双曲幾何 (その 4) ポアンカレ円板

2017.3.17　　鈴木　実

1　回転双曲面 (上半二葉双曲面) から ポアンカレ (Poincaré) 円板へ

ポアンカレ円板 (Poincaré disk) は双曲計量を取り入れた半径 1 の円の内部に閉じ込められた 2 次元平面であり，回転双曲面（上半二葉双曲面）(hyperboloid) あるいは双曲面と 1 対 1 に対応している．双曲面上の点からポアンカレ円板上の点へ変換するには，途中にクライン円板，半球面と 2 つの段階を挟む必要がある [1]．双曲面とクライン円板およびその間の関係はすでに述べた [2, 3, 4]．ここでは双曲面からポアンカレ円板までの変換過程を示す．双曲面，クライン円板，半球面，ポアンカレ円板の間の関係を図 1 に示す [1]．図 1 は $y = 0$ 平面による断面図である．図で L は双曲面 (hyperboloid)，K はクライン円板 (Klein disk)，J は半球面 (hemisphere)，I はポアンカレ円板 (Poincaré disk) を示す．

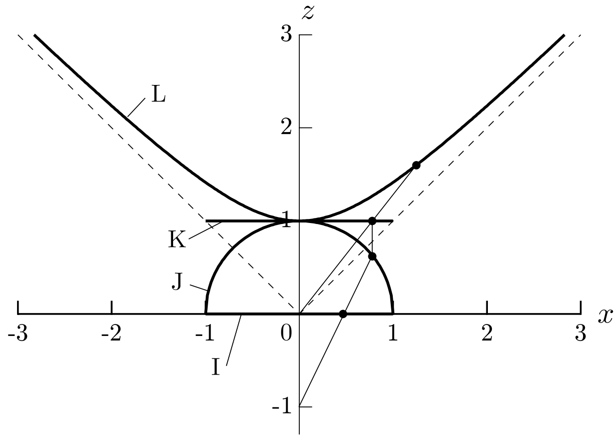

図 1: 上半二葉双曲面 (hyperboloid) L，クライン円板 (Klein disk) K，半球面 (hemisphere) J，ポアンカレ円板 (Poincaré) I の $y = 0$ 平面による断面図．それぞれの面上の点の間の関係を実線で示す．破線は円錐体 $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ の表面．

クライン円板は双曲面上の点と原点を結ぶ線が $z = 1$ 平面と交わる点の集合で半径 1 の円の内側になる．円周は双曲面の無限遠に対応する．双曲面上の点を (x_1, y_1, z_1)，対応するクライン円板上の点を (x, y, z) とすると，両者には

$$x = \frac{x_1}{z_1}, \quad y = \frac{y_1}{z_1}, \quad z = 1 \tag{1}$$

という関係が成り立って相互に変換することができる．

半球面は中心が原点，半径 1 の球面の上半部分である．クライン円板から半球面への変換は，クライン円板の点を z 軸に平行に半球面に射影した点に対応させる．クライン円板上の点を (x_1, y_1, z_1)，対応する半球面上の点を (x, y, z) とすると，

$$x = x_1, \quad y = y_1, \quad z = \sqrt{1 - x_1^2 - y_1^2} \tag{2}$$

という関係が成り立つ．

ポアンカレ円板は半球面から変換される．点 $(0, 0, -1)$ と半球面上の点を結ぶ直線が平面 $x = 0$ と交差する点がポアンカレ円板上の対応する点である．この点の集合は原点を中心に半径 1 の円の内側になる．ポアンカ

レ円板上の点を (x_1, y_1, z_1)，対応するクライン円板上の点を (x, y, z) とすると，

$$x = \frac{x_1}{z_1 + 1}, \quad y = \frac{y_1}{z_1 + 1}, \quad z = 0 \tag{3}$$

という関係が成り立つ．以上の関係式により双曲面の点がポアンカレ円板の点に変換される．変換は 1 対 1 対応で逆変換も可能である．

2 ポアンカレ円板の計量

ポアンカレ円板の計量は一般的な上半二葉双曲面

$$y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2 - y_{n+1}^2 = -1 \tag{4}$$

の計量 $\mathrm{d}s_{\mathrm{L}}$，すなわち，

$$\mathrm{d}s_{\mathrm{L}}^2 = \mathrm{d}y_1^2 + \mathrm{d}y_2^2 + \cdots + \mathrm{d}y_n^2 - \mathrm{d}y_{n+1}^2 \tag{5}$$

から段階的に導かれる [1]．クライン円板の計量まではすでに示した [4] ので，以下ではクライン円板からポアンカレ円板までの計量を順次導く．

クライン円板の計量 $\mathrm{d}s_{\mathrm{K}}^2$ は

$$\mathrm{d}s_{\mathrm{K}}^2 = \frac{\mathrm{d}y_1^2 + \mathrm{d}y_2^2 + \cdots + \mathrm{d}y_n^2}{1 - y_1^2 - \cdots - y_n^2} - \frac{y_1\mathrm{d}y_1 + y_2\mathrm{d}y_2 + \cdots + y_n\mathrm{d}y_n}{(1 - y_1^2 - \cdots - y_n^2)^2} \tag{6}$$

であった [4]．クライン円板から半球面への変換は式 (2) を一般的にした

$$x_i = y_i \quad (i = 1, \cdots, n) \tag{7}$$

$$x_{n+1} = \sqrt{1 - y_1^2 - \cdots - y_n^2} \tag{8}$$

を用いる．まず，式 (7) から，

$$\mathrm{d}x_i = \mathrm{d}y_i \tag{9}$$

である．また式 (8) から，

$$1 - y_1^2 - \cdots - y_n^2 = x_{n+1}^2 \tag{10}$$

であるからこれを微分して

$$y_1\mathrm{d}y_1 + y_2\mathrm{d}y_2 + \cdots + y_n\mathrm{d}y_n = -x_{n+1}\mathrm{d}x_{n+1} \tag{11}$$

を得る．式 (10)，(11) から，

$$\frac{(y_1\mathrm{d}y_1 + y_2\mathrm{d}y_2 + \cdots + y_n\mathrm{d}y_n)^2}{(1 - y_1^2 - \cdots - y_n^2)^2} = \frac{\mathrm{d}x_{n+1}^2}{x_{n+1}^2} \tag{12}$$

となる．式 (6) に式 (9)，(10)，(12) を代入すると，

$$\mathrm{d}s_{\mathrm{K}}^2 = \frac{\mathrm{d}x_1^2 + \mathrm{d}x_2^2 + \cdots + \mathrm{d}x_n^2 + \mathrm{d}x_{n+1}^2}{x_{n+1}^2} \equiv \mathrm{d}s_{\mathrm{J}}^2 \tag{13}$$

となり，半球面の計量 $\mathrm{d}s_{\mathrm{J}}^2$ が得られる．

半球面の計量 $\mathrm{d}s_{\mathrm{J}}^2$ からポアンカレ円板の計量 $\mathrm{d}s_{\mathrm{I}}^2$ は次のポアンカレ円板の一般的な座標への変換により得られる．

$$x_i = \frac{y_i}{y_{n+1} + 1} \quad (i = 1, \cdots, n), \quad x_{n+1} = 0 \tag{14}$$

$$y_1^2 + \cdots + y_n^2 + y_{n+1}^2 = 1 \tag{15}$$

半球面の計量を変数 y_i で表すと，

$$ds_{\mathrm{J}}^2 = \frac{\mathrm{d}y_1^2 + \mathrm{d}y_2^2 + \cdots + \mathrm{d}y_n^2 + \mathrm{d}y_{n+1}^2}{y_{n+1}^2} \tag{16}$$

である．式 (14) から，y_i を微分して

$$\mathrm{d}y_i = x_i \mathrm{d}y_{n+1} + (y_{n+1}+1)\mathrm{d}x_i \tag{17}$$

となる．これを二乗して n までの総和をとると，

$$\sum_{i=1}^n \mathrm{d}y_i^2 = \mathrm{d}y_{n+1}^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2(y_{n+1}+1)\mathrm{d}y_{n+1} \sum_{i=1}^n x_i \mathrm{d}x_i + (y_{n+1}+1)^2 \sum_{i=1}^n \mathrm{d}x_i^2 \tag{18}$$

である．また，式 (14) を式 (15) に代入することにより，

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 = \frac{1-y_{n+1}}{y_{n+1}+1} \tag{19}$$

である．これの微分をとることにより，

$$\sum_{i=1}^n x_i \mathrm{d}x_i = -\frac{2}{(y_{n+1}+1)^2}\mathrm{d}y_{n+1} \tag{20}$$

である．一方，式 (19) から，

$$\frac{y_{n+1}+1}{y_{n+1}} = \frac{2}{1-\sum_{i=1}^n x_i^2} \tag{21}$$

である．式 (19)，(20) を式 (18) に代入することにより，

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \mathrm{d}y_i^2 &= \frac{1-y_{n+1}}{y_{n+1}+1}\mathrm{d}y_{n+1}^2 - 2(y_{n+1}+1)\mathrm{d}y_{n+1}\frac{\mathrm{d}y_{n+1}}{(y_{n+1}+1)^2} + (y_{n+1}+1)^2 \sum_{i=1}^n \mathrm{d}x_i^2 \\ &= -\mathrm{d}y_{n+1}^2 + (y_{n+1}+1)^2 \sum_{i=1}^n \mathrm{d}x_i^2\end{aligned}$$

となる．移項して

$$\sum_{i=1}^{n+1} \mathrm{d}y_i^2 = (y_{n+1}+1)^2 \sum_{i=1}^n \mathrm{d}x_i^2 \tag{22}$$

とできる．総和の上限が $n+1$ になっていることに注意．これを式 (16) に代入すると，

$$\mathrm{d}s_{\mathrm{J}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n+1}\mathrm{d}y_i^2}{y_{n+1}^2} = \frac{(y_{n+1}+1)^2}{y_{n+1}^2}\sum_{i=1}^n \mathrm{d}x_i^2 \tag{23}$$

となり，これに式 (21) を二乗して代入すると，結局，

$$\mathrm{d}s_{\mathrm{J}}^2 = 4\frac{\sum_{i=1}^n \mathrm{d}x_i^2}{1-\sum_{i=1}^n x_i^2} \equiv \mathrm{d}s_{\mathrm{I}}^2 \tag{24}$$

となる．これがポアンカレ円板の計量 $\mathrm{d}s_{\mathrm{I}}^2$ である．別の表現をすれば，

$$\mathrm{d}s_{\mathrm{I}}^2 = 4\frac{\mathrm{d}x_1^2 + \cdots + \mathrm{d}x_n^2}{(1-x_1^2-\cdots-x_n^2)^2} \tag{25}$$

と表すことができる．2 次元のポアンカレ円板の場合には，

$$\mathrm{d}s_{\mathrm{I}}^2 = 4\frac{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}{(1-x^2-y^2)^2} \tag{26}$$

