

ヤコビのツェータ関数の数値計算

2018.10.22 鈴木 実

1 はじめに

ヤコビ (Jacobi) のツェータ関数の数値計算はヤコビのテータ関数とその微分から導かれる。したがって、楕円テータ関数とその微分から導かれることになる。楕円テータ関数の数値計算はすでに示したので、ここではその微分を追加して計算すればよいことになる。計算のアルゴリズムは「電子計算機のための数値計算法 III」[1] に述べられている方法を用いた。本プログラムの計算精度は楕円テータ関数の計算と同じ 10 桁の精度になる。しかし、ノーム q が 1 に近い時には精度が悪くなる。すでに別のエントリー [2] にもこのプログラムは含まれているが、このプログラムを他の目的で利用したい場合のために、ここに分けて載せることにした。

2 計算式

2.1 ヤコビのツェータ関数 $Z(u, k)$

ヤコビのツェータ関数 $Z(u, k)$ は次のように定義される ([2], p.24) .

$$Z(u, k) = \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)} = \frac{\vartheta_4'(v, q)}{\vartheta_4(v, q)} \frac{dv}{du} = \frac{1}{2K} \frac{\vartheta_4'(v, q)}{\vartheta_4(v, q)} \quad (1)$$

ただし,

$$v = \frac{u}{2K} \quad (2)$$

である。

$Z(u, k)$ は二重周期関数である。変数が実数軸上にある場合は図 1 に示すように周期 $2K$ の周期関数である。 K は第 1 種完全楕円積分である。 $Z(u, k)$ の振幅は k とともに大きくなる。これは、後で示すように $Z(u, k)$ はノーム q に比例して、 q は k とともに大きくなるからである。

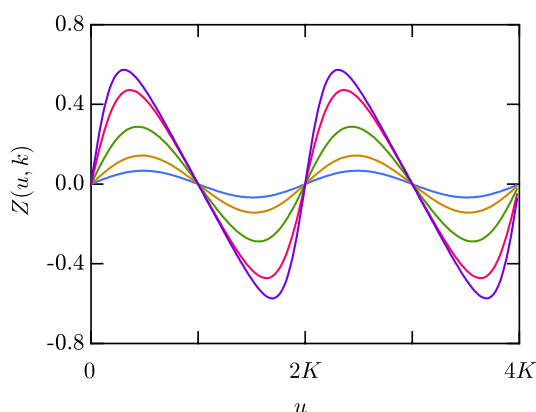


図 1: u が実数のときのヤコビのツェータ関数 $Z(u, k)$. 振幅が小さいほうから, $k = 0.5, 0.7, 0.9, 0.99, 0.999$.

最初に, $k^2 \leq 0.5$ の場合を考える. $k^2 \leq 0.5$ のときは, q が 1 よりも十分小さいので, 式 (1) において, $\vartheta_4(v, q)$ を q で展開した式を計算すれば収束が速い.

エントリー [4] の式 (4) より,

$$\begin{aligned}\vartheta_4(v, q) &= 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} \cos 2n\pi v \\ &= 1 - 2q(\cos 2\pi v + q^3 \cos 4\pi v - q^8 \cos 6\pi v + \dots)\end{aligned}\quad (3)$$

であるから,

$$\vartheta_4'(v, q) = 4\pi q(\sin 2\pi v - 2q^3 \sin 4\pi v + 3q^8 \sin 6\pi v + \dots)\quad (4)$$

である. したがって, 式 (3), (4) を式 (1) に代入することにより,

$$Z(u, k) = \frac{2\pi}{K} q \frac{\sin 2\pi v - 2q^3 \sin 4\pi v + 3q^8 \sin 6\pi v + \dots}{1 - 2q(\cos 2\pi v + q^3 \cos 4\pi v - q^8 \cos 6\pi v + \dots)}\quad (5)$$

となる. $w = 2\pi v =$ とおけば,

$$Z(u, k) = \frac{2\pi}{K} q \frac{\sin w - 2q^3 \sin 2w + 3q^8 \sin 3w + \dots}{1 - 2q(\cos w + q^3 \cos 2w - q^8 \cos 3w + \dots)}\quad (6)$$

と書くことができる. $k^2 \leq 0.5$ の場合はこの式を計算すればよい.

