を求めれば他方もわかるという関係を示して，それを応用して 2 次元イジングモデルの厳密解を解いている．$2n$ 次元空間のある行列の固有値を求めるほうが簡単であるので，この難解な固有値問題が解けることになった．この部分がこの論文の肝と言うことができる．

こうした $2n$ 次元と 2^n 次元の行列の間の関係は，反交換関係を有する行列で見られる．反交換関係を有する行列とは，例えば，2 次元なら Pauli 行列，4 次元なら Dirac 行列がそうした行列である．(一般の場合については，Brauer と Weyl の論文 [1] が示している．) 2 次元イジングモデルで対角化する対象となる演算子がこの Pauli 行列の直積で記述できるため，上の固有値を求める手法が応用できることになった．この論文は正にそこに着目して書かれているのである．

最初に，次のような反交換関係を有する $2n$ 個の量を導入する．

$$\mathbf{\Gamma}_k^2 = 1, \quad \mathbf{\Gamma}_k\mathbf{\Gamma}_l = -\mathbf{\Gamma}_l\mathbf{\Gamma}_k, \quad (1 \le k, l \le 2n) \tag{O-10}$$

これは反交換子 $[\,A,\,B\,]_+ = AB + BA$ を用いると，

$$[\,\mathbf{\Gamma}_k,\,\mathbf{\Gamma}_l\,]_+ = 2\delta_{k,l} \tag{1}$$

と表すこともできる．このような量は一般に通常の数では表せず，行列で可能となる．

$n = 1$ の場合は，

$$\mathbf{\Gamma}_1 = \mathbf{s} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \sigma_3 \tag{2}$$

$$\mathbf{\Gamma}_2 = \mathrm{i}\mathbf{s}\mathbf{C} = -\begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} = -\sigma_2 \tag{3}$$

とすることができる．$\mathbf{\Gamma}_1$ と $\mathbf{\Gamma}_2$ は式 (O-10) を満たすのは明らかである．この行列は Pauli 行列に等しい．[1]

Pauli 行列は $\mathbf{\Gamma}_1$，$\mathbf{\Gamma}_2$ から導くことができる．実際，

$$\begin{aligned}
\sigma_0 &= \mathbf{1} = \mathbf{\Gamma}_1^2 = \mathbf{\Gamma}_2^2 \\
\sigma_1 &= \mathbf{C} = -\mathrm{i}\mathbf{\Gamma}_1\mathbf{\Gamma}_2 \\
\sigma_2 &= \mathbf{C} = -\mathbf{\Gamma}_2 \\
\sigma_3 &= \mathbf{s} = \mathbf{\Gamma}_1
\end{aligned}$$

となる．

---

[1] Pauli 行列は

$$\boldsymbol{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

である．これは，物理学の分野では σ_x，σ_y，σ_z と表記される．

$n=2$ の場合は，

$$\mathbf{\Gamma}_1 = \mathbf{s}\otimes\mathbf{1} = \sigma_3\otimes\mathbf{1} = \gamma^0 \tag{4}$$
$$\mathbf{\Gamma}_2 = \mathrm{i}\mathbf{s}\mathbf{C}\otimes\mathbf{1} = -\sigma_2\otimes\mathbf{1} = -\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \tag{5}$$
$$\mathbf{\Gamma}_3 = \mathbf{C}\otimes\mathbf{s} = \sigma_1\otimes\sigma_3 = -\mathrm{i}\sigma_2\sigma_3\otimes\sigma_3 = -(\mathrm{i}\sigma_2\otimes\sigma_3)(\sigma_3\otimes\mathbf{1}) = -\gamma^3\gamma^0 \tag{6}$$
$$\mathbf{\Gamma}_4 = \mathbf{C}\otimes\mathrm{i}\mathbf{s}\mathbf{C} = \sigma_1\otimes(-\sigma_2) = (-\mathrm{i}\sigma_2\sigma_3)\otimes(-\sigma_2) = (\mathrm{i}\sigma_2\otimes\sigma_2)(\sigma_3\otimes\mathbf{1}) = \gamma^2\gamma^0 \tag{7}$$

とすることができる．$\mathbf{s}$ と $\mathbf{C}$ は反交換関係が成り立つことに注意すると，$\mathbf{\Gamma}_1$ から $\mathbf{\Gamma}_4$ も同様にして反交換関係を満たしていることがわかる．γ はディラック行列である[2]．$\mathbf{\Gamma}_j$ をディラック行列から導くことができることを示す．

n が任意の場合は，今までの一般化として，

$$\mathbf{\Gamma}_{2r-1} \equiv \underbrace{\overbrace{\mathbf{C}\otimes\mathbf{C}\otimes\cdots\otimes\mathbf{C}}^{r-1}\otimes\mathbf{s}\otimes\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}\cdots\otimes\mathbf{1}}_{n} \equiv \mathbf{P}_r \tag{O-11-1}$$

$$\mathbf{\Gamma}_{2r} \equiv \underbrace{\overbrace{\mathbf{C}\otimes\mathbf{C}\otimes\cdots\otimes\mathbf{C}}^{r-1}\otimes\mathrm{i}\mathbf{s}\mathbf{C}\otimes\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}\cdots\otimes\mathbf{1}}_{n} \equiv \mathbf{Q}_r \tag{O-11-2}$$

$$\mathbf{s}_r = \overbrace{\mathbf{1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{1}}^{r-1}\otimes\mathbf{s}\otimes\mathbf{1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{1} \tag{O-5-1}$$

$$\mathbf{C}_r = \overbrace{\mathbf{1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{1}}^{r-1}\otimes\mathbf{C}\otimes\mathbf{1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{1} \tag{O-5-2}$$

と定義することができる．それぞれ，直積の r 番目に $\mathbf{s}$ と $\mathrm{i}\mathbf{s}\mathbf{C}$ が入る．$\mathbf{s}\mathbf{C} = -\mathbf{C}\mathbf{s}$ であるから，虚数単位 i が入っているのは式 (O-10) の反交換関係を満たすためである．これらの行列は 2 次正方行列の n 個の直積であるから 2^n 次正方行列となる．