である．

3　パラメータ t で表現したポアンカレ円板の計量

双曲面の双曲直線（測地線）をパラメータ t を用いて表すことができる [3]．パラメータ t を用いてポアンカレ円板の計量を表すことを考えてみよう．まず双曲面の任意の双曲直線を t を用いて定義する．前のエントリー [3] で示したように，任意の双曲直線はまず平面 $x=0$ と双曲面の作る双曲直線を y 軸の回りに θ 回転し，その後 z 軸の回りに φ 回転させて得ることができる．$\alpha=\tan\theta$，$\beta=1/\sqrt{1-\alpha^2}$ として，パラメータ t を用いてこの双曲直線を表すと，

$$x=\alpha\beta\cos\varphi\cosh t-\sin\varphi\sinh t \tag{27}$$

$$y=\alpha\beta\sin\varphi\cosh t+\cos\varphi\sinh t \tag{28}$$

$$z=\beta\cosh t \tag{29}$$

となる．これを式 (1) にしたがってクライン円板上の点に変換すると，

$$x=\alpha\cos\varphi-\frac{1}{\beta}\sin\varphi\tanh t \tag{30}$$

$$y=\alpha\sin\varphi+\frac{1}{\beta}\cos\varphi\tanh t \tag{31}$$

となる．$\varphi=0$ のときは図 2(a) のように垂直な線分になり，$\varphi\neq 0$ のときは，図 2(b) のように x 軸から φ 傾いた線分になる．原点から直線までの距離が α である．

式 (30)(31) から，$1-x^2-y^2=1-\alpha^2-(1-\alpha^2)\tanh^2 t=(1-\alpha^2)^2\,\mathrm{sech}^2 t$ であることに注意すると，半球面上の点に変換することができて，

$$x=\alpha\cos\varphi-\frac{1}{\beta}\sin\varphi\tanh t \tag{32}$$

$$y=\alpha\sin\varphi+\frac{1}{\beta}\cos\varphi\tanh t \tag{33}$$

$$z=\gamma\,\mathrm{sech}\,t \tag{34}$$

となる．ただし，$\gamma=\sqrt{1-\alpha^2}$ である．

式 (32)–(34) から式 (3) を用いて次のポアンカレ円板の双曲直線の座標を表す式を得ることができる．

$$x=\frac{\alpha\cos\varphi-\gamma\sin\varphi\tanh t}{1+\gamma\,\mathrm{sech}\,t} \tag{35}$$

$$y=\frac{\alpha\sin\varphi+\gamma\cos\varphi\tanh t}{1+\gamma\,\mathrm{sech}\,t} \tag{36}$$

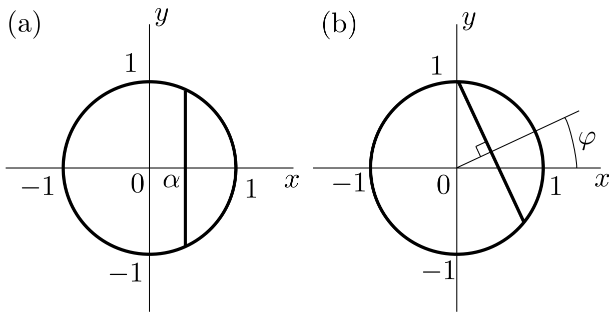

図 2: クライン円板の双曲直線．(a) $\varphi=0$ の場合，双曲直線は円周に端点をもつ垂直な直線．x 軸との交点は α．(b) $\varphi\neq 0$ のときの双曲直線は (a) の場合の双曲直線を φ 回転したもの．

式 (35) と式 (36) からパラメータ t によるポアンカレ円板の計量 $\mathrm{d}s_{\mathrm{I}}^2$ を計算しよう．まず,

$$x(\cosh t+\gamma)=\alpha\cos\varphi\cosh t-\gamma\sin\varphi\sinh t \tag{37}$$

$$y(\cosh t+\gamma)=\alpha\sin\varphi\cosh t+\gamma\cos\varphi\sinh t \tag{38}$$

とする．微分をとると,

$$\mathrm{d}x(\cosh t+\gamma)+x\sinh t\mathrm{d}t=\alpha\cos\varphi\cosh t\mathrm{d}t-\gamma\sin\varphi\sinh t\mathrm{d}t \tag{39}$$

$$\mathrm{d}y(\cosh t+\gamma)+x\sinh t\mathrm{d}t=\alpha\sin\varphi\sinh t\mathrm{d}t+\gamma\cos\varphi\cosh t\mathrm{d}t \tag{40}$$

である．辺々二乗して加えると,

$$\begin{aligned}&(\cosh t+\gamma)^2(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2)+2(\cosh t+\gamma)\sinh t\mathrm{d}t(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)+(x^2+y^2)\sinh^2 t\mathrm{d}t^2\\ =&(\alpha^2\sinh^2 t+\gamma^2\cosh^2 t)\mathrm{d}t^2\end{aligned} \tag{41}$$

となる．次に，式 (35) と式 (36) から

$$x^2+y^2=\frac{(\alpha\cos\varphi-\gamma\sin\varphi\tanh t)^2+(\alpha\sin\varphi+\gamma\cos\varphi\tanh t)^2}{(1+\gamma\,\mathrm{sech}\,t)^2}=\frac{\alpha^2+\gamma^2\tanh^2 t}{(1+\gamma\,\mathrm{sech}\,t)^2}=\frac{1-\gamma\,\mathrm{sech}\,t}{1+\gamma\,\mathrm{sech}\,t} \tag{42}$$

となるから，また,

$$1-x^2-y^2=\frac{2\gamma}{\cosh t+\gamma} \tag{43}$$

である．式 (42) の微分をとると,

$$x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y=\frac{\sinh t}{(1+\gamma\,\mathrm{sech}\,t)^2\cosh^2 t}\mathrm{d}t=\frac{\sinh t}{(\cosh t+\gamma)^2}\mathrm{d}t \tag{44}$$

となる．式 (42) と式 (44) を式 (41) に代入すると，左辺は

$$\begin{aligned}&(\cosh t+\gamma)^2(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2)+\frac{2\gamma\sinh^2 t\mathrm{d}t^2}{\cosh+\gamma}+\frac{\cosh t-\gamma}{\cosh t+\gamma}\sinh^2 t\mathrm{d}t\\ =&\left(\frac{\cosh t-\gamma}{\cosh t+\gamma}+\frac{2\gamma}{\cosh+\gamma}\right)\sinh^2 t\mathrm{d}t^2+(\cosh t+\gamma)^2(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2)\\ =&(\cosh t+\gamma)^2(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2)+\sinh^2 t\mathrm{d}t^2\end{aligned}$$

となるから，式 (41) は

$$(\cosh t+\gamma)^2(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2)+\sinh^2 t\mathrm{d}t^2=(\alpha^2\sinh^2 t+\gamma^2\cosh^2 t)\mathrm{d}t^2$$

となり，これから

$$\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2=\frac{(\alpha^2\sinh^2 t+\gamma^2\cosh^2 t-\sinh^2 t)}{(\cosh t+\gamma)^2}\mathrm{d}t^2=\frac{(\gamma^2\cosh^2 t-\gamma^2\sinh^2 t)}{(\cosh t+\gamma)^2}\mathrm{d}t^2=\frac{\gamma^2}{(\cosh t+\gamma)^2}\mathrm{d}t^2 \tag{45}$$

という式になる．この式を式 (43) の二乗で割ることにより,

$$\mathrm{d}s^2=4\frac{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}{(1-x^2-y^2)^2}\mathrm{d}t^2=\mathrm{d}t^2 \tag{46}$$

となり，双曲面での関係式 $\mathrm{d}s=\mathrm{d}t$ がポアンカレ円板においても確認することができる．

4　ポアンカレ円板の双曲直線

4.1　ポアンカレ円板の双曲直線が円周に直交する円弧であること

双曲計量をもつ空間での直線をユークリッド空間の直線と区別して双曲直線という．双曲面の双曲直線は原点を通る平面との交線で定義される測地線であり，クライン円板の双曲直線は円周に端点をもつ線分であった．ではポアンカレ円板の双曲直線はどのような形になるであろうか．

ポアンカレ円板の双曲直線は式 (35) と式 (36) によって表される．この式からわかることは，まず簡単な場合として，$\alpha = 0$ および $\varphi = 0$ のとき，$x = 0$，$y = \sinh t$ となり，双曲直線は中心を通る垂直な線である．また，$\alpha = 0$ および $\varphi = \pi/2$ のときは，$x = \sinh t$，$y = 0$ となり，双曲直線は中心を通る水平な線である．

$\alpha \neq 0$ および $\varphi \neq 0$ の場合，式 (35)，(36) に $\cos\varphi$ または $\sin\varphi$ を掛けて加えるか差し引くことにより，次式を得る．

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi = \frac{\alpha}{1+\gamma\,\mathrm{sech}\,t} \tag{47}$$

$$-x\sin\varphi + y\cos\varphi = \frac{\gamma\tanh t}{1+\gamma\,\mathrm{sech}\,t} \tag{48}$$

ここで，$\alpha^2 - 2(1+\gamma\,\mathrm{sech}\,t) + \gamma^2\tanh^2 t = -(1+\gamma\,\mathrm{sech}\,t)^2$ となることに注意して，式 (47)，(48) の右辺の分子がこの式の左辺になるように加え合わせることにより，

$$(x\cos\varphi + y\sin\varphi)^2 - \frac{2}{\alpha}(x\cos\varphi + y\sin\varphi) + (-x\sin\varphi + y\cos\varphi)^2 = -1 \tag{49}$$

となる．この式を整理すると，

$$(x - \frac{\cos\varphi}{\alpha})^2 + (y - \frac{\sin\varphi}{\alpha})^2 = \frac{\gamma^2}{\alpha^2} \tag{50}$$

となる．この式は $(\cos\varphi/\alpha, \sin\varphi/\alpha)$ を中心，γ/α を半径とする円である．つまり，ポアンカレ円板の双曲直線は端点を円周に持つ円弧であることがわかる．図 3 は式 (50) の示す双曲直線を示したもので，(a)$\varphi = 0$ および (b)$\varphi \neq 0$ の場合である．図 3(a) で円弧の半径が γ/α であるから，円弧の中心とポアンカレ円板の中心の距離 $1/\alpha$ の二乗からポアンカレ円板の半径すなわち 1 の二乗を引くと $1/\alpha^2 - 1 = \gamma^2/\alpha^2$ と円弧の半径の二乗になるからピタゴラスの定理となる．すなわち，ポアンカレ円板の円周と双曲直線の円弧は直交することを示している．このことは図 (b) でも成り立ち，一般に成立する．

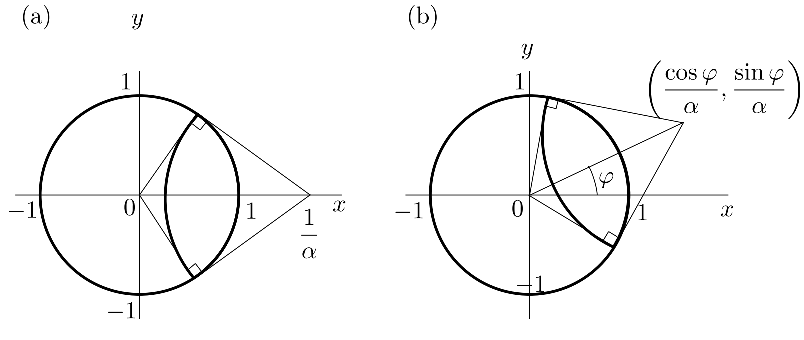

図 3: (a) $\varphi = 0$ のときのポアンカレ円板の双曲直線である円弧を示す．円弧の中心は $(1/\alpha, 0)$，半径は $1/\alpha$．円弧の端点はポアンカレ円板の円周上にあり，中心と結ぶ線はその点の接線となる．(b) $\varphi \neq 0$ の場合，(a) の場合を φ 回転したもの．

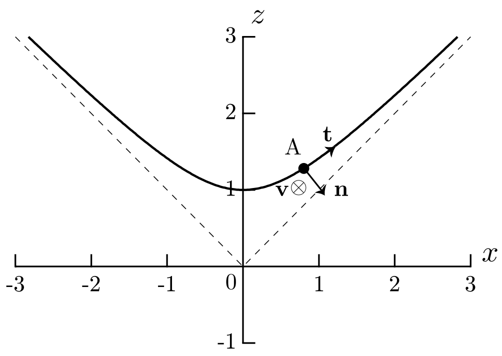

図 4: 双曲面上の任意の点が $y=0$ 平面上 $x>0$ の部分に来るように z 軸の回りに回転した．$y=0$ による断面図.