次に, $k^2 > 0.5$ の場合を考えよう. この場合, q が 1 に比べて十分小さいとは言えないので, q による展開式の数値計算は収束が遅くなる. 一方, 補母数は $k'^2 < 0.5$ となり, k' に対応する q' は 1 に比べて十分小さいので, q' を用いた展開式は収束が速くなる. そこで, $\vartheta_4(u, q)$ を q' を用いて展開することを考える. これは, 次の $\vartheta_4(u, q)$ に対するヤコビの虚数変換 ([3], p.546) を用いると可能である.

$$\vartheta_4(u|\tau) = \sqrt{\frac{i}{\tau}} e^{i\pi v^2} \vartheta_2\left(\frac{v}{\tau} \middle| -\frac{1}{\tau}\right)\quad (7)$$

ここで, $q = e^{i\pi\tau}$ を用いると,

$$q' = e^{-i\pi/\tau}\quad (8)$$

q' による表現 $\vartheta_4(u, q)$ は,

$$c = \frac{K}{K'} = \frac{i}{\tau}\quad (9)$$

とおいて,

$$\vartheta_4(u, q) = \sqrt{c} e^{i\pi v^2} \vartheta_2\left(\frac{v}{\tau}, q'\right)\quad (10)$$

となる.

式 (10) を微分することにより,

$$\begin{aligned}\vartheta_4'(v, q) &= \sqrt{c} e^{i\pi v^2} \left\{ -\frac{2i\pi v}{\tau} \vartheta_2\left(\frac{v}{\tau}, q'\right) + \frac{d\vartheta_2}{dv}\left(\frac{v}{\tau}, q'\right) \right\} \\ &= -\frac{2i\pi v}{\tau} \vartheta_4(v, q) + \sqrt{c} e^{i\pi v^2} \frac{d\vartheta_2}{dv}\left(\frac{v}{\tau}, q'\right)\end{aligned}\quad (11)$$

となる. 式 (10), (11) より,

$$\frac{\vartheta_4'(v, q)}{\vartheta_4(u, q)} = -\frac{2i\pi v}{\tau} + \frac{\frac{d\vartheta_2}{dv}\left(\frac{v}{\tau}, q'\right)}{\vartheta_2\left(\frac{v}{\tau}, q'\right)}\quad (12)$$

となり, これを式 (1) に代入すれば $k^2 > 0.5$ の場合における $Z(u, k)$ の q' による展開式を得ることができる.

エントリー [4] の式 (2) から,

$$\begin{aligned}\vartheta_2(v, q) &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+1/2)^2} \cos(2n+1)\pi v \\ &= 2q^{1/4} \sum_{n=0}^{\infty} q^{n(n+1)} \cos(2n+1)\pi v\end{aligned}\quad (13)$$

であるので,

$$\begin{aligned}\vartheta_2\left(\frac{v}{\tau}, q'\right) &= 2q'^{1/4} \sum_{n=0}^{\infty} q'^{n(n+1)} \cos(2n+1)\pi \frac{v}{\tau} \\ &= 2q'^{1/4} \left(\cos \frac{v}{\tau} + q'^2 \cos 3\frac{v}{\tau} + q'^6 \cos 5\frac{v}{\tau} + \dots \right)\end{aligned}\quad (14)$$