行列はその成分をベクトルの成分とみなすこともできる．したがって，上の行列の成分は $(2^n)^2$ 個あるので，式 (O-11) の行列は 2^{2n} 次元空間のベクトルでもある．$\mathbf{\Gamma}_k$ は $2n$ 個あり，$2n$ 個の独立なベクトルである[3]．

複数の $\mathbf{\Gamma}_k$ の積を作ることにより 2^{2n} 個の独立なベクトルを作ることができる．このような相異なる $\mathbf{\Gamma}_k$ の積の作り方としては，$\mathbf{\Gamma}_1,\cdots,\mathbf{\Gamma}_{2n}$ のうち，それぞれが積に含まれるか否かという違いの組み合わせの数だけ

---

[2] ディラック行列は，定義が複数あるようだが，ここでは，

$$\gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & 0 & \mathrm{i} & 0 \\ 0 & \mathrm{i} & 0 & 0 \\ -\mathrm{i} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad \gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

である．あるいは，

$$\gamma^j = \mathrm{i}\sigma_2\otimes\sigma_j \quad (j=1,2,3), \qquad \gamma^0 = \sigma_3\otimes\mathbf{1},$$

すなわち，

$$\gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ -\sigma_1 & 0 \end{pmatrix},\quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ -\sigma_2 & 0 \end{pmatrix},\quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ -\sigma_3 & 0 \end{pmatrix},\quad \gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix},$$

とも書ける．

[3] 実際，$\mathbf{\Gamma}_{2r-1}$，$\mathbf{\Gamma}_{2r}$ の直積の r 番目の因子に現れる行列は，

$$\mathrm{i}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

で，$\mathbf{\Gamma}_{2r-1}$，$\mathbf{\Gamma}_{2r}$ 以外の $\mathbf{\Gamma}_k$ の直積の r 番目の因子

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

の 1 次結合では表すことができない．

作ることができる．あるいは，積の中に含まれない $\mathbf{\Gamma}_k$ の組み合わせを考えても同じである．したがって，その種類は 2^{2n} 存在する．具体的には，論文にあるように，

$$1,\ \mathbf{\Gamma}_1,\ \mathbf{\Gamma}_2,\ \cdots,\ \mathbf{\Gamma}_{2n},\ \mathbf{\Gamma}_1\mathbf{\Gamma}_2,\ \mathbf{\Gamma}_1\mathbf{\Gamma}_3,\ \cdots,\ \mathbf{\Gamma}_1\mathbf{\Gamma}_2\mathbf{\Gamma}_3,\ \cdots \tag{8}$$

のようになる．これらのベクトルは 1 次独立である[4]．

$\mathbf{V}_1$ と $\mathbf{V}_2$ も 2^n 次正方行列であるから，2^{2n} 次元ベクトルとみなすことができるので，式 (8) のベクトルを用いて表すことができる．実際，これを見てみよう．

式 (O-11) から，

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_r\mathbf{Q}_r &= \mathbf{C}^2\otimes\mathbf{C}^2\otimes\cdots\otimes\mathbf{sisC}\otimes\mathbf{1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{1}\\
&= \mathbf{1}\otimes\mathbf{1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{is}^2\mathbf{C}\otimes\mathbf{1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{1}\\
&= \mathbf{1}\otimes\mathbf{1}\otimes\cdots\otimes\mathrm{i}\mathbf{C}\otimes\mathbf{1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{1}\\
&= \mathrm{i}\mathbf{C}_r
\end{aligned}\tag{9}$$

となる．したがって，

$$\mathbf{C}_r = -\mathrm{i}\mathbf{P}_r\mathbf{Q}_r \tag{10}$$

となる．これから，式 (O-8)（その 1）[2] に代入すると，

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}_1 &= \exp(H^*\sum_{r=1}^{n}\mathbf{C}_r) = \exp(-\mathrm{i}H^*\sum_{r=1}^{n}\mathbf{P}_r\mathbf{Q}_r)\\
&= \prod_{r=1}^{n}\exp(-\mathrm{i}H^*\mathbf{P}_r\mathbf{Q}_r)
\end{aligned}\tag{O-13}$$

となる．(この式の指数部の符号は論文の式と違う．この節は符号の誤りが大変多い．式 (10) も論文の式 (O-12) と符号が異なる．しかし，最後の結果は正しい式が得られている．)

次に，$\mathbf{s}_r$ については，

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}_1\mathbf{C}_2\cdots\mathbf{C}_{r-1}\mathbf{P}_r &= \overbrace{\mathbf{C}^2\otimes\mathbf{C}^2\otimes\cdots\otimes\mathbf{C}^2}^{r-1}\otimes\mathbf{s}\otimes\mathbf{1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{1}\\
&= \overbrace{\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{1}}^{r-1}\otimes\mathbf{s}\otimes\mathbf{1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{1}\\
&= \mathbf{s}_r
\end{aligned}\tag{11}$$

という関係が成り立つ．したがって，

$$\begin{aligned}
\mathbf{s}_r\mathbf{s}_{r+1} &= (\mathbf{C}_1\mathbf{C}_2\cdots\mathbf{C}_{r-1}\mathbf{P}_r)(\mathbf{C}_1\mathbf{C}_2\cdots\mathbf{C}_r\mathbf{P}_{r+1})\\
&= (\overbrace{\mathbf{C}^2\otimes\mathbf{C}^2\otimes\cdots\otimes\mathbf{C}^2}^{r-1}\otimes\mathbf{s}\otimes\mathbf{1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{1})(\overbrace{\mathbf{C}^2\otimes\mathbf{C}^2\otimes\cdots\otimes\mathbf{C}^2}^{r}\otimes\mathbf{s}\otimes\mathbf{1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{1})\\
&= \overbrace{\mathbf{C}^4\otimes\mathbf{C}^4\otimes\cdots\otimes\mathbf{C}^4}^{r-1}\otimes\mathbf{sC}^2\otimes\mathbf{s}\otimes\mathbf{1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{1}\\
&= \overbrace{\mathbf{C}^2\otimes\mathbf{C}^2\otimes\cdots\otimes\mathbf{C}^2}^{r-1}\otimes\mathbf{sC}^2\otimes\mathbf{s}\otimes\mathbf{1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{1}\\
&= (\overbrace{\mathbf{C}\otimes\mathbf{C}\otimes\cdots\otimes\mathbf{C}}^{r-1}\otimes\mathbf{sC}\otimes\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{1})(\overbrace{\mathbf{C}\otimes\mathbf{C}\otimes\cdots\otimes\mathbf{C}\otimes\mathbf{C}}^{r}\otimes\mathbf{s}\otimes\mathbf{1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{1})\\
&= -\mathrm{i}\mathbf{Q}_rP_{r+1}
\end{aligned}\tag{12}$$