4.2 ポアンカレ円板の任意の双曲直線

4.2.1 まず双曲面上の任意の双曲直線から

ポアンカレ円板上の任意の点を始点として任意の方向に延びる双曲直線を考えてみよう．ポアンカレ円板は原点を中心として点対称であるから任意の点として x 軸上に任意の点を考えても一般性は失われない．この任意の点をパラメータ t を用いて表すには双曲面上で考えればよい．双曲面は z 軸対称であるから，任意の点として $y=0$ 平面と双曲面との交線で定義される双曲直線上の点を選んでもよい（図 4）．この点 A を $\mathbf{r}_0={}^{\mathrm{t}}(x_0,\ y_0,\ z_0)$ とすると，

$$\mathbf{r}_0={}^{\mathrm{t}}(\sinh t_0,\ 0,\ \cosh t_0) \tag{51}$$

である．これは式 (27)–(29) で $\alpha=0$ かつ $\varphi=-\pi/2$ とすることに等しい．この点 A から任意の方向に延びる半直線をパラメータ r で表す [3] ことを考えよう．いま着目している双曲直線の点 A における接線ベクトル $\mathbf{t}$ は双曲面上の点 A における接平面上にある．$\mathbf{t}$ は式 (51) を微分して得られる．すなわち，

$$\mathbf{t}={}^{\mathrm{t}}(\cosh t_0,\ 0,\ \sinh t_0) \tag{52}$$

である．この点 A における法線ベクトル $\mathbf{n}$ は以前述べたように [4]，双曲面の関数の勾配 grad で得られるから，

$$\mathbf{n}={}^{\mathrm{t}}(\cosh t_0,\ 0,\ -\sinh t_0) \tag{53}$$

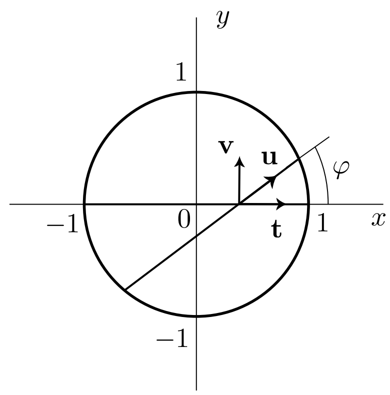

図 5: 任意の点を始点とする双曲直線をクライン円板で見た場合.

である．また，この双曲直線のある面の法線ベクトルは $\mathbf{q} = {}^{\mathrm{t}}(0,\ 1,\ 0)$ である．さらに，図 4 から明らかなように，接平面内で $\mathbf{t}$ と直角な単位ベクトル $\mathbf{v}$ は $\mathbf{t} \times \mathbf{n}$ を正規化して得られる．すなわち，

$$\mathbf{t} \times \mathbf{n} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cosh t_0 & 0 & \sinh t_0 \\ \sinh t_0 & 0 & -\cosh t_0 \end{vmatrix} = {}^{\mathrm{t}}(0,\ \cosh^2 t_0 + \sinh^2 t_0,\ 0)$$

となるから，正規化して，

$$\mathbf{v} = {}^{\mathrm{t}}(0,\ 1,\ 0) \tag{54}$$

である．点 A から任意の方向を向いている単位ベクトルを $\mathbf{u}$ とすると，$\mathbf{u}$ の $\mathbf{t}$ からの角度を φ として，

$$\mathbf{u} = \mathbf{t}\cos\varphi + \mathbf{v}\sin\varphi \tag{55}$$

と表すことができる．このベクトルの関係をクライン円板上で表すと図 5 のような配置になる．

双曲面において点 A を始点とする半直線はその上の点を $\mathbf{r}$ とすれば，

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 \cosh r + \mathbf{u} \sinh r \tag{56}$$

と表される [2]．ここで，r は点 A からの双曲距離である．これが双曲面の任意の点から任意の方向に延びる双曲直線である．

4.2.2 実際に双曲直線になっていることの確認

式 (56) が確かに双曲面の測地線（双曲直線）であることを確かめておこう．測地線であることは
(1) $\mathbf{r}$ が原点を含む平面上にあること
(2) $\mathbf{r}$ が上半二葉双曲面上にあること
を示すことで確認することができる．

まず (1) から始める．点 A($\mathbf{r}_0$) を始点としてベクトル $\mathbf{u}$ を軸として回転する面を考える．そのような面の一つが原点 O を含めば (1) は満たされる．$\mathbf{u}$ を軸として回転する面は 2π 回転することによって全空間をはらうことができるから O を含む面が存在することは明らかである．その面を定量的に確認しよう．この回転する面の法線ベクトルを $\mathbf{w}$ とすると，回転面の方程式は

$$\mathbf{w} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0 \tag{57}$$

である．したがって，この面が原点を含む条件は

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{r}_0 = 0 \tag{58}$$

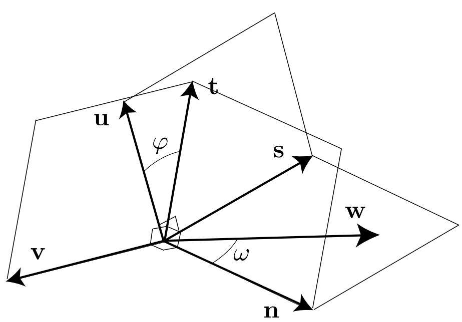

図 6: 双曲面上の点 A に関係する単位ベクトルの間の関係．

となる．そこで，$\mathbf{w}$ を求めよう．図 6 のように，$\mathbf{u}$ と $\mathbf{n}$ に垂直な単位ベクトルを $\mathbf{s}$ とすると，$\mathbf{s} = \mathbf{u} \times \mathbf{n}$ であるから，

$$\begin{aligned} \mathbf{s} &= (\mathbf{t}\cos\varphi + \mathbf{v}\sin\varphi) \times \mathbf{n} = -\mathbf{v}\cos\varphi + \mathbf{t}\sin\varphi \\ &= {}^{\mathrm{t}}(\cosh t_0 \sin\varphi,\ -\cos\varphi,\ \sinh t_0 \sin\varphi) \end{aligned} \tag{59}$$

となる．$\mathbf{u}$ に垂直な単位ベクトルは $\mathbf{s}$ と $\mathbf{n}$ の張る平面内にあるから，この単位ベクトルを $\mathbf{w}$ とすると，

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= \mathbf{n}\cos\omega + \mathbf{s}\sin\omega \\ &= \mathbf{n}\cos\omega - \mathbf{v}\cos\varphi\sin\omega + \mathbf{t}\sin\varphi\sin\omega \\ &= {}^{\mathrm{t}}(\sinh t_0\cos\omega + \cosh t_0\sin\varphi\sin\omega,\ -\cos\varphi\sin\omega,\ -\cosh t_0\cos\omega + \sinh t_0\sin\varphi\sin\omega) \end{aligned} \tag{60}$$

式 (58) に式 (60) を代入すると，

$$\begin{aligned} &\sinh t_0(\sinh t_0\cos\omega + \cosh t_0\sin\varphi\sin\omega) + \cosh t_0(-\cosh t_0\cos\omega + \sinh t_0\sin\varphi\sin\omega) \\ =&(\sinh 2t_0 - \cosh^2 t_0)\cos\omega + 2\sinh t_0\cosh t_0\sin\varphi\sin\omega = 0 \end{aligned}$$

となるからこれより，

$$\tan\omega = \frac{1}{\sinh 2t_0 \sin\varphi} \tag{61}$$

という式が得られる．つまり，この式で決まる ω の角度に法線ベクトルを定めれば $\mathbf{u}$ を回転軸に原点を含む平面が得られる．

次に，(2) を示そう．式 (55) より，

$$\mathbf{u} = {}^{\mathrm{t}}(\cosh t_0\cos\varphi,\ \sin\varphi,\ \sinh t_0\cos\varphi) \tag{62}$$

である．したがって，式 (56) より，

$$\mathbf{r} = {}^{\mathrm{t}}(\sinh t_0\cosh r + \cosh t_0\sinh r\cos\varphi,\ \sinh r\sin\varphi,\ \cosh t_0\cosh r + \sinh t_0\sinh r\cos\varphi) \tag{63}$$

である．これから

$$\begin{aligned} \langle\mathbf{r},\mathbf{r}\rangle &= (\sinh t_0\cosh r + \cosh t_0\sinh r\cos\varphi)^2 + (\sinh r\sin\varphi)^2 - (\cosh t_0\cosh r + \sinh t_0\sinh r\cos\varphi)^2 \\ &= -\cosh^2 r + \sinh^2 r\cos^2\varphi + \sinh^2 r\sin^2\varphi = -1 \end{aligned}$$

となり，$\mathbf{r}$ は確かに上半二葉双曲面上にあることが示された．

4.2.3　ポアンカレ円板上の任意の双曲直線へ

双曲面上の点 A から双曲距離 r の点 $\mathbf{r}$ の座標を (x_1, y_1, z_1) とすれば，式 (63) から，

$$x_1 = \sinh t_0\cosh r + \cosh t_0\sinh r\cos\varphi, \tag{64}$$

$$y_1 = \sinh r\sin\varphi, \tag{65}$$

$$z_1 = \cosh t_0\cosh r + \sinh t_0\sinh r\cos\varphi \tag{66}$$

である．

双曲面上の点 (x_1, y_1, z_1) からクライン円板上の対応する点 $(x,\ y)$ への変換は，双曲線上の点と原点を結ぶ線が $z=1$ 平面上，中心 (0,0,1) 半径 1 の円板と交差する点によって与えられる．式 (1) により，

$$x = \frac{x_1}{z_1} = \frac{\sinh t_0 \cosh r + \cosh t_0 \sinh r \cos\varphi}{\cosh t_0 \cosh r + \sinh t_0 \sinh r \cos\varphi}, \tag{67}$$

$$y = \frac{y_1}{z_1} = \frac{\sinh r \sin\varphi}{\cosh t_0 \cosh r + \sinh t_0 \sinh r \cos\varphi}, \tag{68}$$

$$z = \frac{z_1}{z_1} = 1$$

となる．

クライン円板から半球面へのは，クライン円板上の点 (x_1, y_1, z_1) を z 軸に平行に原点を中心とする半径 1 の上半球面へ投射する．式 (2) の変換により，式 (67) と式 (68) の座標を (x_1, y_1, z_1) として，対応する点の座標は

$$x = x_1 = \frac{\sinh t_0 \cosh r + \cosh t_0 \sinh r \cos\varphi}{\cosh t_0 \cosh r + \sinh t_0 \sinh r \cos\varphi}, \tag{69}$$

$$y = y_1 = \frac{\sinh r \sin\varphi}{\cosh t_0 \cosh r + \sinh t_0 \sinh r \cos\varphi}, \tag{70}$$

$$z = \sqrt{1 - x_1^2 - y_1^2} = \frac{1}{\cosh t_0 \cosh r + \sinh r \cos\varphi} \tag{71}$$