となる。したがって、これを微分することにより,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dv} \vartheta_2\left(\frac{v}{\tau}, q'\right) &= -\frac{2\pi}{\tau} q'^{1/4} \sum_{n=0}^{\infty} q'^{n(n+1)} (2n+1) \sin(2n+1)\pi \frac{v}{\tau} \\ &= -\frac{2\pi}{\tau} q'^{1/4} \left\{ \sin \pi \frac{v}{\tau} + q'^2 \sin 3\pi \frac{v}{\tau} + q'^6 \sin 5\pi \frac{v}{\tau} \right\}\end{aligned}\quad (15)$$

となる。

ここで,

$$v' = cv \quad (16)$$

とおくと、式 (9) より,

$$\frac{v}{\tau} = \frac{cv}{i} = -iv' \quad (17)$$

であること、および式 (8) から,

$$e^{\pi v'} = e^{\pi cv} = (e^{-\pi c})^{-v} = q'^{-v} \quad (18)$$

であることに注意して、式 (14) を書き換えると,

$$\begin{aligned}\vartheta_2\left(\frac{v}{\tau}, q'\right) &= 2q'^{1/4} \left\{ \cos(-i\pi v') + q'^2 \cos(-3i\pi v') + q'^6 \cos(-5i\pi v') + \dots \right\} \\ &= 2q'^{1/4} \left\{ \cosh(\pi v') + q'^2 \cosh(3\pi v') + q'^6 \cosh(5\pi v') + \dots \right\} \\ &= q'^{1/4} \left\{ (e^{\pi v'} + e^{-\pi v'}) + q'^2 (e^{3\pi v'} + e^{-3\pi v'}) + q'^6 (e^{5\pi v'} + e^{-5\pi v'}) + \dots \right\} \\ &= q'^{1/4} \left\{ (q'^{-v} + q'^v) + q'^2 (q'^{-3v} + q'^{3v}) + q'^6 (q'^{-5v} + q'^{5v}) + \dots \right\} \\ &= q'^{-5v+1/4} \left\{ (q'^{4v} + q'^{6v}) + q'^2 (q'^{2v} + q'^{8v}) + q'^6 (1 + q'^{10v}) + \dots \right\}\end{aligned}\quad (19)$$

と表すことができる。

同様に、式 (15) を書き換えることにより,

$$\begin{aligned}\frac{d\vartheta_2}{dv}\left(\frac{v}{\tau}, q'\right) &= -\frac{2\pi}{\tau} q'^{1/4} \left\{ \sin(-i\pi v') + 3q'^2 \sin(-3i\pi v') + 5q'^6 \sin(-5i\pi v') + \dots \right\} \\ &= \frac{2\pi i}{\tau} q'^{1/4} \left\{ \sinh(\pi v') + 3q'^2 \sinh(3\pi v') + 5q'^6 \sinh(5\pi v') + \dots \right\} \\ &= \pi c q'^{1/4} \left\{ (e^{\pi v'} - e^{-\pi v'}) + 3q'^2 (e^{3\pi v'} - e^{-3\pi v'}) + 5q'^6 (e^{5\pi v'} - e^{-5\pi v'}) + \dots \right\} \\ &= \pi c q'^{1/4} \left\{ (q'^{-v} - q'^v) + 3q'^2 (q'^{-3v} - q'^{3v}) + 5q'^6 (q'^{-5v} - q'^{5v}) + \dots \right\} \\ &= \pi c q'^{-5v+1/4} \left\{ (q'^{4v} - q'^{6v}) + 3q'^2 (q'^{2v} - q'^{8v}) + 5q'^6 (1 - q'^{10v}) + \dots \right\}\end{aligned}\quad (20)$$

