双曲余弦定理の補足

2017.3.21　　鈴木　実

1　双曲余弦定理と双曲距離と内積について

前のエントリー [1, 2, 3] で双曲余弦定理を導いた方法は見かけ上 3 通りあって，それぞれ異なっているように見えるが，実は本質的には同じである．重要なことは双曲面の 2 つの位置ベクトルの双曲内積が 2 点の双曲長さを d とすると $-\cosh d$ になっていることで，定理はほぼこのことで尽きていると言ってもよい．

なぜ双曲面の直線距離が双曲線関数の引数になるのか，ということは前のエントリー [1] にも述べてあるが，もっと直観的には，双曲面と球面との間の関係から見るのがわかりやすい．つまり，双曲面上の直線距離が双曲線関数の引数になるのは，球面上の直線距離がラジアンで，それが三角関数の引数になっていることと同じである，と考えればよい．これは，三角関数の引数が実数から虚数になると双曲線関数になることに対応して，球面上の距離が虚数になると，球面が双曲面に変わり，虚数の距離が双極面上の実数の距離になって，それが双曲線関数の引数になるということである．すぐには腑に落ちなくても，球面上の点が三角関数で表されるのと，双曲面上の点が双曲線関数で表されるのは，引数が実数から虚数，あるいはその逆の変換の関係で結ばれているということである．こういう関係を知れば，球面上の点は三角関数で表され，球面上の直線距離が三角関数の引数となり，双曲面上の点は双曲線関数で表され，双曲面上の直線距離がその引数になるといってもおかしくないという気持ちにはなれる．双曲面と球面の関係は以下の通りである．

球面と双曲面の関係を見るために，原点を中心とする半径 $r = 1$ の球面の $y = 0$ 面による断面を考えよう．その交線は $z^2 + x^2 = 1$ というこの球の大円の方程式で表される．この大円上の点を $z = \cos\theta$，$x = \sin\theta$ とすればこの大円を θ をパラメータとして表すことができる．ただし，$z = 1$ で $\theta = 0$ とする．つまり，これは 1 つの大円上ではあるが，球面上の点は三角関数で表されるということである．そうすると，

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \tag{1}$$

という関係式になり，球面上の 2 点の作る円弧の長さ（球面幾何の直線距離）もラジアン θ' になることがわかる（θ' は 2 点を見込む角度）．また，位置ベクトルの内積も $\cos\theta'$ になる．

ここで，$\theta \to \mathrm{i}t$，半径を $r = 1 \to r = \mathrm{i}$ と置き換えると，

$$\mathrm{i}^2\cosh^2 t + \mathrm{i}^2\sinh^2 \mathrm{i}t = \mathrm{i}^2$$

すなわち，

$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1 \tag{2}$$

という関係式が成り立ち，これが，$z = \cosh t$，$x = \sinh t$，$z^2 - x^2 = 1$ となり，双曲幾何の二葉回転双曲面（$y = 0$ 面との交線）の座標にぴったりと当てはまる．したがって，線分の長さも，虚数ラジアン $\mathrm{i}t$ から t となり，内積も $-\cosh t$ となる（$-$ は半径の i から来ている）．

もし，大円上の点を $x = \cos\theta$，$z = \sin\theta$ とすれば同じように式 (2) の関係が成り立つが，双曲面は一葉回転双曲面が対応する．

双曲余弦定理は上の関係式と双曲線関数の加法定理から得られる．すなわち，

$$\cosh(a + b) = \cosh a\cosh b + \sinh a\sinh b \tag{3}$$
$$\sinh(a + b) = \sinh a\cosh b + \cosh a\sinh b \tag{4}$$

という関係式から簡単に得られるのである．これが双曲余弦定理にどのように結びつくのかを示す前に双曲線関数，双曲距離，内積の関係を最も基本的な $y=0$ 面で定義される測地線で調べてみよう．

図 1 のような双曲面の測地線（双曲直線）を考える．その上に，点 A，B，C を考える．点 A は原点の直上にあり，双曲線の最下点である．座標は

$$\mathrm{A} \quad (0,0,1) \tag{5}$$

$$\mathrm{B} \quad (\sinh t_1, 0, \cosh t_1) \tag{6}$$

$$\mathrm{C} \quad (\sinh t, 0, \cosh t) \tag{7}$$

である．これから双曲計量（[4] の式 (11)）の内積は

$$\langle\, \overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}\,\rangle = -\cosh t_1 \tag{8}$$

$$\langle\, \overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OC}}\,\rangle = -\cosh t \tag{9}$$

$$\begin{aligned}\langle\, \overrightarrow{\mathrm{OB}}, \overrightarrow{\mathrm{OC}}\,\rangle &= \sinh t_1 \sinh t_2 - \cosh t_1 \cosh t_2 \\ &= -\cosh(t_1 - t_2)\end{aligned} \tag{10}$$