となる．なお，式 (71) の分子の部分は次のように計算した．

$$\begin{aligned} &(\cosh t_0 \cosh r + \sinh t_0 \sinh r \cos\varphi)^2 - (\sinh t_0 \cosh r + \cosh t_0 \sinh r \cos\varphi)^2 - (\sinh r \sin\varphi)^2 \\ &= \cosh^2 r - \sinh^2 r \cos^2\varphi - \sinh^2 r \sin^2\varphi = 1 \end{aligned}$$

この点を (x_1, y_1, z_1) として式 (3) の変換を行うことにより次のポアンカレ円板上の座標が得られる．

$$x = \frac{x_1}{z_1 + 1} = \frac{\sinh t_0 \cosh r + \cosh t_0 \sinh r \cos\varphi}{1 + \cosh t_0 \cosh r + \sinh t_0 \sinh r \cos\varphi}, \tag{72}$$

$$y = \frac{y_1}{z_1 + 1} = \frac{\sinh r \sin\varphi}{1 + \cosh t_0 \cosh r + \sinh t_0 \sinh r \cos\varphi}, \tag{73}$$

式 (72) と式 (73) は，ポアンカレ円板の x 軸上，中心から双曲距離 t_0 の点を通る双曲直線を表す式である．このままでは具体的にどのような曲線に該当するのかわからないので，実空間における双曲直線の方程式を求めておこう．そのためには，式 (72) と式 (73) から r を消去すればよい．式 (72)，(73) から

$$x(1 + \cosh t_0 \cosh r + \sinh t_0 \sinh r \cos\varphi) = \sinh t_0 \cosh r + \cosh t_0 \sinh r \cos\varphi \tag{74}$$

$$y(1 + \cosh t_0 \cosh r + \sinh t_0 \sinh r \cos\varphi) = \sinh r \sin\varphi \tag{75}$$

として，次のように $\cosh r$ と $\sinh r$ の連立方程式に直す．

$$(x \cosh t_0 - \sinh t_0) \cosh r + (x \sinh t_0 - \cosh t_0) \cos\varphi \sinh r = -x, \tag{76}$$

$$y \cosh t_0 \cosh r + (y \sinh t_0 \cos\varphi - \sin\varphi) \sinh r = -y \tag{77}$$

これをクラメルの公式を用いて解く．係数の行列式を D とすると，

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} x \cosh t_0 - \sinh t_0 & (x \sinh t_0 - \cosh t_0) \cos\varphi \\ y \cosh t_0 & y \sinh t_0 \cos\varphi - \sin\varphi \end{vmatrix} \\ &= -x \cosh t_0 \sin\varphi - y \sinh^2 t_0 \cos\varphi + \sinh t_0 \sin\varphi + y \cosh^2 t_0 \cos\varphi \\ &= -x \cosh t_0 \sin\varphi + y \cos\varphi + \sinh t_0 \sin\varphi \end{aligned} \tag{78}$$

となる．これを用いて，

$$
\begin{aligned}
\cosh r &= \frac{1}{D}\begin{vmatrix} -x & (x\sinh t_0 - \cosh t_0)\cos\varphi \\ -y & y\sinh t_0\cos\varphi - \sin\varphi \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{D}\{-x(y\sinh t_0\cos\varphi - \sin\varphi) + y(x\sinh t_0 - \cosh t_0)\cos\varphi\} \\
&= \frac{1}{D}(x\sin\varphi - y\cosh t_0\cos\varphi)
\end{aligned} \tag{79}
$$

および

$$
\begin{aligned}
\sinh r &= \frac{1}{D}\begin{vmatrix} x\cosh t_0 - \sinh t_0 & -x \\ y\cosh t_0 & -y \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{D}\{-y(x\cosh t_0 - \sinh t_0) + xy\cosh t_0\} \\
&= \frac{1}{D}y\sinh t_0
\end{aligned} \tag{80}
$$

を得る．これを $\cosh^2 r - \sinh^2 r = 1$ に代入し，以下のように順次式を変形する．計算が少し煩瑣であるので途中の段階も記す．xy を含む項が消えることに注意しよう．

$$
\begin{gathered}
(x\sin\varphi - y\cosh t_0\cos\varphi)^2 - (y\sinh t_0)^2 = (-x\cosh t_0\sin\varphi + y\cos\varphi + \sinh t_0\sin\varphi)^2 \\
x^2\sin^2\varphi + y^2\cosh^2 t_0\cos^2\varphi - y^2\sinh^2 t_0 = x^2\cosh^2 t_0\sin^2\varphi + y^2\cos^2\varphi + \sinh^2 t_0\sin^2\varphi \\
+ 2\sinh t_0\sin\varphi(-x\cosh t_0\sin\varphi + y\cos\varphi) \\
-x^2\sinh^2 t_0\sin^2\varphi + y^2\sinh^2 t_0(\cos^2\varphi - 1) - 2\sinh t_0\sin\varphi(-x\cosh t_0\sin\varphi + y\cos\varphi) \\
= \sinh^2 t_0\sin^2\varphi
\end{gathered}
$$

ここで，x^2 と y^2 の係数が等しくなるのがわかる．整理すると，

$$
x^2 + y^2 - \frac{2}{\sinh t_0\sin\varphi}(x\cosh t_0\sin\varphi - y\cos\varphi) = -1 \tag{81}
$$

となる．これは円の方程式である．中心と半径がわかる形に変形すると，

$$
\left(x - \frac{\cosh t_0}{\sinh t_0}\right)^2 + \left(y + \frac{\cot\varphi}{\sinh t_0}\right)^2 = \coth^2 t_0 + \operatorname{cosech}^2 t_0\cot^2\varphi - 1 \tag{82}
$$

となる．右辺は $\operatorname{cosech}^2 t_0 \operatorname{cosec}^2\varphi$ と等しいから

$$
(x - \coth t_0)^2 + (y + \operatorname{cosech} t_0\cot\varphi)^2 = \operatorname{cosech}^2 t_0\operatorname{cosec}^2\varphi \tag{83}
$$

とも書くことができる．または，

$$
\left(x - \frac{\cosh t_0}{\sinh t_0}\right)^2 + \left(y + \frac{\cos\varphi}{\sinh t_0\sin\varphi}\right)^2 = \frac{1}{\sinh^2 t_0\sin^2\varphi} \tag{84}
$$

と表すこともできる．

以上から明らかなように双曲面上の任意の点を通る任意の測地線はポアンカレ円板上の対応する点を通る円弧になる．原点と円弧の中心の距離，ポアンカレ円板の半径，円弧の半径はピタゴラスの定理の関係にあって，円弧とポアンカレ円板の円周との交点は円弧の中心から下ろした接線の接点である．実際，

$$
\left(\frac{\cosh t_0}{\sinh t_0}\right)^2 + \left(\frac{\cos\varphi}{\sinh t_0\sin\varphi}\right)^2 - \frac{1}{\sinh^2 t_0\sin^2\varphi} = 1
$$

となることが確認できる．図 7 は点 A を通る双曲直線の円弧とその中心，半径の関係を示す．

点 A を通る双曲直線の円弧の中心は式 (84) から明らかなように常に $x = \cosh t_0/\sinh t_0$ 線上あり，φ の値によって上下に変化する．図 7 では垂直な破線で示した．円弧の中心の座標は必ず 1 より大きくなりポアンカレ円板の円内に入ることはない．一方，x 軸との交点は必ず円内にある．円弧が x 軸と交わる点は式 (84) で $y = 0$ として求めることができて，$x = \sinh t_0/(\cosh t_0 + 1)$ となる．これは式 (72) で $r = 0$ とおいた場合に等しい．$t_0 = 0$ の場合は円弧の中心が破線の上の無限遠にあって，その場合の双曲直線は x 軸と一致する．これは $\varphi = 0$ の場合と一致する．

一方，$\varphi = \pi/2$ の場合は A を通り半径 $1/\sinh t_0$ の x 軸対称な円弧である．この場合は 4.1 で述べた α と φ で定義される双曲直線に一致する．この場合は半径あるいは中心を比較することにより

$$\frac{1}{\sinh t_0} = \frac{\gamma}{\alpha} \tag{85}$$

$$\frac{\cosh t_0}{\sinh t_0} = \frac{1}{\alpha} \tag{86}$$

$$\cosh t_0 = \frac{1}{\gamma} \tag{87}$$

の関係が導かれる．

5 ポアンカレ円板における距離（長さ）

ポアンカレ円板をユークリッド平面としてみたときの距離を記号 l で表す．ポアンカレ円板における 2 点間の距離は双曲計量では円弧を表す 2 点におけるパラメータの差である．一方，ユークリッド平面としてみれば，2 点間の距離は線分の長さであり，双曲距離と異なる．また円弧に沿った距離すなわち円弧長も双曲距離とは異なるが，相互の量の関係式が存在する．ここでは 2 つの異なる計量の空間における距離の関係を検討してみる．

微小距離 $\mathrm{d}l$ はパラメータ t を用いて

$$\mathrm{d}l = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2} \tag{88}$$

である．ポアンカレ円板の座標として式 (35) と式 (36) を使うが，ここでは少し変形して，

$$x = \frac{\alpha\cos\varphi\cosh t - \gamma\sin\varphi\sinh t}{\cosh t + \gamma} \tag{89}$$

$$y = \frac{\alpha\sin\varphi\cosh t + \gamma\cos\varphi\sinh t}{\cosh t + \gamma} \tag{90}$$

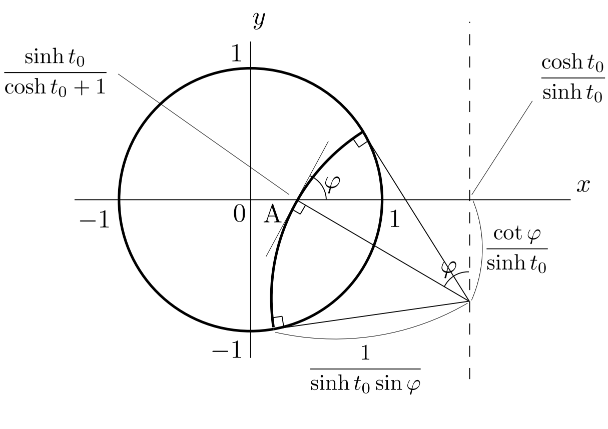

図 7: ポアンカレ円板上の点 A を通る双曲直線（円弧）の中心および半径.