---

[4] 2^{2n} 個のベクトルの中から任意の 2 個を選ぶと，このベクトルの作り方から，一方に含まれ，一方には含まれないような $\mathbf{\Gamma}_k$ が必ず存在する．ということは，$\mathbf{\Gamma}_1, \mathbf{\Gamma}_2, \cdots, \mathbf{\Gamma}_n$ が 1 次独立になるのと同じであるからこの 2 つのベクトルは独立である．したがって，2^{2n} 個のベクトルは 1 次独立である．

が成り立つ．これから，

$$\mathbf{s}_r\mathbf{s}_{r+1} = -\mathrm{i}\mathbf{Q}_r\mathbf{P}_{r+1} = \mathrm{i}\mathbf{P}_{r+1}\mathbf{Q}_r \tag{13}$$

となる．あるいは，以下のようにしても導くことができる．

$$\begin{aligned}
\mathbf{s}_r\mathbf{s}_{r+1} &= (\mathbf{C}_1\cdots\mathbf{C}_{r-1}\mathbf{P}_r)(\mathbf{C}_1\cdots\mathbf{C}_r\mathbf{P}_{r+1}) \\
&= (\mathbf{P}_r\mathbf{C}_1\cdots\mathbf{C}_{r-1})(\mathbf{C}_1\cdots\mathbf{C}_r\mathbf{P}_{r+1}) \\
&= \mathbf{P}_r\mathbf{C}_1^2\cdots\mathbf{C}_{r-1}^2\mathbf{C}_r\mathbf{P}_{r+1} \\
&= \mathbf{P}_r\mathbf{C}_r\mathbf{P}_{r+1} \\
&= -\mathrm{i}\mathbf{Q}_r\mathbf{P}_{r+1} = \mathrm{i}\mathbf{P}_{r+1}\mathbf{Q}_r
\end{aligned} \tag{14}$$

ただし，式 (O-5)，(O-11) から得られる $\mathbf{P}_r\mathbf{C}_r = -\mathrm{i}\mathbf{Q}_r$ という関係を用いた．この式は $1 \le r \le n-1$ の場合に成り立つ．$r = n$ 場合は，$\mathbf{s}_{n+1} = \mathbf{s}_1$ であるから，

$$\begin{aligned}
\mathbf{s}_n\mathbf{s}_1 &= (\mathbf{C}_1\cdots\mathbf{C}_{n-1})\mathbf{P}_n\mathbf{P}_1 = (\mathbf{C}_1\cdots\mathbf{C}_{n-1})\mathbf{C}_n^2\mathbf{P}_n\mathbf{P}_1 \\
&= (\mathbf{C}_1\cdots\mathbf{C}_n)(-\mathbf{P}_n\mathbf{C}_n)\mathbf{P}_1 \\
&= (\mathbf{C}_1\cdots\mathbf{C}_n)(\mathrm{i}\mathbf{Q}_n)\mathbf{P}_1 \\
&= -\mathrm{i}\mathbf{Q}_n(\mathbf{C}_1\cdots\mathbf{C}_n)\mathbf{P}_1 \\
&= \mathrm{i}\mathbf{Q}_n\mathbf{P}_1(\mathbf{C}_1\cdots\mathbf{C}_n) \\
&= -\mathrm{i}\mathbf{P}_1\mathbf{Q}_n(\mathbf{C}_1\cdots\mathbf{C}_n) \\
&= -\mathrm{i}\mathbf{P}_1\mathbf{Q}_n\mathbf{U}
\end{aligned} \tag{15}$$

となる．ただし，$\mathbf{U} = \mathbf{C}_1\cdots\mathbf{C}_n$ である．（論文の式の符号は誤っている．）式 (14)，(15)，および式 (O-4-1) から，

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}_2 &= \exp(H'\sum_{r=1}^{n}\mathbf{s}_r\mathbf{s}_{r+1}) = \exp(\mathrm{i}H'\sum_{r=1}^{n-1}\mathbf{P}_{r+1}\mathbf{Q}_r - \mathrm{i}H'\mathbf{P}_1\mathbf{Q}_n\mathbf{U}) \\
&= \prod_{r=1}^{n-1}\exp(\mathrm{i}H'\mathbf{P}_{r+1}\mathbf{Q}_r)\exp(-\mathrm{i}H'\mathbf{P}_1\mathbf{Q}_n\mathbf{U})
\end{aligned} \tag{O-14}$$

となる．この式でも指数部の符号が論文と異なる．

さて，$\mathbf{V}_1$ と $\mathbf{V}_2$ が両方共同様の形式で記述できるようになった．$\mathbf{V}_2$ の $r = n$ に対応する付加項を除けば，$\mathbf{V}_2$ は $\mathbf{V}_1$ の $\mathbf{P}_r$ を $\mathbf{P}_{r+1}$ に変換することで得られる．このような変換は $2n$ 次元空間の 1 対 1 写像で表される．一方，この変換は，2^n 次元空間における表現の相似変換で同等に表される．この同等性の証明は後に示す．