となり，内積が距離の双曲線関数になることがわかる．一般の場合はこれに座標の回転を加えればよいので，任意の場合についてこの関係は成り立つ．

測地線を決める平面 (原点を通る平面) が z 軸から θ 傾いているときの測地線上の最下点 A$(t=0)$ とそれと異なる点 B の座標は

$$\mathrm{A} \quad (\alpha\beta, 0, \beta) \tag{11}$$

$$\mathrm{B} \quad (\alpha\beta\cosh t, \sinh t, \beta\cosh t) \tag{12}$$

で，$\alpha = \tan\theta$，$\beta = 1/\sqrt{1-\alpha^2}$ であった．したがって，内積は

$$\langle\, \overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}\,\rangle = \alpha^2\beta^2\cosh t - \beta^2\cosh t = \beta^2(\alpha^2-1)\cosh t = -\cosh t \tag{13}$$

となり，2 つの位置ベクトルの双曲内積が符号を反転した双曲距離の双曲関数で表されることを示す．つまり，前と同じ関係式が得られる．

次に，加法定理から導かれる関係を見てみよう．式 (7) で，$t_1 + t_2 = t$ であるからこれを代入すると，式 (3),

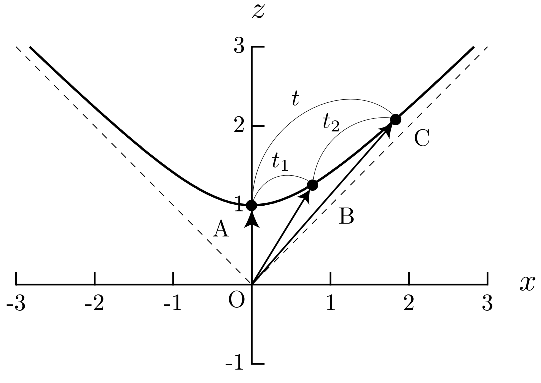

図 1: 双曲面とクライン円板の $y=0$ 面による断面図．双曲面上の点とクライン円板上の対応する点との間の関係を示す．

(4) の加法定理を用いて，

$$\begin{aligned}(\sinh t, 0, \cosh t) &= (\sinh(t_1+t_2), 0, \cosh(t_1+t_2)) \\ &= (\sinh t_1 \cosh t_2 + \cosh t_1 \sinh t_2, 0, \cosh t_1 \cosh t_2 + \sinh t_1 \sinh t_2) \\ &= (\sinh t_1, 0, \cosh t_1)\cosh t_2 + (\cosh t_1, 0, \sinh t_1)\sinh t_2 \\ &= {}^{\mathrm{t}}\mathbf{r}_0 \cosh t_2 + {}^{\mathrm{t}}\mathbf{u}\sinh t_2 \end{aligned} \tag{14}$$

となる．ここで，${}^{\mathrm{t}}\mathbf{r}_0 = (\sinh t_1, 0, \cosh t_1)$ であり，${}^{\mathrm{t}}\mathbf{u} = (\cosh t_1, 0, \sinh t_1)$ は $\mathbf{r}_0$ の単位接ベクトルであり，$\mathbf{r}_0$ の微係数である．この式は点 $\mathbf{r}_0$ を始点とする双曲直線の方程式を表している．つまり，双曲直線はある点の位置ベクトルとその点における単位接ベクトル（いまの場合微分係数は単位ベクトルになる）によって式 (14) のような形で表される．このことは以下に示すように一般的に成り立つ．加法定理から得られるこの関係式によって双曲余弦定理が直接導かれる．