とする．これから，

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{(\alpha\cos\varphi\sinh t - \gamma\sin\varphi\cosh t)\gamma - \gamma\sin\varphi}{(\cosh t+\gamma)^2} \tag{91}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{(\alpha\sin\varphi\sinh t + \gamma\cos\varphi\cosh t)\gamma + \gamma\cos\varphi}{(\cosh t+\gamma)^2} \tag{92}$$

が得られる．したがって，

$$\begin{aligned}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 &= \frac{\alpha^2\sinh^2 t + \gamma^2\cosh^2 t + 2\gamma\cosh t + 1}{(\cosh t+\gamma)^4}\gamma^2 \\ &= \frac{(1-\gamma^2)(1-\cosh^2 t) + \gamma^2\cosh^2 t + 2\gamma\cosh t + 1}{(\cosh t+\gamma)^4}\gamma^2 \\ &= \frac{\cosh^2 t + 2\gamma\cosh t + \gamma^2}{(\cosh t+\gamma)^4}\gamma^2 = \frac{\gamma^2}{(\cosh t+\gamma)^2}\end{aligned} \tag{93}$$

となるので，式 (85) は

$$\mathrm{d}l = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\mathrm{d}t = \frac{\gamma}{\cosh t+\gamma}\mathrm{d}t \tag{94}$$

となる．この式は積分できて，1 本の双曲直線上の 2 点 P，Q がパラメータ t_1 と t_2 で表されるとすると，

$$l = \int_{\mathrm{P}}^{\mathrm{Q}}\mathrm{d}l = \int_{t_1}^{t_2}\frac{\gamma}{\cosh t+\gamma}\mathrm{d}t = \left[\frac{2\gamma}{\alpha}\tan^{-1}\left(\frac{1-\gamma}{\alpha}\tanh\frac{t}{2}\right)\right]_{t_1}^{t_2} \tag{95}$$

という結果が得られる．この結果を実空間ユークリッド計量で考えてみよう．γ/α は双曲直線の円弧の半径であるから，この積分値は円弧長を表している．つまり t_1 と t_2 で示される P と Q の間の円弧長を表す．円弧上の 2 点 P と Q の x 軸となす角度を θ_1 および θ_2 とすると，式 (95) は $(\gamma/\alpha)(\theta_2-\theta_1)$ に等しい．したがって，

$$\frac{\theta_2-\theta_1}{2} = \tan^{-1}\left(\frac{1-\gamma}{\alpha}\tanh\frac{t_2}{2}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{1-\gamma}{\alpha}\tanh\frac{t_1}{2}\right) \tag{96}$$

である．$t=0$ のときには積分関数は 0 となるので，$t=0$ の点を O とし，x 軸となす角度を θ_0 とすれば，

$$\frac{1}{2}(\theta_2-\theta_0) = \tan^{-1}\left(\frac{1-\gamma}{\alpha}\tanh\frac{t_2}{2}\right) \tag{97}$$

$$\frac{1}{2}(\theta_1-\theta_0) = \tan^{-1}\left(\frac{1-\gamma}{\alpha}\tanh\frac{t_1}{2}\right) \tag{98}$$

と書くことができる．あるいは，

$$\tan\frac{\theta_2-\theta_0}{2} = \frac{1-\gamma}{\alpha}\tanh\frac{t_2}{2} \tag{99}$$

$$\tan\frac{\theta_1-\theta_0}{2} = \frac{1-\gamma}{\alpha}\tanh\frac{t_1}{2} \tag{100}$$

となる．

上の式が実際の図形に対応していることを確認してみよう．式 (35)，(36) を用いる．$\varphi=0$ の場合に円弧の中心と $t=0$ の点は x 軸上に来るので，x 軸方向を $\theta=0$ とすれば $\theta_0=0$ となって簡単になる．これは図 3(a) に対応する．このとき，式 (35)，(36) から，

$$x = \frac{\alpha}{\gamma+\cosh t} \tag{101}$$

$$y = \frac{\gamma\sinh t}{\gamma+\cosh t} \tag{102}$$

となる．図 3 と同様な図 8 の円弧上の点 Q のユークリッド座標を (x,y)，双曲平面のパラメータを t とする．ちなみに，円弧の端点 A および B はそれぞれ $t=-\infty$ と ∞ に対応する．円弧と x 軸との交点を O とし，Q と O を望む角度が θ である．図から

$$\tan\theta=\frac{y}{\frac{1}{\alpha}-1},\quad \sin\theta=\frac{\alpha y}{\gamma},\quad \cos\theta=\frac{\frac{1}{\alpha}-1}{\gamma} \tag{103}$$

という関係が成り立つ．実はこのままではうまく整理できない．そこで，$\tan\theta=2\tan\frac{\theta}{2}/(1-\tan^2\frac{\theta}{2})$ という関係から $\tan\frac{\theta}{2}$ について解くと，

$$\tan\frac{\theta}{2}=-\cot\theta+\operatorname{cosec}\theta \tag{104}$$

となるので，これに式 (103) を代入すると，

$$\begin{aligned}\tan\frac{\theta}{2}&=-\frac{\frac{1}{\alpha}-1}{y}+\frac{\gamma}{\alpha y}=\frac{\alpha x+\gamma-1}{\alpha y}\\&=\frac{\alpha^2\cosh t+(\gamma-1)(\gamma+\cosh t)}{\alpha\gamma\sinh t}=\frac{(\gamma-\gamma^2)\cosh t+\gamma+\gamma^2}{\alpha\gamma\sinh t}\\&=\frac{(1-\gamma)(\cosh t-1)}{\alpha\sinh t}\end{aligned} \tag{105}$$

となる．ここで，

$$\sinh t=\frac{2\tanh\frac{t}{2}}{1-\tanh^2\frac{t}{2}},\quad \cosh t=\frac{1+\tanh^2\frac{t}{2}}{1-\tanh^2\frac{t}{2}} \tag{106}$$

という関係式を代入すると，

$$\tan\frac{\theta}{2}=\frac{(1-\gamma)2\tanh^2\frac{t}{2}}{2\alpha\tanh\frac{t}{2}}=\frac{1-\gamma}{\alpha}\tanh\frac{t}{2} \tag{107}$$

という関係式を得る．この式は取りも直さず式 (99) あるいは式 (100) である．つまり，双曲線分の実際の長さが図形の示す長さに一致することがこれから確認できる．以上から明らかなように，円弧上の 2 点が t_1 と t_2 で表されるとき，そのユークリッド計量の長さを $l(t_2,t_1)$ と表すと，

$$l(t_2,t_1)=l(t_2,0)+l(0,t_1), \tag{108}$$

$$l(t_1,0)=-l(0,t_1) \tag{109}$$

という関係が成り立つことがわかる．

パラメータ t が与えられたとき，ポアンカレ円板上にユークリッド幾何の位置すなわち座標を示すのは一本道で可能であるが，その逆は必ずしも簡単ではない．以下ではユークリッド座標からポアンカレ円板の双曲平面パラメータ t を得る関係式を導く．

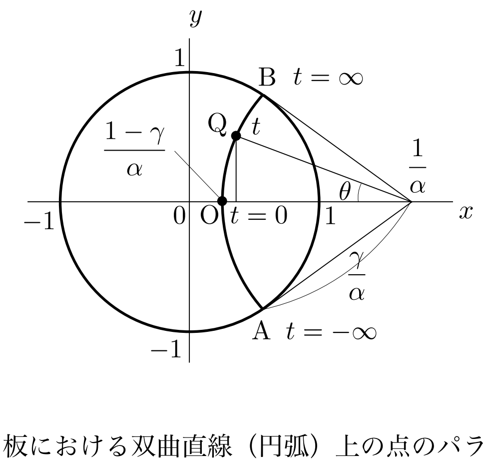

図 8: ポアンカレ円板における双曲直線（円弧）上の点のパラメータ t と円弧長．

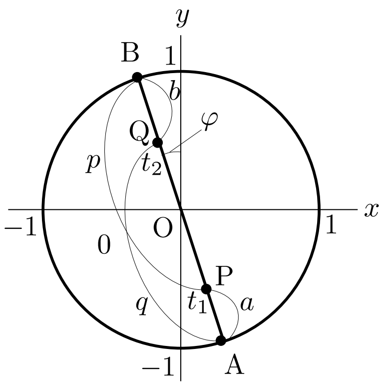

図 9: 2 点を結ぶ双曲直線がポアンカレ円板の中心を通る場合

5.0.4　$\alpha = 0$ の場合

まず，特殊な場合として $\alpha = 0$ の場合を考えよう．そのとき，

$$x = \frac{-\sinh t \sin\varphi}{\cosh t + 1} \tag{110}$$

$$y = \frac{\sinh t \cos\varphi}{\cosh t + 1} \tag{111}$$

である．したがって，

$$\mathrm{d}l = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{1+\cosh t}\mathrm{d}t \tag{112}$$

となり，これから

$$l = \int \mathrm{d}l = \int \frac{\mathrm{d}t}{1+\cosh t} = \tanh\frac{t}{2} \tag{113}$$

という比較的すっきりした関係式が得られる．この場合の双曲直線はポアンカレ円板の原点を通り y 軸から φ 傾いた直線である．この直線上に図 9 のように点 A，P，Q，B をとる．P と Q のパラメータを t_1 および t_2 とする．A と B は端点で円周にあり，それぞれ $t = -\infty$ および $t = \infty$ である．AP，QB，AQ，PB のユークリッド長さをそれぞれ a，b，p，q とする．そうすると，

$$a = \int_{-\infty}^{t_1} \frac{\mathrm{d}t}{1+\cosh t} = 1 + \tanh\frac{t_1}{2},\quad b = \int_{t_2}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+\cosh t} = 1 - \tanh\frac{t_2}{2}, \tag{114}$$

$$p = \int_{t_1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+\cosh t} = 1 - \tanh\frac{t_1}{2},\quad q = \int_{t_1}^{-\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+\cosh t} = 1 + \tanh\frac{t_2}{2}, \tag{115}$$

となる．これから，少し天下り的であるが，pq/ab を求めると，

$$\frac{pq}{ab} = \frac{(1-\tanh\frac{t_1}{2})(1+\tanh\frac{t_2}{2})}{(1+\tanh\frac{t_1}{2})(1-\tanh\frac{t_2}{2})} = \left(\cosh\frac{t_1}{2} - \sinh\frac{t_1}{2}\right)^2 \left(\cosh\frac{t_2}{2} + \sinh\frac{t_2}{2}\right)^2 = \mathrm{e}^{t_2 - t_1} \tag{116}$$

となる．$t_2 - t_1$ が 2 点 PQ 間の双曲距離であるからこれを $d(\mathrm{P},\mathrm{Q})$ と書くと，

$$d(\mathrm{P},\mathrm{Q}) = t_2 - t_1 = \ln\frac{pq}{ab} \tag{117}$$

という関係式が得られる．式 (116) の式変形では分母分子に $(1-\tanh\frac{t_1}{2})(1+\tanh\frac{t_2}{2})$ を掛けてから $1-\tanh^2 t = \mathrm{sech}^2 t$ の関係式を用いた．