An Alternative Realization（もう一つの行列表現）

式 (O-10)，あるいは式 (1) の反交換関係は，相似変換しても変わらないから，$\mathbf{\Gamma}_k$ を正則な 2^n 次正方行列 $\mathbf{S}$ で相似変換した $\mathbf{\Gamma}_k^*$ も同じ反交換関係を満たす．実際，式 (1) から

$$\mathbf{S}\mathbf{\Gamma}_l\mathbf{S}^{-1}\mathbf{S}\mathbf{\Gamma}_k\mathbf{S}^{-1} + \mathbf{S}\mathbf{\Gamma}_k\mathbf{S}^{-1}\mathbf{S}\mathbf{\Gamma}_l\mathbf{S}^{-1} = 2\delta_{kl}$$

となり，

$$\mathbf{\Gamma}_l^*\mathbf{\Gamma}_k^* + \mathbf{\Gamma}_k^*\mathbf{\Gamma}_l^* = 2\delta_{kl}$$

となるからである．このような $\mathbf{\Gamma}_k^*$ の例として，

$$\mathbf{\Gamma}_{2r-1}^* \equiv \underbrace{\overbrace{\mathbf{s}\otimes\mathbf{s}\otimes\cdots\otimes\mathbf{s}}^{r-1}\otimes\mathbf{C}\otimes\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}\cdots\otimes\mathbf{1}}_{n} \equiv \mathbf{P}_r^* \quad (1\le k\le n) \tag{O-15-1}$$

$$\mathbf{\Gamma}_{2r}^* \equiv \underbrace{\overbrace{\mathbf{s}\otimes\mathbf{s}\otimes\cdots\otimes\mathbf{s}}^{r-1}\otimes\mathrm{i}\mathbf{C}\mathbf{s}\otimes\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}\cdots\otimes\mathbf{1}}_{n} \equiv \mathbf{Q}_r^* \quad (1\le k\le n) \tag{O-15-2}$$

が挙げられる．この $\mathbf{\Gamma}_k^*$ は次の $\mathbf{g}$ を用いて相似変換，すなわち $\mathbf{\Gamma}_k^* = \mathbf{g}\mathbf{\Gamma}_k\mathbf{g}^{-1}$ として得られる．ここで，$\mathbf{g}$ は，

$$\mathbf{g} = 2^{-n/2}(\mathbf{C}+\mathbf{s})\otimes(\mathbf{C}+\mathbf{s})\otimes\cdots\otimes(\mathbf{C}+\mathbf{s}) = \mathbf{g}^{-1} \tag{16}$$

である．この $\mathbf{g}$ は相似変換により $\mathbf{s}$ を $\mathbf{C}$ に，$\mathbf{C}$ を $\mathbf{s}$ に変換する[5]．

このような性質により，式 (10) に相似変換 $\mathbf{g}$ を施すと，

$$\mathbf{s}_r = -\mathrm{i}\mathbf{P}_r^*\mathbf{Q}_r^* \tag{17}$$

となり，これは対角化行列であるから，式 (O-13) の $\mathbf{V}_1$ に相似変換 $\mathbf{g}$ を施した

$$\mathbf{g}\mathbf{V}_1\mathbf{g} = \prod_{r=1}^{n}\exp(-\mathrm{i}H^*\mathbf{P}_r^*\mathbf{Q}_r^*) \tag{18}$$

も対角化行列である．

一方，式 (14) に相似変換 $\mathbf{g}$ を施すと，

$$\mathbf{C}_r\mathbf{C}_{r+1} = \mathrm{i}\mathbf{P}_{r+1}^*\mathbf{Q}_r^* \tag{19}$$

となり，これは対角行列ではないので，式 (O-14) の $\mathbf{V}_2$ に相似変換 $\mathbf{g}$ を施しても対角行列にはならない．

The Spin-Representation of the Orthogonal Group（直交群とそのスピノールによる表現）

［定理］

$\mathbf{\Gamma}_k$ が行列による表現で，反交換関係 (O-10) を満たすなら，その相似変換 $\mathbf{\Gamma}_k^* = \mathbf{S}\mathbf{\Gamma}_k\mathbf{S}^{-1}$ も反交換関係を満たす行列表現である．

一方，その逆も成り立つ．すなわち，$\mathbf{\Gamma}_k$ と $\mathbf{\Gamma}_k^*$ が行列表現で，$\mathbf{\Gamma}_k^*$ が $\mathbf{\Gamma}_k$ からの同型写像で，かつ両方共反交換関係 (O-10) を満たせば，$\mathbf{\Gamma}_k^* = \mathbf{S}\mathbf{\Gamma}_k\mathbf{S}^{-1}$ となる行列 $\mathbf{S}$ が必ず存在する．もし，2 つの集合が相似変換によって 1 対 1 に対応しているとき（自己同型），2 つの集合は等しいと言うことにすれば，反交換関係 (O-10) を満たす行列表現は 1 つの表現しか存在しない．その表現は n に依存する．

[5] このことは次のようにして確かめられる．

$$\mathbf{C}+\mathbf{s} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

であるので，

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

が成り立つ．つまり，$\frac{1}{2}(\mathbf{C}+\mathbf{s})^2 = \mathbf{1}$ である．

また，

$$(\mathbf{C}+\mathbf{s})\mathbf{C}(\mathbf{C}+\mathbf{s}) = (\mathbf{C}+\mathbf{s})(1+\mathbf{C}\mathbf{s}) = \mathbf{C}+2\mathbf{s}+\mathbf{s}\mathbf{C}\mathbf{s} = 2\mathbf{s}$$

である．これから，

$$\mathbf{C} = \tfrac{1}{4}(\mathbf{C}+\mathbf{s})^2\mathbf{C}\tfrac{1}{4}(\mathbf{C}+\mathbf{s})^2 = \tfrac{1}{2}(\mathbf{C}+\mathbf{s})\mathbf{s}\tfrac{1}{2}(1+\mathbf{C}\mathbf{s})$$

となり，$\frac{1}{2}(\mathbf{C}+\mathbf{s})$ は $\mathbf{s}$ を $\mathbf{C}$ に，$\mathbf{C}$ を $\mathbf{s}$ に変換する．したがって，$\mathbf{g}$ は n 個の直積からなる行列の $\mathbf{s}$ を $\mathbf{C}$ に，$\mathbf{C}$ を $\mathbf{s}$ に変換する．