もう一つの例を挙げる．ほぼ同じことであるが，z 軸から θ 傾いている式 (12) の場合でも同様のことが成り立つ．すなわち，式 (3)，(4) の加法定理を用いて，

$$\begin{aligned}&(\alpha\beta\cosh t, \sinh t, \beta\cosh t) \\ =&(\alpha\beta\cosh(t_1+t_2), \sinh(t_1+t_2), \beta\cosh(t_1+t_2)) \\ =&(\alpha\beta\cosh(\cosh t_1\cosh t_2 + \sinh t_1 \sinh t_2), \sinh(\sinh t_1 \cosh t_2 + \cosh t_1 \sinh t_2), \\ &\qquad \beta\cosh(\cosh t_1 \cosh t_2 + \sinh t_1 \sinh t_2)) \\ =&(\alpha\beta\cosh t_1, \sinh t_1, \beta\cosh t_1)\cosh t_2 + (\alpha\beta\sinh t_1, \cosh t_1, \beta\sinh t_1)\sinh t_2 \\ =&{}^{\mathrm{t}}\mathbf{r}_0\cosh t_2 + {}^{\mathrm{t}}\mathbf{u}\sinh t_2 \end{aligned} \tag{15}$$

となる．ここで，${}^{\mathrm{t}}\mathbf{r}_0 = (\alpha\beta\cosh t_1, \sinh t_1, \beta\cosh t_1)$ および ${}^{\mathrm{t}}\mathbf{u} = (\alpha\beta\sinh t_1, \cosh t_1, \beta\sinh t_1)$ である．ここでも，$\mathbf{u}$ は $\mathbf{r}_0$ を微分して得られる接ベクトルになっている．当然ながらこのように同じ式が成り立つ．

式 (14)，(15) は一般化できる．t_1 は t よりも大きい場合や負の場合も含めて任意にとることができることから，座標の回転も含めれば $\mathbf{r}_0$ を任意の点として考えることができる．また，$\mathbf{u}$ は位置ベクトル $\mathbf{r}_0$ で示された点における接ベクトルであれば任意の方向に向いていても成り立つ．つまり，いま任意の双曲面位置ベクトル $\mathbf{r}(t)$ とその点における任意の方向を向いている接ベクトル $\mathbf{u}$ が与えられたとすると，必ず $\mathbf{r}(t)\cosh r + \mathbf{u}\sinh r = \mathbf{r}(t'+r)$ と書き換えることができるのである.（ここで，右辺が t ではなく t' となっているのは，$\mathbf{u}$ の方向に依存して $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t')$ となり定数もそれにしたがって変化するからである.）

任意の点 $\mathbf{r}_0$ を通り，任意の方向を向く接線ベクトル $\mathbf{u}$ の方向に延びる双曲直線は必ず存在する．なぜなら，$\mathbf{u}$ を回転軸として回転する平面は必ず原点を横切ることができるので，その平面の中で原点を含む平面が双曲面と交差する曲線が測地線すなわち双曲直線となるからである．任意の双曲直線は

$$x = \alpha\beta\cosh t\cos\varphi - \sinh t\sin\varphi \tag{16}$$

$$y = \alpha\beta\cosh t\sin\varphi - \sinh t\cos\varphi \tag{17}$$

$$z = \beta\cosh t \tag{18}$$

で表される [1]．上の双曲直線 $\mathbf{r}$ の成分はこの α，β および t で表され，$\mathbf{r}_0$ は $t = t_0$ で示されるとしよう．そのとき，$\mathbf{u}$ は $\mathbf{r}$ の $t = t_0$ における微分係数であるから，

$$u_x = \alpha\beta\sinh t_0\cos\varphi - \cosh t_0\sin\varphi \tag{19}$$

$$u_y = \alpha\beta\sinh t_0\sin\varphi - \cosh t_0\cos\varphi \tag{20}$$

$$u_z = \beta\sinh t_0 \tag{21}$$

である．$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 1$ が成り立つことも直接確かめることができる．以上の式を用いて $\mathbf{r}_0 \cosh r + \mathbf{u} \sinh r$ の成分を計算すると式 (3)，(4) の加法定理を用いて簡単に，

$$x = \alpha\beta \cosh(t_0 + r) \cos\varphi - \sinh(t_0 + r) \sin\varphi \tag{22}$$

$$y = \alpha\beta \cosh(t_0 + r) \sin\varphi - \sinh(t_0 + r) \cos\varphi \tag{23}$$

$$z = \beta \cosh(t_0 + r) \tag{24}$$

となることがわかる．つまり，式 (14)，(15) は一般的に成り立つのである．

このことはもっと一般的に，特定の数式を使わずに別の方法で示すことができる．それを示すために次の関係式を使う．まず，$\langle \mathbf{r}_0, \mathbf{u} \rangle = 0$ である [4]．これはすなわち，位置ベクトルとその点の接ベクトルとの双曲内積は 0 であるということである．また，$\langle \mathbf{r}_0, \mathbf{r}_0 \rangle = -1$，および $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 1$ である [4]．前者は二葉回転双曲面，後者が一葉回転双曲面の位置ベクトルであることと同等である．