上の関係式はPまたはQが中心Oと一致するとき，より簡単な式になる．PがOと一致しているとしよう．そうすると，$p=1$，$q=1+s$，$a=1$，$b=1-s$ とすることができる．s はQの原点からの距離である．そうすると，式 (117) は

$$d(\mathrm{O},\mathrm{Q}) = t_2 = \ln\frac{1+s}{1-s} \tag{118}$$

となる．

5.0.5 $\alpha \neq 0$ の場合

次に $\alpha \neq 0$ の場合について考えてみよう．この場合も式 (36) と式 (37) を使うが，ポアンカレ円板は点対称であるから，$\varphi = 0$ としても一般性は失われない．したがって，ここでは $\varphi = 0$ の場合の双曲直線を考える．その典型的な場合を図10に示す．双曲直線上に点 $\mathrm{A}(-\infty)$，点 $\mathrm{B}(\infty)$，点 $\mathrm{P}(t_1)$，点 $\mathrm{Q}(t_2)$ を考える．各点と円弧の中心Kを結ぶ線分が x 軸となす角度をそれぞれの点について θ_a，θ_b，θ_1，θ_2 とする．また，AとP，AとQ，PとB，QとBの直線距離を a，q，p，b とする．これは円弧長ではなく直線距離であることに注意しよう．最初にQとAの間の直線距離 a，および円弧長 $l(\mathrm{Q},\mathrm{A})$ を考える．まず，AQの円弧長 $l(\mathrm{Q},\mathrm{A})$ は式 (95) より，

$$\begin{aligned} l(\mathrm{A},\mathrm{Q}) &= \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{Q}} \mathrm{d}l = \left[\frac{2\gamma}{\alpha}\tan^{-1}\left(\frac{1-\gamma}{\alpha}\tanh\frac{t}{2}\right)\right]_{-\infty}^{t_2} \\ &= \frac{2\gamma}{\alpha}\left[\tan^{-1}\left(\frac{1-\gamma}{\alpha}\tanh\frac{t_2}{2}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1-\gamma}{\alpha}\right)\right] \end{aligned} \tag{119}$$

となる．Iは $\theta = 0$ になる点であることに注意すると，$l(\mathrm{A},\mathrm{Q})$ はl(A,I)とl(I,Q)の和である．したがって，式 (107) から，

$$\tan\frac{\theta_2}{2} = \frac{1-\gamma}{\alpha}\tanh\frac{t_2}{2}, \quad \tan\frac{\theta_a}{2} = -\frac{1-\gamma}{\alpha} \tag{120}$$

が成り立つ．PとBについても同様に，

$$\tan\frac{\theta_1}{2} = \frac{1-\gamma}{\alpha}\tanh\frac{t_1}{2}, \quad \tan\frac{\theta_b}{2} = \frac{1-\gamma}{\alpha} \tag{121}$$

が成り立つ．一方，二等辺三角形KQAに着目すると，底辺の長さ q は次のように表すことができる．

$$\begin{aligned} q &= 2\frac{\gamma}{\alpha}\sin\frac{\theta_2-\theta_a}{2} \\ &= 2\frac{\gamma}{\alpha}2\cos\frac{\theta_2}{2}\cos\frac{\theta_a}{2}\left(\tan\frac{\theta_2}{2} - \tan\frac{\theta_2}{2}\right) \end{aligned} \tag{122}$$

これに式 (120) を代入すると，

$$q = \frac{4\gamma}{\alpha}\cos\frac{\theta_2}{2}\cos\frac{\theta_a}{2}\frac{1-\gamma}{\alpha}\left(\tanh\frac{t_2}{2}+1\right) \tag{123}$$

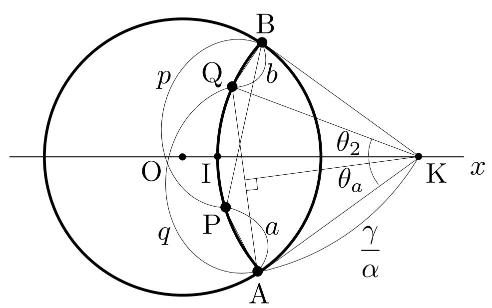

図 10: 2点を結ぶ双曲直線がポアンカレ円板の中心を通る場合

となる．同様にして，

$$p = 2\frac{\gamma}{\alpha}\sin\frac{\theta_b-\theta_1}{2}\frac{4\gamma}{\alpha}\cos\frac{\theta_b}{2}\cos\frac{\theta_1}{2}\frac{1-\gamma}{\alpha}\left(1-\tanh\frac{t_1}{2}\right) \tag{124}$$

$$a = 2\frac{\gamma}{\alpha}\sin\frac{\theta_1-\theta_a}{2}\frac{4\gamma}{\alpha}\cos\frac{\theta_1}{2}\cos\frac{\theta_a}{2}\frac{1-\gamma}{\alpha}\left(\tanh\frac{t_1}{2}+1\right) \tag{125}$$

$$b = 2\frac{\gamma}{\alpha}\sin\frac{\theta_b-\theta_2}{2}\frac{4\gamma}{\alpha}\cos\frac{\theta_b}{2}\cos\frac{\theta_2}{2}\frac{1-\gamma}{\alpha}\left(1-\tanh\frac{t_2}{2}\right) \tag{126}$$

を得る．式 (123) から式 (126) により，

$$\frac{pq}{ab} = \frac{(1-\tanh\frac{t_1}{2})(\tanh\frac{t_2}{2}+1)}{(\tanh\frac{t_1}{2}+1)(1-\tanh\frac{t_2}{2})} = \left(\cosh\frac{t_1}{2}-\sinh\frac{t_1}{2}\right)^2\left(\cosh\frac{t_2}{2}+\sinh\frac{t_2}{2}\right)^2 = \mathrm{e}^{t_2-t_1} \tag{127}$$

となる．この式は式 (116) と同じである．つまり，$\alpha \neq 0$ の場合にも式 (118) と同じ式が成り立つ．すなわち，

$$d(\mathrm{P},\mathrm{Q}) = t_2 - t_1 = \ln\frac{pq}{ab} \tag{128}$$

が一般に成り立つ．

6　複素平面のポアンカレ円板における距離（長さ）について

双曲幾何は多く複素平面で表現される．正則関数による等角写像や 1 次分数変換による直線と円の変換や等長変換など綺麗な数式処理ができてその中では美しくまとまっているが，もともとの双曲面の計量とどのように対応しているのかがわからないと今ひとつ落ち着かない．複素平面におけるポアンカレ円板は原点を中心とする半径 1 の円であるが，その中の 2 点 z_1，$z_2(|z_1|,|z_2| \leq 1)$ の間の双曲距離 d は次式で与えられる [5]．

$$d = \ln\frac{1+|g|}{1-|g|} \tag{129}$$

$$g = \frac{z_2-z_1}{1-\overline{z_1}z_2} \tag{130}$$

この式は定義として与えられる．以下ではこの式が実際に上半二葉双曲面で定義された計量による双曲距離，すなわちポアンカレ円板における双曲距離と同等であることを示す．ただし，演繹的ではないところは不十分である．$z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$，$z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$ を双曲直線上の 2 点とする．ポアンカレ円板は点対称であるから，$\varphi = 0$ としてもよい．したがって，式 (89)，(90) から

$$x_i = \frac{\alpha\cosh t_i}{\cosh t_i + \gamma} \quad (i=1,2), \tag{131}$$

$$y_i = \frac{\gamma\sinh t_i}{\cosh t_i + \gamma} \quad (i=1,2), \tag{132}$$

となる．2 点間の双曲距離は $d = t_2 - t_1$ であるから，(129) より，

$$|g| = \tanh\frac{d}{2} = \tanh\frac{t_2-t_1}{2} \tag{133}$$

となるので，これを示せばよい．

(130) から，

$$|g| = \frac{|z_2-z_1|}{|1-\overline{z_1}z_2|} = \frac{\sqrt{(x_2-x_1)^2-(y_2-y_1)^2}}{\sqrt{(1-x_1x_2-y_1y_2)^2+(x_1y_2-x_2y_1)^2}} \tag{134}$$

である．長いので部分に分けて計算する．まず，$(x_2-x_1)^2-(y_2-y_1)^2$ を通分してその分子を計算する．分母は $(\cosh t_1+\gamma)^2(\cosh t_2+\gamma)^2$ である．分子は，

$$
\begin{aligned}
&\alpha^2[\cosh t_1(\cosh t_2+\gamma)-\cosh t_2(\cosh t_1+\gamma)]^2+\gamma^2[\sinh t_1(\cosh t_2+\gamma)-\sinh t_2(\cosh t_1+\gamma)]^2\\
=&\alpha^2[\gamma(\cosh t_1-\cosh t_2)]^2+\gamma^2[\sinh(t_1-t_2)+\gamma(\sinh t_1-\sinh t_2)]^2\\
=&4\alpha^2\gamma^2\left(\sinh\frac{t_1+t_2}{2}\sinh\frac{t_1-t_2}{2}\right)^2+4\gamma^2\left(\sinh\frac{t_1-t_2}{2}\cosh\frac{t_1-t_2}{2}+\gamma\cosh\frac{t_1+t_2}{2}\sinh\frac{t_1-t_2}{2}\right)^2\\
=&4\gamma^2\sinh^2\frac{t_1-t_2}{2}\left[(1-\gamma^2)\sinh^2\frac{t_1+t_2}{2}+\left(\cosh\frac{t_1-t_2}{2}+\gamma\cosh\frac{t_1+t_2}{2}\right)^2\right] \qquad (135)
\end{aligned}
$$

と変形することができる．次に，$(1-x_1x_2-y_1y_2)$ の分子を計算する．分子は

$$
\begin{aligned}
&(\cosh t_1+\gamma)(\cosh t_2+\gamma)-\alpha^2\cosh t_1\cosh t_2-\gamma^2\sinh t_1\sinh t_2\\
=&\gamma^2+\gamma(\cosh t_1+\cosh t_2)+\gamma^2\cosh(t_1-t_2) \qquad (136)
\end{aligned}
$$

となる．$(x_1y_2-x_2y_1)$ の分子についても，

$$
\alpha\cosh t_1\gamma\sinh t_2-\alpha\cosh t_2\gamma\sinh t_1=\alpha\gamma\sinh(t_1-t_2) \qquad (137)
$$

となる．したがって，$(1-x_1x_2-y_1y_2)^2+(x_1y_2-x_2y_1)^2$ の分子は，

$$
\begin{aligned}
&[\gamma^2+\gamma(\cosh t_1+\cosh t_2)+\gamma^2\cosh(t_1-t_2)]^2+\alpha^2\gamma^2\sinh^2(t_1-t_2)\\
=&\left[\gamma^2+2\gamma\cosh\frac{t_1+t_2}{2}\cosh\frac{t_1-t_2}{2}+\gamma^2\left(2\cosh^2\frac{t_1-t_2}{2}-1\right)\right]^2\\
&+4\gamma^2(1-\gamma^2)\sinh^2\frac{t_1-t_2}{2}\cosh^2\frac{t_1-t_2}{2}\\
=&4\gamma^2\cosh^2\frac{t_1-t_2}{2}\left[\left(\cosh\frac{t_1+t_2}{2}+\gamma\cosh\frac{t_1-t_2}{2}\right)^2+(1-\gamma^2)\sinh^2\frac{t_1-t_2}{2}\right] \qquad (138)
\end{aligned}
$$