この定理の前段はほぼ自明であるが，逆の証明は，論文にも書いてあるように簡単には済まされず，かなりスペースを使うので付録に記載した．

ここから始まる部分は非常に独創性の高い，興味深い部分である．いわば，この論文の肝である．

$\mathbf{\Gamma}_k$ $(1 \le k \le 2n)$ が具体的な行列表現であるとき，$\mathbf{\Gamma}_k$ の線形結合も $\mathbf{\Gamma}_k$ と同じく反交換関係を満たすことを示すことができる．この線形結合を $\mathbf{\Gamma}_k^*$ とすると，これは $\mathbf{\Gamma}_k$ から $\mathbf{\Gamma}_k^*$ への変換である．この変換は $2n$ 個の基底 $\mathbf{\Gamma}_k$ の線形結合であるから，$2n$ 次元の空間における行列表現で表される．一方，$\mathbf{\Gamma}_k$ と $\mathbf{\Gamma}_k^*$ を 2^n 次元空間の行列表現と見た時には，この変換は 2^n 次元空間における行列の変換として表すことができる．ここに，$2n$ 次元空間とスピノール表現よる 2^n 次元空間の関係が生じるのである．以下，この関係を具体的に見ていこう．

$\mathbf{\Gamma}_k$ の線形結合を $\mathbf{\Gamma}_k^*$ とするとき，

$$\mathbf{\Gamma}_k^* = \sum_{j=1}^{2n} o_{jk}\mathbf{\Gamma}_j, \qquad 1 \le k \le 2n \tag{O-17}$$

とすることができる．o_{jk} は転回形数で，一般に複素数である．まず，変換後に $(\mathbf{\Gamma}_k^*)^2 = 1$ となる条件を見ていこう．以下の計算の過程で $\mathbf{\Gamma}_k^*$ を展開し，途中 $i < j$ となる項については i と j を交換して総和することにより，

$$\begin{aligned}
(\mathbf{\Gamma}_k^*)^2 &= (\sum_j o_{jk}\mathbf{\Gamma}_j)^2 \\
&= \sum_{i>j} o_{ik}o_{jk}\mathbf{\Gamma}_i\mathbf{\Gamma}_j + \sum_{i<j} o_{ik}o_{jk}\mathbf{\Gamma}_i\mathbf{\Gamma}_j + \sum_{j=1}^{2n} o_{jk}^2\mathbf{\Gamma}_i^2 \\
&= \sum_{i>j} o_{ik}o_{jk}\mathbf{\Gamma}_i\mathbf{\Gamma}_j + \sum_{j<i} o_{jk}o_{ik}\mathbf{\Gamma}_j\mathbf{\Gamma}_i + \sum_{j=1}^{2n} o_{jk}^2 \\
&= \sum_{i>j} o_{ik}o_{jk}\mathbf{\Gamma}_i\mathbf{\Gamma}_j - \sum_{j<i} o_{jk}o_{ik}\mathbf{\Gamma}_i\mathbf{\Gamma}_j + \sum_{j=1}^{2n} o_{jk}^2 \\
&= \sum_{i>j} (o_{ik}o_{jk} - o_{jk}o_{ik})\mathbf{\Gamma}_i\mathbf{\Gamma}_j + \sum_{j=1}^{2n} o_{jk}^2 \\
&= \sum_{j=1}^{2n} o_{jk}^2
\end{aligned} \tag{20}$$

となるから，$(\mathbf{\Gamma}_k^*)^2 = 1$ とするには，

$$\sum_{j=1}^{2n} o_{jk}^2 = 1 \tag{21}$$

でなければならない．

次に，反交換関係を見ていこう．まず，

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Gamma}_k^*\mathbf{\Gamma}_l^* &= \sum_{j,i=1}^{2n} o_{jk}o_{il}\mathbf{\Gamma}_j\mathbf{\Gamma}_i \\
&= \sum_{i\neq j} o_{jk}o_{il}\mathbf{\Gamma}_j\mathbf{\Gamma}_i + \sum_{j=1}^{2n} o_{jk}o_{jl}\mathbf{\Gamma}_j^2 \\
&= \sum_{i\neq j} o_{jk}o_{il}\mathbf{\Gamma}_j\mathbf{\Gamma}_i + \sum_{j=1}^{2n} o_{jk}o_{jl}
\end{aligned} \tag{22}$$

である．同様に，$\mathbf{\Gamma}_l^*\mathbf{\Gamma}_k^*$ についても，次の第 2 式の第 1 項で i と j を交換して総和することにより，

$$\begin{aligned}\mathbf{\Gamma}_l^*\mathbf{\Gamma}_k^* &= \sum_{j,i=1}^{2n} o_{jl}o_{ik}\mathbf{\Gamma}_j\mathbf{\Gamma}_i \\ &= \sum_{i\neq j} o_{jl}o_{ik}\mathbf{\Gamma}_j\mathbf{\Gamma}_i + \sum_{j=1}^{2n} o_{jl}o_{jk}\mathbf{\Gamma}_j^2 \\ &= \sum_{i\neq j} o_{il}o_{jk}\mathbf{\Gamma}_i\mathbf{\Gamma}_j + \sum_{j=1}^{2n} o_{jl}o_{jk} \end{aligned} \tag{23}$$

となる．式 (22) と式 (23) を辺辺加えて反交換関係式 (10) を適用すると，

$$\mathbf{\Gamma}_k^*\mathbf{\Gamma}_l^* + \mathbf{\Gamma}_l^*\mathbf{\Gamma}_k^* = \sum_{i\neq j} o_{jk}o_{il}(\mathbf{\Gamma}_j\mathbf{\Gamma}_i + \mathbf{\Gamma}_i\mathbf{\Gamma}_j) + 2\sum_{j=1}^{2n} o_{jk}o_{jl} = 2\sum_{j=1}^{2n} o_{jk}o_{jl}$$