それでは，双曲面上の任意の点 $\mathbf{r}_0$ とその点における任意の方向を向く単位接ベクトル $\mathbf{u}$ が与えられたとき，式 (14)，(15) で与えられる位置ベクトルは r を変数として双曲直線を表すことを一般的に示そう．このことは，[3] でも示したように，$\mathbf{r}(r) = \mathbf{r}_0 \cosh r + \mathbf{u} \sinh r$ が双曲直線であることは，(1) この式を含む平面が原点含むこと，(2) この式が双曲面上にあること，の 2 つが成り立つことを示せば良い．(2) は

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{r}(r), \mathbf{r}(r) \rangle &= \langle \mathbf{r}_0, \mathbf{r}_0 \rangle \cosh^2 r + 2\langle \mathbf{r}_0, \mathbf{u} \rangle \cosh r \sinh r + \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \sinh^2 r \\ &= -\cosh^2 r + \sinh^2 r = -1\end{aligned} \tag{25}$$

となり，双曲線上にあることを示しているので (2) が満たされる．(1) については，双曲直線の乗る平面の法線ベクトルを $\mathbf{w}$ とすると，この平面の方程式は $\mathbf{w} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$ である．この平面が原点を通ることは $\mathbf{w} \cdot \mathbf{r}_0 = 0$ を示せばよい．法線ベクトルは $\mathbf{u}$ と $\mathbf{r}_0$ が共にこの平面上にあり，かつ平行ではないので，正規化を問わなければ $\mathbf{w} = \mathbf{r}_0 \times \mathbf{u}$ と書くことができる．これを用いると，

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{r}_0 = (\mathbf{r}_0 \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{r}_0 = 0 \tag{26}$$

となり，この平面が原点を含むことが示される．つまり，(1) が満たされ，結局，双曲面上の任意の点 $\mathbf{r}_0$ を始点とし，任意の方向を向く接ベクトル $\mathbf{u}$ を有する双曲直線は式 (14)，(15) で与えられることが示されるのである．

2 双曲余弦定理の導出について

2.1 接ベクトルを用いる方法

式 (14)，または式 (15) から，$\mathbf{r}_0$ を始点とする 2 つの双曲直線は対応する接ベクトル $\mathbf{u}_1$，$\mathbf{u}_2$ を用いて表される．それぞれの双曲直線上の点を $\mathbf{r}_1(t_1)$ と $\mathbf{r}_2(t_2)$ とすれば，

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_0 \cosh t_1 + \mathbf{u}_1 \sinh t_1 \tag{27}$$

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_0 \cosh t_2 + \mathbf{u}_2 \sinh t_2 \tag{28}$$

である．これから，

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \rangle &= \cosh t_1 \cosh t_2 \langle \mathbf{r}_0, \mathbf{r}_0 \rangle + \cosh t_1 \sinh t_2 \langle \mathbf{r}_0, \mathbf{u}_2 \rangle + \cosh t_2 \sinh t_1 \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{r}_0 \rangle + \sinh t_1 \sinh t_2 \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle \\ &= -\cosh t_1 \cosh t_2 + \sinh t_1 \sinh t_2 \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle\end{aligned} \tag{29}$$

となる．ここで，$\langle \mathbf{r}_0, \mathbf{r}_0 \rangle = -1$，$\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{r}_0 \rangle = \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{r}_0 \rangle = 0$ であることを用いた．$\mathbf{u}_1$，$\mathbf{u}_2$ が単位接ベクトルであるから $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle = \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2 \rangle = 1$ で，$\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle$ は内積が定義する $\mathbf{u}_1$ と $\mathbf{u}_2$ の間の角の余弦である．すな