となる。ここで、 $z = q'^{2v}$ とおくと、式 (19), (20) はそれぞれ、

$$\begin{aligned}\vartheta_2\left(\frac{v}{\tau}, q'\right) &= q'^{-5v+1/4}\{(z^2 + z^3) + q'^2(z + z^4) + q'^6(1 + z^5) + \dots\} \\ &= q'^{-5v+1/4}\{q'^6z^5 + q'^2z^4 + z^3 + z^2 + q'^2z + q'^6 + \dots\}\end{aligned}\quad (21)$$

$$\begin{aligned}\frac{d\vartheta_2}{dv}\left(\frac{v}{\tau}, q'\right) &= \pi c q'^{-5v+1/4}\{(z^2 - z^3) + 3q'^2(z - z^4) + 5q'^6(1 - z^5) + \dots\} \\ &= \pi c q'^{-5v+1/4}\{-5q'^6z^5 - 3q'^2z^4 - z^3 + z^2 + 3q'^2z + 5q'^6 + \dots\}\end{aligned}\quad (22)$$

となる。

式 (21), (22) を式 (12) に代入し、その結果を式 (1) に代入すると、

$$Z(u, k) = -\frac{\pi i v}{K\tau} + \frac{\pi c}{2K} \frac{-5q'^6z^5 - 3q'^2z^4 - z^3 + z^2 + 3q'^2z + 5q'^6 + \dots}{q'^6z^5 + q'^2z^4 + z^3 + z^2 + q'^2z + q'^6 + \dots}\quad (23)$$

となる。式 (2), (3) から、 $\pi i v / K\tau = u / 2KK'$, $\pi c / 2K = \pi / 2K'$ となるので、これを代入すると、

$$Z(u, k) = -\frac{\pi}{2KK'}u + \frac{\pi}{2K'} \frac{-5q'^6z^5 - 3q'^2z^4 - z^3 + z^2 + 3q'^2z + 5q'^6 + \dots}{q'^6z^5 + q'^2z^4 + z^3 + z^2 + q'^2z + q'^6 + \dots}\quad (24)$$

となるから、 $k^2 > 0.5$ の場合、 $Z(u, k)$ 関数の数値計算はこの式を計算すればよい。

式 (14), (15) で、展開項をもう 1 項増やした場合は、

$$Z(u, k) = -\frac{\pi}{2KK'}u + \frac{\pi}{2K'} \frac{-7q'^{12}z^7 - 5q'^6z^6 - 3q'^2z^5 - z^4 + z^3 + 3q'^2z^2 + 5q'^6z + 7q'^{12} + \dots}{q'^{12}z^7 + q'^6z^6 + q'^2z^5 + z^4 + z^3 + q'^2z + q'^6z + q'^{12} + \dots}\quad (25)$$

となる。

参考文献

- [1] 山内二郎, 宇野利雄, 一松信, 「電子計算機のための数値計算法 III」(培風館), 1971 年, p.258.
- [2] 「Onsager の 2 次元イジングモデル厳密解の論文を読む その 12 (完)」(2018/7/1 のエントリー)
http://totoha.web.fc2.com/Onsager_paper12.pdf
- [3] 「自然科学者のための数学概論 [増訂版]」1954 年 (岩波書店) .
- [4] 「楕円 theta 関数の数値計算プログラム」(2017/8/7 のエントリー)
http://totoha.web.fc2.com/Elliptic_theta_functions.pdf

プログラムソース

`QKK(double *p)` は第 1 種完全楕円積分 K と K' の計算をする。この関数は、`QKKEE(double *p)[?]` から第 2 種完全楕円積分の計算を除いたものである。配列 `p[6]` のアドレスを引数にして `QKK(double *p)` の計算結果を取り出す。