となる．この最後の式の大括弧の中は次のように変形できる．

$$
\begin{aligned}
&\cosh^2\frac{t_1+t_2}{2}+2\gamma\cosh\frac{t_1+t_2}{2}\cosh\frac{t_1-t_2}{2}+\gamma^2\cosh\frac{t_1-t_2}{2}^2+(1-\gamma^2)\sinh^2\frac{t_1-t_2}{2}\\
=&\left(1+\sinh^2\frac{t_1+t_2}{2}\right)+2\gamma\cosh\frac{t_1+t_2}{2}\cosh\frac{t_1-t_2}{2}+\gamma^2+\left(\cosh^2\frac{t_1-t_2}{2}-1\right)\\
=&\cosh^2\frac{t_1-t_2}{2}+2\gamma\cosh\frac{t_1+t_2}{2}\cosh\frac{t_1-t_2}{2}+\gamma^2\left(\cosh^2\frac{t_1+t_2}{2}-\sinh^2\frac{t_1+t_2}{2}\right)+\sinh^2\frac{t_1+t_2}{2}\\
=&\left(\cosh\frac{t_1-t_2}{2}+\gamma\cosh\frac{t_1+t_2}{2}\right)^2+(1-\gamma^2)\sinh^2\frac{t_1+t_2}{2} \qquad (139)
\end{aligned}
$$

この式は式 (135) の大括弧の中と等しい．$(x_2-x_1)^2-(y_2-y_1)^2$ と $(1-x_1x_2-y_1y_2)^2+(x_1y_2-x_2y_1)^2$ の分母は等しいから，式 (135) と式 (139) から，

$$
|g|=\frac{\sqrt{(x_2-x_1)^2-(y_2-y_1)^2}}{\sqrt{(1-x_1x_2-y_1y_2)^2+(x_1y_2-x_2y_1)^2}}=\tanh\frac{|t_1-t_2|}{2}=\tanh\frac{d}{2} \qquad (140)
$$

が成り立つ．すなわち，式 (133) が示された．複素平面におけるポアンカレ円板の双曲距離の定義は双曲面の計量の距離と等しい．

7　ポアンカレ円板の角度と内積

ポアンカレ円板で 2 本の双曲直線が交差するときの角度を考える．ポアンカレ円板は点対称であるから，交差する点 A を x 軸上に考えてもよい．このような双曲直線（円弧）は式 (72)，(73) で表される．2 本の円弧を

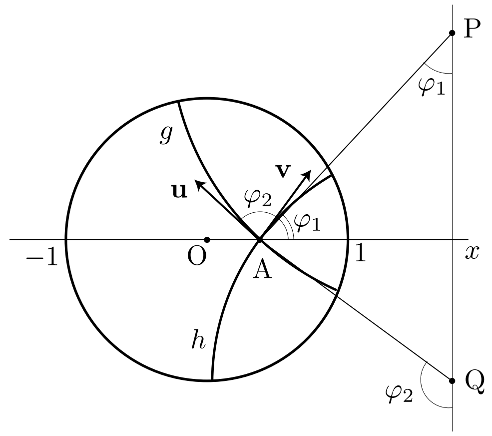

図 11: ポアンカレ円板上の 1 点 A を通る 2 本の双曲直線とその間の角度．$\mathbf{u}$ と $\mathbf{v}$ は点 A における g と h の接ベクトル．φ_1 と φ_2 は $\mathbf{u}$ と $\mathbf{v}$ の x 軸からの角度．

g，h とし，それぞれは式 (72)，(73) で φ_1，φ_2 で表されるとする．さらに，点 A における g および h の接ベクトルを $\mathbf{u}$ と $\mathbf{v}$ とする．これらの関係を図 11 に示す．2 つの双曲直線の交点でなす角度は交点におけるそれぞれの接ベクトルのなす角度であるから，$\mathbf{u}$ と $\mathbf{v}$ のなす角度すなわち $\varphi_2 - \varphi_1$ である．このベクトルを $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ から求めよう．P と Q は円弧 g および h の中心である．式 (84) または図 7 より，円弧の中心は

$$\left(\frac{\cos\varphi}{\sinh t_0 \sin\varphi},\ \frac{\cosh t_0}{\sinh t_0}\right) \tag{141}$$

で，点 A は

$$\left(\frac{\sinh t_0}{\cosh t_0 + 1},\ 0\right) = \left(\frac{\cosh t_0 - 1}{\sinh t_0},\ 0\right) \tag{142}$$

であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \left(\frac{1}{\sinh t_0},\ \frac{\cot\varphi_1}{\sinh t_0}\right),\quad \overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \left(\frac{1}{\sinh t_0},\ \frac{\cot\varphi_2}{\sinh t_0}\right) \tag{143}$$

である．$\mathbf{u}$ と $\mathbf{v}$ は $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ を $\pi/2$ 回転させたものであるから，したがって，

$$\mathbf{u} = \left(-\frac{\cot\varphi_1}{\sinh t_0},\ \frac{1}{\sinh t_0}\right),\quad \mathbf{v} = \left(-\frac{\cot\varphi_2}{\sinh t_0},\ \frac{1}{\sinh t_0}\right) \tag{144}$$

である．これから，内積 $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ はポアンカレ円板では $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ に等しい．すなわち，

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} &= \frac{1}{\sinh^2 t_0}(\cot\varphi_1 \cot\varphi_2 + 1) \\
&= \frac{1}{\sinh^2 t_0 \sin\varphi_1 \sin\varphi_2}(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2) \\
&= \frac{\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{\sinh^2 t_0 \sin\varphi_1 \sin\varphi_2}
\end{aligned} \tag{145}$$

となる．一方，

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = \frac{1}{\sinh^2 t_0}(\cot^2\varphi_1 + 1) = \frac{1}{\sinh^2 t_0 \sin^2\varphi_1}, \tag{146}$$

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = \frac{1}{\sinh^2 t_0}(\cot^2\varphi_2 + 1) = \frac{1}{\sinh^2 t_0 \sin^2\varphi_2}, \tag{147}$$

であるから，

$$\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} = \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \tag{148}$$

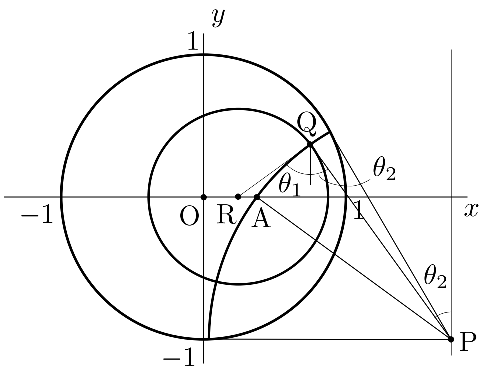

図 12: ポアンカレ円板上の 1 点 A から等双曲距離にある双曲円とそれに直交する双曲直線.

となる．一方，ここで使われた φ_1，φ_2 はもともと双曲面で任意の点を始点とする双曲直線の方向を定めるために定義された量であるから，双曲面の計量を用いた内積と直接比較することができて，式 (62) から

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle &= \cosh^2 t_0 \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 - \sinh^2 t_0 \cos\varphi_2 \varphi_2 \\ &= \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \end{aligned} \tag{149}$$

である．明らかに $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 1$ であるから，ポアンカレ円板の内積 $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$ と双曲面の内積 $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ は等しい．交差する双曲直線のなす角度は接ベクトルの内積で定義されるから，このことは双曲面における角度とポアンカレ円板の対応する角度は等しいことを意味する．

8　クライン円板上の双曲円

ポアンカレ円板の任意の点から等双曲距離にある曲線を考える．ユークリッド平面の場合との対応から双曲円と呼ぶ．ポアンカレ円板のユークリッドの座標として，x 軸上の点 $(\sinh t_0/(\cosh t_0 + 1),\ 0)$ から双曲距離 r にある点のユークリッド座標として式 (72)，(73) を用いる．この 2 つの式を変形して $\cos\varphi$ と $\sin\varphi$ に関する連立方程式にすると，

$$(x \sinh t_0 \sinh r - \cosh t_0 \sinh r) \cos\varphi = -x(1 + \cosh t_0 \cosh r) + \sinh t_0 \cosh r \tag{150}$$

$$y \sinh t_0 \sinh r \cos\varphi - \sinh r \sin\varphi = -y(1 + \cosh t_0 \cosh r) \tag{151}$$

となる．係数の行列式を D とすると，

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} x \sinh t_0 \sinh r - \cosh t_0 \sinh r & 0 \\ y \sinh t_0 \sinh r & -\sinh r \end{vmatrix} \\ &= -(x \sinh t_0 \sinh r - \cosh t_0 \sinh r) \sinh r \\ &= -\sinh^2 r (x \sinh t_0 - \cosh t_0) \end{aligned} \tag{152}$$

である．クラメールの公式により，

$$\begin{aligned}
\cos\varphi &= \frac{1}{D}\begin{vmatrix} -x(1+\cosh t_0\cosh r)+\sinh t_0\cosh r & 0 \\ -y(1+\cosh t_0\cosh r) & -\sinh r \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{D}\{x(1+\cosh t_0\cosh r)-\sinh t_0\cosh r\}\sinh r \qquad (153)\\
\sin\varphi &= \frac{1}{D}\begin{vmatrix} x\sinh t_0\sinh r-\cosh t_0\sinh r & -x(1+\cosh t_0\cosh r)+\sinh t_0\cosh r \\ y\sinh t_0\sinh r & -y(1+\cosh t_0\cosh r) \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{D}\{y(1+\cosh t_0\cosh r)\cosh t_0\sinh r - y\sinh^2 t_0\sinh r\cosh r\} \\
&= \frac{1}{D}y(\cosh t_0+\cosh r)\sinh r \qquad (154)
\end{aligned}$$

が得られるので，これを $\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1$ に代入すると，

$$y^2(\cosh t_0+\cosh r)^2+\{x(1+\cosh t_0\cosh r)-\sinh t_0\cosh r\}^2=\sinh^2 r(x\sinh t_0-\cosh t_0)^2 \qquad (155)$$

となる．これを整理すると，

$$\begin{aligned}
&x^2\{(1+\cosh t_0\cosh r)^2-\sinh^2 t_0 r\sinh^2\}+y^2(\cosh t_0+\cosh r)^2 \\
&-2x\{(1+\cosh t_0\cosh r)\sinh t_0\cosh r-\sinh t_0\cosh t_0\sinh^2 r\} \\
&=\sinh^2 r\cosh^2 t_0-\sinh^2 t_0\cosh^2 r \qquad (156)
\end{aligned}$$

を経て

$$\begin{aligned}
&x^2(\cosh t_0+\cosh r)^2+y^2(\cosh t_0+\cosh r)^2-2x\sinh t_0(\cosh t_0+\cosh r) \\
&=\sinh^2 r\cosh^2 t_0-\sinh^2 t_0\cosh^2 r \qquad (157)
\end{aligned}$$