わち，この角を φ とすると，$\langle\, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \,\rangle = \cos\varphi$ である．一方，双曲面の位置ベクトル間の内積は $-\cosh t$ であるから，$\mathbf{r}_1(t_1)$ と $\mathbf{r}_2(t_2)$ の双曲距離を t_0 とすると，式 (18) は

$$\cosh t_0 = \cosh t_1 \cosh t_2 - \sinh t_1 \sinh t_2 \cos\varphi \tag{30}$$

となる．この式は双曲余弦定理である．

2.2　双曲面の座標を用いる方法

点 A$({}^{t}\mathbf{r}_0 = (\sinh t_0, 0, \cosh t_0))$，を始点として，単位接ベクトル $\mathbf{u}_1$ と bu_2 の方向に延びる双曲直線を考える．単位接ベクトルは，点 A が乗っている双曲直線の単位接ベクトル ${}^{t}\mathbf{t} = (\cosh t_0, 0, \sinh t_0)$ とそれに垂直な接平面内の単位接ベクトル $\mathbf{v} = (0, 1, 0)$ から合成される．φ を角度を表すパラメータとして，それぞれの双曲直線が φ_1 と $\varphi_{の}$ 方向に延びてその上の 1 点をそれぞれ B $(\mathbf{r}_1)$，C $(\mathbf{r}_2)$ とすると B と C が t_1 および t_2 で表されるとしよう．そうすると，$\mathbf{u}_1$ と $\mathbf{u}_2$ は，

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{t}\cos\varphi_1 + \mathbf{v}\sin\varphi_1 \tag{31}$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{t}\cos\varphi_2 + \mathbf{v}\sin\varphi_2 \tag{32}$$

と表すことができ，また $\mathbf{r}_1$ と $\mathbf{r}_2$ は，

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_1 &= \mathbf{r}_0 \cosh r_1 + \mathbf{u}_1 \sinh r_1 \\
&= (\sinh t_0 \cosh r_1 + \cosh t_0 \sinh r_1 \cosh\varphi_1, \quad \sinh r_1 \cos\varphi_1, \\
&\qquad \cosh t_0 \cosh r_1 + \sinh t_0 \sinh r_1 \cos\varphi_1)
\end{aligned} \tag{33}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_2 &= \mathbf{r}_0 \cosh r_2 + \mathbf{u}_2 \sinh r_2 \\
&= (\sinh t_0 \cosh r_2 + \cosh t_0 \sinh r_2 \cosh\varphi_2, \quad \sinh r_2 \cos\varphi_2, \\
&\qquad \cosh t_0 \cosh r_2 + \sinh t_0 \sinh r_2 \cos\varphi_2)
\end{aligned} \tag{34}$$

と表すことができる．(φ は厳密には $\mathbf{u}$ が $\mathbf{t}$ となす角度ではない．ユークリッド計量で $\mathbf{t}$ と $\mathbf{v}$ の長さが等しければ φ は実際の角度に等しいが一般には異なり $\mathbf{u}$ は楕円を描くことになりパラメータの角度と実際の角度は異なる．)

さて，

$$\langle\, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \,\rangle = -\cosh r_0 \tag{35}$$

である．一方，これを成分を用いて表せば，

$$\begin{aligned}
\langle\, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \,\rangle =& (\sinh t_0 \cosh r_1 + \cosh t_0 \sinh r_1 \cosh\varphi_1)(\sinh t_0 \cosh r_2 + \cosh t_0 \sinh r_2 \cosh\varphi_2) \\
&+ \sinh r_1 \sin\varphi_1 \sinh r_2 \sin\varphi_2 \\
&- (\cosh t_0 \cosh r_1 + \sinh t_0 \sinh r_1 \cos\varphi_1)(\cosh t_0 \cosh r_2 + \sinh t_0 \sinh r_2 \cos\varphi_2) \\
=& (\sinh^2 t_0 - \cosh^2 t_0)(\cosh r_1 \cosh r_2 - \sinh r_1 \sinh r_2 \cos\varphi_1 \cos\varphi_2) + \sinh r_1 \sinh r_2 (\sin\varphi_1 \sin\varphi_2) \\
=& -\cosh r_1 \cosh r_2 + \sinh r_1 \sinh r_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)
\end{aligned} \tag{36}$$

となる．結局，

$$\cosh r_0 = \cosh r_1 \cosh r_2 - \sinh r_1 \sinh r_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \tag{37}$$