となる。ここで、$\mathbf{\Gamma}_l^*$，$\mathbf{\Gamma}_k^*$ が反交換関係式 (10) を満たすためには，$k=l$ のとき，

$$\sum_{j=1}^{2n} o_{jk}o_{jl} = \sum_{j=1}^{2n} o_{jk}^2 = 1, \tag{24}$$

$k \neq l$ のとき，

$$\sum_{j=1}^{2n} o_{jk}o_{jl} = 0 \tag{25}$$

でなければならない．したがって，$\mathbf{\Gamma}_k^*$ が反交換関係 (O-10) を満足する条件をまとめて記述すると，

$$\sum_{j=1}^{2n} o_{jk}o_{jl} = \delta_{kl}, \qquad (1 \leq k, l \leq 2n) \tag{O-18}$$

ということになる．

次に，展開係数の o_{jk} について考えてみよう．o_{jk} は $2n$ 次正方行列の成分を表している．したがって，式 (O-18) の左辺はこの行列の転置行列と該行列の積を意味しており，右辺はそれが単位行列になることから，行列 $\{o_{jk}\}$ は 直交行列であることがわかる．この行列は一般に $2n$ 次元空間の回転を表しており，成分が実数なら $2n$ 次元ユークリッド空間における回転を表す．

行列 $\{o_{jk}\}$ を $\mathbf{o}$ で表すと，$\mathbf{o}$ は $2n$ 次の正方行列であり，その変換は，

$$\mathbf{o} : \mathbf{\Gamma}_k \to \mathbf{\Gamma}_k^* = \sum_{j=1}^{2n} o_{jk}\mathbf{\Gamma}_j, \qquad (1 \leq k \leq 2n) \tag{O-19}$$

ということになる．

この操作は 5 ページに述べた定理の同型写像に相当し，2^n 次元の行列空間の元 $\mathbf{\Gamma}_k$ を同じ空間の元 $\mathbf{\Gamma}_k^*$ に変換するので，両者を相似変換で結びつける 2^n 次正方行列が必ず存在する．この行列を変換 $\mathbf{o}$ に対応するということから $\mathbf{S}(\mathbf{o})$ と表すと，

$$\mathbf{\Gamma}_k^* = \mathbf{S}(\mathbf{o})\mathbf{\Gamma}_k\mathbf{S}(\mathbf{o})^{-1} \qquad (1 \leq k \leq 2n) \tag{O-20}$$

となる．

$2n$ 次の直交行列 $\mathbf{o}$ は無数に存在し，任意の 2 個の積を作れば，明らかにそれも直交行列となり，単位行列，逆行列も当然含まれ，行列の積は結合律を満足するから $\mathbf{o}$ は群を構成する．

一方，$\mathbf{S}(\mathbf{o})$ は 2^n 次元スピン空間における $\mathbf{o}$ の表現であるから，$\mathbf{o}$ の演算に対応して，$\mathbf{S}(\mathbf{o})$ も同様の演算が可能である．つまり，回転 $\mathbf{o}$ の後に回転 $\mathbf{o}'$ を施したとすると，それは回転 $\mathbf{o}'' = \mathbf{o}'\mathbf{o}$ に等しく，それに対応して，

$$\mathbf{S}(\mathbf{o}'') = \mathbf{S}(\mathbf{o}'\mathbf{o}) = \mathbf{S}(\mathbf{o}')\mathbf{S}(\mathbf{o}) \tag{O-21}$$

となるということである．これが実際にそうなることを見てみよう．

まず，

$$\mathbf{o} : \mathbf{\Gamma}_k \to \sum_{j=1}^{2n} o_{jk}\mathbf{\Gamma}_j = \mathbf{S}(\mathbf{o})\mathbf{\Gamma}_k\mathbf{S}(\mathbf{o})^{-1}, \tag{26}$$

$$\mathbf{o}' : \mathbf{\Gamma}_k \to \sum_{l=1}^{2n} o'_{lk}\mathbf{\Gamma}_l = \mathbf{S}(\mathbf{o}')\mathbf{\Gamma}_k\mathbf{S}(\mathbf{o}')^{-1} \tag{27}$$

である．したがって，

$$\begin{aligned}\mathbf{o}'' = \mathbf{o}'\mathbf{o} : \mathbf{\Gamma}_k &\to \sum_{j=1}^{2n} o_{jk}(\sum_{l=1}^{2n} o'_{lj}\mathbf{\Gamma}_l) \\ &= \sum_{j=1}^{2n}\sum_{l=1}^{2n} o_{jk}o'_{lj}\mathbf{\Gamma}_l = \sum_{l=1}^{2n} o''_{lk}\mathbf{\Gamma}_l = \mathbf{S}(\mathbf{o}'')\mathbf{\Gamma}_k\mathbf{S}(\mathbf{o}'')^{-1}\end{aligned} \tag{28}$$

とすることができる．ここで，$\sum_{l=1}^{2n} o_{jk}o'_{lj}$ の部分は ${}^{\mathrm{t}}\mathbf{o}{}^{\mathrm{t}}\mathbf{o}' = {}^{\mathrm{t}}(\mathbf{o}'\mathbf{o})$ の (k,l) 成分を意味している．${}^{\mathrm{t}}\mathbf{o}$ は $\mathbf{o}$ の転置行列である．これは，式 (O-19) でも，$\mathbf{\Gamma}_k^*$ は転置行列 ${}^{\mathrm{t}}\mathbf{o}$ を用いて $\mathbf{\Gamma}_k$ による展開をしていることと符合している．

一方，$\mathbf{o}''$ のスピノール表現 $\mathbf{S}(\mathbf{o}")$ に関しては

$$\begin{aligned}\mathbf{o}'' = \mathbf{o}'\mathbf{o} : \mathbf{\Gamma}_k \to &\mathbf{S}(\mathbf{o}')[\mathbf{S}(\mathbf{o})\mathbf{\Gamma}_k\mathbf{S}(\mathbf{o})^{-1}]\mathbf{S}(\mathbf{o}')^{-1} \\ =&[\mathbf{S}(\mathbf{o}')\mathbf{S}(\mathbf{o})]\mathbf{\Gamma}_k[\mathbf{S}(\mathbf{o})^{-1}\mathbf{S}(\mathbf{o}')^{-1}] \\ =&(\mathbf{S}(\mathbf{o}')\mathbf{S}(\mathbf{o}))\mathbf{\Gamma}_k(\mathbf{S}(\mathbf{o}')\mathbf{S}(\mathbf{o}))^{-1}\end{aligned} \tag{29}$$