計算は $k^2 \leq 0.5$ の時は式 (6) を、 $k^2 > 0.5$ のときは式 (25) を用いる。

ヤコビのツェータ関数の計算プログラム

```
/* ZETA.c */
// provides values for the Jacobi Zeta functions form  $u=(2K)v$ 
// 電子計算機のための数値計算法 III p.275
// M. Suzuki 2018.6.24

#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <string.h>
#include <math.h>

int QKK(double *p)
// p[0]=q, p[1]=qbis, p[2]=kk, p[3]=kkbis, p[4]=k;
{
    double k, k2, kork2, q, qbis, kk, kkbis;
    double eps, eps4, kbis, sqkbis, kkovpi, lnq;
    double pi=M_PI, pisiq;
    int LARGE, M;

    pisiq=pi*pi;
    kork2=p[4];
    M=p[5]+0.001;
    if(M==2) k2=kork2;
    else k2=kork2*kork2;
    LARGE=k2>0.5;
    if(LARGE) k2=1.0-k2;
    if(k2==0)
    {
        q=0;
        qbis=1.0;
        kk=pi/2.0;
        kkbis=1e124;
    }
    else
    {
        kbis=sqrt(1.0-k2);
        sqkbis=sqrt(kbis);
        eps=0.5*k2/((1.0+kbis+2.0*sqkbis)*(1.0+kbis));
        eps4=pow(eps, 4);
        q=((15.0*eps4+2.0)*eps4+1.0)*eps;
        kkovpi=(1.0+2.0*pow(q, 4))/(1.0+sqkbis);
        kkovpi*=2*kkovpi;
        kk=pi*kkovpi;
        lnq=log(1.0/q);
        kkbis=kkovpi*lnq;
        qbis=exp(-pisiq/lnq);
    }
    if(LARGE)
    {
        p[0]=qbis;
        p[1]=q;
        p[2]=kkbis;
        p[3]=kk;
    }
    else
    {
        p[0]=q;
        p[1]=qbis;
        p[2]=kk;
        p[3]=kkbis;
    }
}
```

```

    return 0;
}

double ZETA(double u, double *p)
{
// QKK(p); p[0]=q, p[1]=qbis, p[2]=kk, p[3]=kkbis, p[4]=k;
    double q, q2, q3, q6, q8, q12, qbis;
    double k, k2, kk, kkbis, kk2;
    double v, w;
    double theta, ditheta, zeta;
    double pi=M_PI, doub_pi=2*pi;
    int S;

    q=p[0];
    qbis=p[1];
    kk=p[2];
    kkbis=p[3];
    k=p[4];
    k2=k*k;
    kk2=2*kk;

    S=(u>0)-(u<0);
    u=fabs(u);
    while(u>kk2) u-=kk2;
    v=u/kk2;

    if(k2<=0.5)
    {
        w=doub_pi*v;
        q2=q*q;
        q3=q*q2;
        q8=q3*q3*q2;
        ditheta=sin(w)-2*q3*sin(2*w)+3*q8*sin(3*w);
        theta=1-2*q*(cos(w)-q3*cos(2*w)+q8*cos(3*w));
        zeta=doub_pi*q*(ditheta/theta)/kk;
        return S*zeta;
    }
    else
    {
        w=pow(qbis, 2.0*v);
        q2=qbis*qbis;
        q6=q2*q2*q2;
        q12=q6*q6;
        ditheta(((((-7*q12*w-5*q6)*w-3*q2)*w-1)*w+1)*w+3*q2)*w+5*q6)*w+7*q12;
        theta((((q12*w+q6)*w+q2)*w+1.0)*w+1.0)*w+q2)*w+q6)*w+q12;
        zeta=(pi/kkbis/2)*(ditheta/theta-u/kk);
        return S*zeta;
    }
}

int main()
{
    FILE *fp;
    double k, kk, kk2, v, dv, u, z;
    double p[6], pi;
    int i, j, n;
    pi=M_PI;
    n=200;
    dv=2.0/n;
    k=0.999;
    p[5]=1;

```

```
p[4]=k;
QKK(p);
kk=p[2];
kk2=2*kk;

char *filenameout="zeta_0.999.txt";
fp=fopen(filenameout, "w");
for(i=0;i<n;i++)
{
    v=dv*i;
    u=v*kk2;
    z=ZETA(u, p);
    printf("%lf\t%le\n", v, z);
    fprintf(fp, "%lf\t%le\n", v, z);
}
fclose(fp);
}
```