が得られる．これは双曲余弦定理である．計算の過程で最後に t_0 がひとりでに消える所が面白い．

2.3 クライン円板の座標を用いる方法

上の場合の双曲面の 3 つの点 ${}^{\mathrm{t}}\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ $(i = 0, 1, 2)$ をもう一度示すと，

$$x_i' = \sinh t_0 \cosh r_i + \cosh r_i \cos \varphi_i \tag{38}$$

$$y_i' = \sinh r_i \sin \varphi_i \tag{39}$$

$$z_i' = \cosh t_0 \cosh r_i + \sinh t_0 \sinh r_i \cos \varphi_i \tag{40}$$

となる．これに対してクライン円板の座標は

$$x_i = \frac{x_i'}{z_i'} = \frac{\sinh t_0 \cosh r_i + \cosh r_i \cos \varphi_i}{\cosh t_0 \cosh r_i + \sinh t_0 \sinh r_i \cos \varphi_i} \tag{41}$$

$$y_i = \frac{y_i'}{z_i'} = \frac{\sinh r_i \sin \varphi_i}{\cosh t_0 \cosh r_i + \sinh t_0 \sinh r_i \cos \varphi_i} \tag{42}$$

である [2]．双曲面における 2 つの位置ベクトル $\mathbf{r}_1$ と $\mathbf{r}_2$ の内積は

$$\langle\, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \,\rangle = x_1' x_2' + y_1' y_2' - z_1' z_2' = z_1' z_2' (x_1 x_2 + y_1 y_2 - 1) = \cosh r_0 \tag{43}$$

である．一方，成分を実際に計算すると，

$$\begin{aligned}
&z_1' z_2' (x_1 x_2 + y_1 y_2 - 1) \\
=&(\sinh t_0 \cosh r_1 + \cosh t_0 \sinh r_1 \cos \varphi_1)(\sinh t_0 \cosh r_2 + \cosh t_0 \sinh r_2 \cos \varphi_2) \\
&+ \sinh r_1 \sin \varphi_1 \sinh r_2 \sin \varphi_2 \\
&- (\cosh t_0 \cosh r_1 + \sinh t_0 \sinh r_1 \cos \varphi_1)(\cosh t_0 \cosh r_2 + \sinh t_0 \sinh r_2 \cos \varphi_2) \\
=&(\sinh^2 t_0 - \cosh^2 t_0)(\cosh t_0 \sinh r_1 \cosh r_2 - \sinh r_1 \sinh r_2 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2) + \sinh r_1 \sinh r_2 (\sin \varphi_1 \sin \varphi_2) \\
=&- \cosh r_1 \cosh r_2 + \sinh r_1 \sinh r_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)
\end{aligned} \tag{44}$$

となる．式 (32) と式 (33) から

$$\cosh r_0 = \cosh r_1 \cosh r_2 - \sinh r_1 \sinh r_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \tag{45}$$

となる．これは双曲余弦定理である．計算の中身は双曲面の場合と全く同じである．

2.4 ポアンカレ円板の座標を用いる方法

ポアンカレ円板の場合も双曲面の座標を x_i', y_i', z_i' とすると，

$$x_i = \frac{x_i'}{1 + z_i'} = \frac{\sinh t_0 \cosh r_i + \cosh r_i \cos \varphi_i}{1 + \cosh t_0 \cosh r_i + \sinh t_0 \sinh r_i \cos \varphi_i} \tag{46}$$

$$y_i = \frac{y_i'}{1 + z_i'} = \frac{\sinh r_i \sin \varphi_i}{1 + \cosh t_0 \cosh r_i + \sinh t_0 \sinh r_i \cos \varphi_i} \tag{47}$$

である．前と同じように，

$$x_1' x_2' + y_1' y_2' - z_1' z_2' = - \cosh r_0 \tag{48}$$

である．一方，左辺は

$$x_1' x_2' + y_1' y_2' - z_1' z_2' = (1 + z_1')(1 + z_2')(x_1 x_2 + y_1 y_2) - z_1' z_2' \tag{49}$$

となり，これは式 (46)，(47) を代入してみるまでもなく式 (36) と一致する．すなわち，式 (37) と同じ結果が得られ，双曲余弦定理が導かれる．

参考文献

[1] 2017/2/10 の entry　双曲面幾何　その 2
http://totoha.web.fc2.com/Hyperboloid_geo_2.pdf

[2] 2017/2/19 の entry　双曲面幾何　その 3
http://totoha.web.fc2.com/Hyperboloid_geo_3.pdf

[3] 2017/3/17 の entry　双曲幾何　その 4
http://totoha.web.fc2.com/Hyperboloid_geo_4.pdf

[4] 2017/2/9 の entry　双曲面幾何　その 1
http://totoha.web.fc2.com/Hyperboloid_geo_1.pdf