となるから，確かに，

$$\mathbf{S}(\mathbf{o}'') = \mathbf{S}(\mathbf{o}'\mathbf{o}) = \mathbf{S}(\mathbf{o}')\mathbf{S}(\mathbf{o}) \tag{O-21}$$

となっていることがわかる．

以上のことから，$2n$ 次元空間の回転を表す行列が 2^n 次元空間の行列に 1 対 1 対応していることがわかる．たとえば，$\mathbf{P}_r \to \mathbf{P}_{r+1}$，$\mathbf{Q}_r \to \mathbf{Q}_r$ という変換も $2n$ 次元空間の回転とみなすことができるから，これに対応する 2^n 次元空間の行列 $\mathbf{S}$ が存在する．すなわち，

$$\mathbf{P}_{r+1} = \mathbf{S}\mathbf{P}_r\mathbf{S}^{-1}, \qquad \mathbf{Q}_r = \mathbf{S}\mathbf{Q}_r\mathbf{S}^{-1} \tag{30}$$

となるので，$\mathbf{P}_r$ と $\mathbf{Q}_r$ で展開できる $\mathbf{V}_1$ にこの相似変換を施すと $\mathbf{P}_r \to \mathbf{P}_{r+1}$，$\mathbf{Q}_r \to \mathbf{Q}_r$ となって，$\mathbf{V}_2$ の最後の因子を無視すれば $\mathbf{V}_2 = \mathbf{S}\mathbf{V}_1\mathbf{S}^{-1}$ とすることができる．(以上第 2 節の途中まで)

参考文献

[1] Richard Brauer and Hermann Weyl, Bruria Kaufman, “Spinors in n dimensions”, Am. J. Math. **57**, 425-449 (1935).

[2] 「Kaufman の 2 次元イジングモデル厳密解の論文を読む　その 1」(2019/1/3 のエントリー).
`http://totoha.web.fc2.com/Kaufman_paper1.pdf`

付録

A. 自己同型変換と相似変換の等価性の証明

n 次正方行列からなる環の上の 1 対 1 写像が自己同型であるための条件は 2 つの元を X，Y とし，写像を * で表すと，

$$\begin{aligned}(\lambda X)^* &= \lambda X^* \\ (X+Y)^* &= X^* + Y^* \\ (XY)^* &= X^* Y^*\end{aligned} \tag{I}$$

を満たすときである．これを満たす時，自己同型であるという．自己同型は相似変換

$$X^* = AXA^{-1}$$

によってのみ可能である．ただし，A は正則行列である．

［証明］

最初に，条件 I が成り立つ場合の定理の証明を示す．式 (O-10) の反交換関係が成り立てば，条件 I が成り立つことの証明はその後に示す．

以下は Brauerl と Weyl の論文 [1] に記載された内容に補足説明を加えたものである．

G，X が正方行列のとき，

$$GX = \gamma X \tag{A1}$$

が $X = 0$ でない解を持つのは γ が G の固有値である場合である．すなわち，X の列ベクトルが G の γ に属する固有ベクトルになっている場合である．

自己同型変換を $*$ で表す．式 (A1) に変換 $*$ を施すと，条件 I により，

$$G^* X^* = \gamma X^* \tag{A2}$$

となる．したがって，G^* も G と同じ固有値を有する．G の n 個の固有値を $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n$ とすると，

$$G = \begin{pmatrix} \gamma_1 & & & 0 \\ & \gamma_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \gamma_n \end{pmatrix} \tag{A3}$$

である．G^* も同じ固有値を持つので，G と G^* は相似変換の関係にあり，

$$G^* = AGA^{-1} \tag{A4}$$

となるような正則行列 A が存在する．この A を用いて

$$X^{**} = A^{-1} X^* A \tag{A5}$$

となる X^{**} を定義する．そうすると，これは X から X^{**} への自己同型写像を定義する．これを**で表すことにする．式 (A2) に左から A^{-1}，右から A を掛けると，

$$(A^{-1} G^* A)(A^{-1} X^* A) = \gamma (A^{-1} X^* A) \tag{A6}$$

となり，したがって，式 (A5) により**変換になるから，

$$G^{**} X^{**} = \gamma X^{**} \tag{A7}$$

となる．一方，式 (A4) より，$A^{-1}G^{*}A = G$ であるから，これを式 (A6) 左辺に代入すると，

$$GX^{**} = \gamma X^{**} \tag{A8}$$

となる．この式を式 (A7) と比較すると，

$$G** = G \tag{A9}$$

となることがわかる．つまり，**変換に関して G は不変であることがわかる．

次に，

$$E(i,k) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} & & k & \end{array} \\ i & \begin{pmatrix} 0 & & \vdots & 0 \\ & & \vdots & \\ \cdots & \cdots & 1 & \cdots \\ 0 & & \vdots & 0 \end{pmatrix} \end{array} \tag{A10}$$

という i 行 k 列の　1 つの成分のみ 1 でそれ以外は 0 である行列を考える．そうすると，

$$GE(i,k) = \gamma_i E(i,k) \tag{A11}$$

$$E(i,k)G = \gamma_k E(i,k) \tag{A12}$$

である．式 (A11) に**変換を施すと，

$$G^{**}E^{**}(i,k) = \gamma_i E^{**}(i,k) \tag{A13}$$

となる．G^{**} は**変換に不変であるから，

$$GE^{**}(i,k) = \gamma_i E^{**}(i,k) \tag{A14}$$

となる．式 (A11) と式 (A14) を比較すると，$E(i,k)$ と $E^{**}(i,k)$ は同じ斉次方程式の解であることがわかる．したがって，

$$E^{**}(i,k) = \alpha_{ik} E(i,k) \tag{A15}$$

とおくことができる．

定義から

$$E(i,i)^2 = E(i,i) \tag{A16}$$

である．これに**変換を施すと，

$$(E^{**}(i,i))^2 = E^{**}(i,i) \tag{A17}$$

となる．これに式 (A15) を代入すると，

$$\alpha_{ii}^2 = \alpha_{ii} \tag{A18}$$

となる．$\alpha_{ii} = 0$ は trivial なので，

$$\alpha_{ii} = 1 \tag{A19}$$

となる．

次に，

$$\alpha_{i1} = \alpha_i, \qquad \beta_{1k} = \beta_k \tag{A20}$$

とおく．定義から，

$$E(i,k) = E(i,1)E(1,k) \tag{A21}$$

と書くことができるから，これを**変換すると，

$$E^{**}(i,k) = E^{**}(i,1)E^{**}(1,k) \tag{A22}$$

となる．これに式 (A15) を代入すると，

$$\alpha_{ik}E(i,k) = \alpha_i\beta_k E(i,1) \tag{A23}$$

となり，すなわち，

$$\alpha_{ik} = \alpha_i\beta_k \tag{A24}$$

となる．$k = i$ とすると，式 (A19) より，

$$\alpha_{ii} = \alpha_i\beta_i = 1 \tag{A25}$$

である．したがって，

$$\alpha_i = \frac{1}{\beta_i} \tag{A26}$$

となる．したがって，式 (A24), (A26) より，

$$\alpha_{ik} = \frac{\alpha_i}{\alpha_k} \tag{A27}$$

となる．

ここで，任意の行列 X を考える．成分は x_{ik} とする．その**変換を X^{**} とする．その成分は x_{ik}^{**} とする．$E(i,k)$ の定義から，

$$E(k,i)XE(i,k) = x_{ik}E(i,k) \tag{A28}$$

である．これに**変換を施すと，

$$E^{**}(k,i)X^{**}E^{**}(i,k) = x_{ik}E^{**}(i,k) \tag{A29}$$

である．式 (A15) を代入して，

$$\alpha_{ki}E(k,i)X^{**}\alpha_{ik}E(i,k) = x_{ik}\alpha_{ik}E(i,k) \tag{A30}$$

となる．したがって，

$$E(k,i)X^{**}E(i,k) = \alpha_{ki}^{-1}x_{ik}E(i,k) \tag{A31}$$

となる．左辺は式 (A10) の定義から，式 (A28) と同様に，x_{ik}^{**} であるから，

$$x_{ik}^{**}E(i,k) = \alpha_{ki}^{-1}x_{ik}E(i,k) \tag{A32}$$

となる．したがって，

$$x_{ik}^{**} = \alpha_{ki}^{-1}x_{ik} \tag{A33}$$

である．さらに，式 (A27) から

$$x_{ik}^{**} = \alpha_i x_{ik}\alpha_k^{-1} \tag{A34}$$

となる．ここで，

$$A_0 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & 0 \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \alpha_n \end{pmatrix} \tag{A35}$$

とすると，式 (A34) は

$$X^{**} = A_0 X A_0^{-1} \tag{A36}$$

と書くことができる．これに，式 (A5) を代入すると，

$$A^{-1}X^*A = A_0XA_0^{-1} \tag{A37}$$

となる．すなわち，

$$X^* = (AA_0)X(AA_0)^{-1} \tag{A38}$$

である．つまり，*変換は相似変換である

（証明終わり）

B. 反交換関係が成立なら条件 I が成り立つことの証明

式 (10) の反交換関係が成り立てば，条件 I が成立することを証明する．

その証明の前に，条件 I の変換（写像）が環の 0 と単位元に関しては不変であることを示す．0 と 1 を変換したときに，それが 0 または 1 と異なると仮定する．これを，$\xi \neq 0$，$\eta \neq 0$ として，

$$0^* = 0 + \xi \tag{B1}$$

$$1^* = 1 + \eta \tag{B2}$$

と書くことにする．

$$(X+Y)^* = X^* + Y^* \tag{B3}$$

が成り立つとする．$X = 0$，$Y = 0$ とすると，式 (B1) から，左辺は $0+\xi$ となり，一方，右辺は $(0+\xi)+(0+\xi) = 0+2\xi$ となるから，矛盾する．したがって，式 (B3) は成り立たない．故に，式 (B3) が成り立てば式 (B1) が成り立つ．

次に，

$$(XY)^* = X^*Y^* \tag{B4}$$

が成り立つとする．$X = 1$，$Y = 1$ とすると，式 (B2) から，左辺は $1+\eta$ となり，一方，右辺は $(1+\eta)(1+\eta) = 1+2\eta+\eta^2$ となるから，矛盾する．したがって，式 (B4) は成り立たない．故に，式 (B4) が成り立てば式 (B2) が成り立つ．

以上から，条件 I が成り立てば

$$0^* = 0 \tag{B5}$$

$$1^* = 1 \tag{B6}$$

が成り立つ．今は，条件 I が成り立つことを証明するのであるから，式 (B5)，(B6) は成り立つとする．（成り立たないとするのは意味がない．）

$$(\lambda X)^* = \lambda X^* + f \tag{B7}$$

とする．$X = 1$ とすると，左辺は $\lambda^* = \lambda$，右辺は $\lambda + f$ であるから，$f = 0$ でなければならない．つまり，条件 I の第 1 式が成り立つ．

次に，

$$(XY)^* = X^*Y^* + f \tag{B8}$$

としよう．$Y = 1$ とすると，左辺は X^*，右辺は $X^* + f$ となり，$f = 0$ でなければならない．つまり，条件 I の第 3 式が成り立つ．

次に，

$$(X+Y)^* = X^* + Y^* + f \tag{B9}$$

としよう．これを用いると，

$$(XY+YX)^* = (XY)^* + (YX)^* + f = X^*Y^* + Y^*X^* + f \tag{B10}$$

となるが，式 (O-10) の反交換関係から左辺は 0，右辺は f となるので，$f = 0$ となる．つまり，条件 I の第 2 式が成り立つ．

証明の仕方はこの他にも複数あるはずである．

（その 2　終わり）