となり，最終的に，

$$\left(x-\frac{\sinh t_0}{\cosh t_0+\cosh r}\right)^2+y^2=\left(\frac{\sinh r}{\cosh t_0+\cosh r}\right)^2 \qquad (158)$$

となる．なお，式 (156) から式 (157) への変形は以下のようにした．左辺 x^2 の係数のみ示すと，

$$\begin{aligned}
&(1+\cosh t_0\cosh r)^2-\sinh^2\sinh^2 r \\
=&1+2\cosh t_0\cosh r+\cosh^2 t_0\cosh^2 r-\sinh^2 t_0\sinh^2 r \\
=&(\cosh^2 t_0-\sinh^2 t_0)+2\cosh t_0\cosh r+\cosh^2 t_0\cosh^2 r-\sinh^2 t_0\sinh^2 r \\
=&\cosh^2 t_0+2\cosh t_0\cosh r+\cosh^2\cosh^2 r-\sinh^2 t_0(1+\sinh^2 r) \\
=&\cosh^2 t_0+2\cosh t_0\cosh r+(\cosh^2 t_0-\sinh^2 t_0)\cosh^2 r \\
=&(\cosh t_0+\cosh r)^2
\end{aligned}$$

である．式 (158) は中心が $(\sinh t_0/(\cosh t_0+\cosh r),\ 0)$ で半径が $\sinh r/(\cosh t_0+\cosh r)$ の円の方程式である．つまり，双曲計量の長さ一定の軌跡もポアンカレ円板ではユークリッド平面でみても円であることを示している．ユークリッド平面の円の中心が双曲計量による中心と違うことに注意する必要がある．ポアンカレ円板では円周に近づくほど単位長さの双曲距離は指数関数的に増大するから双曲円の中心に対してユークリッド円の中心はポアンカレ円板の中心に近づかざるを得ないことがわかる．

9 ポアンカレ円板の円と円の中心を通る双曲直線が直交すること

双曲直線の双曲円の中心 R を表すユークリッド座標は式 (158) から，

$$\left(\frac{\sinh t_0}{\cosh t_0+\cosh r},\ 0\right) \qquad (159)$$

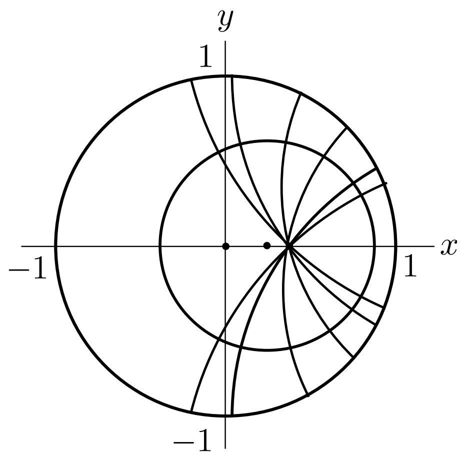

図 13: ポアンカレ円板上の双曲円とその中心を通る双曲直線．互いに直交する．

である．また，双曲円の半径 r_1 は

$$r_1 = \frac{\sinh r}{\cosh t_0 + \cosh r} \tag{160}$$

である．一方，式 (84) から，双曲直線を表す円弧の中心 P は

$$\left(\frac{\cosh t_0}{\sinh t_0},\ -\frac{\cot\varphi}{\sinh t_0}\right) \tag{161}$$

である．その半径は

$$r_2 = \frac{1}{\sinh t_0 \sin\varphi} \tag{162}$$

である．Q を通る y 軸に平行な直線からの QR および QP の角度を θ_1 および θ_2 とする (図 12 参照)．R の座標を $(x_1,\ y_1)$，P の座標を $(x_2,\ y_2)$ とすると，

$$x_2 = x_1 + r_1\sin\theta_1 + r_2\sin\theta_2 \tag{163}$$

$$y_2 = y_1 + r_1\cos\theta_1 + r_2\cos\theta_2 \tag{164}$$

となる．これから

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_1 + \theta_2) \tag{165}$$

となる．実はこの式はユークリッド平面の余弦定理である．この式から $\cos(\theta_1+\theta_2)$ を計算しよう．そのため，次の計算をしておく．

$$\begin{aligned}
(x_2 - x_1)^2 &= \left(\frac{\cosh t_0}{\sinh t_0} - \frac{\sinh t_0}{\cosh t_0 + \cosh r}\right)^2 \\
&= \frac{\cosh^2 t_0(\cosh t_0 + \cosh r)^2 - 2\cosh t_0(\cosh t_0 + \cosh r)\sinh^2 t_0 + \sinh^4 t_0}{\sinh^2 t_0(\cosh t_0 + \cosh r)^2} \\
&= \frac{(\cosh t_0 - \sinh t_0)^2 + 2\cosh t_0\cosh r(\cosh^2 t_0 - \sinh^2 t_0) + \cosh^2 t_0\cosh^2 r}{\sinh^2 t_0(\cosh t_0 + \cosh r)^2} \\
&= \frac{1 + 2\cosh t_0\cosh r + \cosh^2 t_0\cosh^2 r}{\sinh^2 t_0(\cosh t_0 + \cosh r)^2} \\
&= \frac{(1 + \cosh t_0\cosh r)^2}{\sinh^2 t_0(\cosh t_0 + \cosh r)^2}
\end{aligned}$$

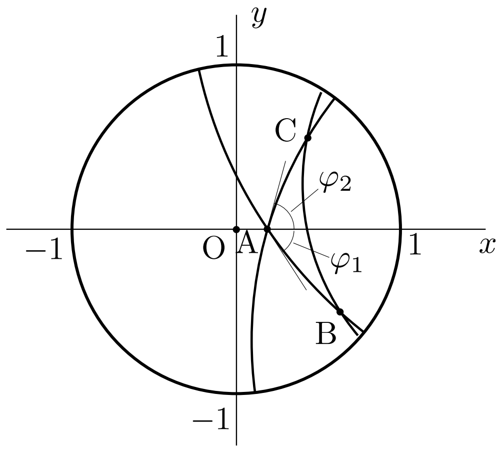

図 14: ポアンカレ円板の双曲三角形 ABC. A における接線と x 軸からの角度を φ_1，φ_1 とする．本図の場合，$\varphi_1 < 0$ である．

したがって，

$$
\begin{aligned}
&(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - r_1^2 - r_2^2 \\
=&\frac{(1 + \cosh t_0 \cosh r)^2}{\sinh^2 t_0 (\cosh t_0 + \cosh r)^2} - \frac{1}{\sinh^2 t_0} - \frac{\sinh^2 r}{(\cosh t_0 + \cosh r)^2} \\
=&\frac{(1 + \cosh t_0 \cosh r)^2 - (\cosh t_0 + \cosh r)^2 - \sinh^2 t_0 \sinh^2 r}{(\cosh t_0 + \cosh r)^2 \sinh^2 t_0} \\
=&\frac{1 + \cosh^2 t_0 \cosh^2 r - \cosh^2 t_0 - \cosh^2 r - \sinh^2 t_0 \sinh^2 r}{(\cosh t_0 + \cosh r)^2 \sinh^2 t_0} \\
=&\frac{1 + \sinh^2 t_0 \cosh^2 r - \cosh^2 t_0 - \sinh^2 t_0 \sinh^2 r}{(\cosh t_0 + \cosh r)^2 \sinh^2 t_0} \\
=&\frac{1 + \sinh^2 t_0 - \cosh^2 t_0}{(\cosh t_0 + \cosh r)^2 \sinh^2 t_0} = 0
\end{aligned}
$$

となる．すなわち，$\cos(\theta_1 + \theta_2) = 0$ となり，$\theta_1 + \theta_2 = \pi/2$ であることが示された．つまり，ポアンカレ円板上の点を中心とする全ての双曲円は同じ点を通る全ての双曲直線と直交することを意味する．ポアンカレ円板の角度はユークリッド平面の角度と等しいのでこの二つはユークリッド平面でも直交する．一例を図 13 に示した．

10 ポアンカレ円板での双曲余弦定理

3 本の双曲直線が相異なる 3 点で交差しているとき，この 3 つの交点はポアンカレ円板の双曲三角形を形成する．最も原点に近い交点を A とし，それ以外の交点を B, C とする．ポアンカレ円板は点対称であるから，A を x 軸上 $x > 0$ の部分に置いても一般性は失われない．A から延びる 2 本の双曲直線上にそれぞれ 1 点をとりそれを A と B とする．A と B のユークリッド座標を (x_1, y_1) および (x_2, y_2) とする．ポアンカレ円板上の点を式 (72)，(73) で表すことにする．A を表すパラメータを t_0 とする．そのとき，点 B$(i = 1)$ および C$(i = 2)$

は次のように表される．

$$x_i = \frac{\sinh t_0 \cosh r_i + \cosh t_0 \sinh r_i \cos\varphi_i}{1 + \cosh t_0 \cosh r_i + \sinh t_0 \sinh r_i \cos\varphi_i}, \tag{166}$$

$$y_i = \frac{\sinh r_i \sin\varphi_i}{1 + \cosh t_0 \cosh r_i + \sinh t_0 \sinh r_i \cos\varphi_i}, \tag{167}$$

ここで，r_1 と r_2 はそれぞれ AB と AC の双曲距離である．また，φ_1 と φ_2 は点 A から延びる双曲直線の A における接線の x 軸から測った角度である．このようなポアンカレ円板上の双曲三角形 ABC を図 14 に示す．図 14 の場合では $\varphi_1 < 0$ となる．

式 (166)，(167) から内積 $x_1x_2 + y_1y_2$ を計算しよう．式が長いので部分に分けて計算する．x_1x_2 の分子を E，y_1y_2 の分子を F，分母を G とする．分母は共通である．E，F，G は以下のようになる．

$$\begin{aligned} E &= (\sinh t_0 \cosh r_1 + \cosh t_0 \sinh r_1 \cos\varphi_1)(\sinh t_0 \cosh r_2 + \cosh t_0 \sinh r_2 \cos\varphi_2) \\ &= \sinh^2 t_0 \cosh r_1 \cosh r_2 + \cosh^2 t_0 \sinh r_1 \sinh r_2 \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \\ &\qquad + \cosh t_0 \sinh t_0 (\cosh r_1 \sinh r_2 \cos\varphi_2 + \cosh r_2 \cosh r_2 \cos\varphi_2) \end{aligned} \tag{168}$$

$$F = \sinh r_1 \sin\varphi_1 \sinh r_2 \sin\varphi_2 \tag{169}$$

式 (166)，(167) の分母で $z_i = \cosh t_0 \cosh r_i + \sinh t_0 \sinh r_i \cos\varphi_i$ とおくと，

$$\begin{aligned} G &= (1+z_1)(1+z_2) = 1 + z_1 + z_2 + z_1z_2 \\ &= 1 + z_1 + z_2 + (\cosh t_0 \cosh r_1 + \sinh t_0 \sinh r_1 \cos\varphi_1)(\cosh t_0 \cosh r_2 + \sinh t_0 \sinh r_2 \cos\varphi_2) \\ &= 1 + z_1 + z_2 + \cosh^2 t_0 \cosh r_1 \cosh r_2 + \sinh^2 t_0 \sinh r_1 \sinh r_2 \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \\ &\qquad + \cosh t_0 \sinh t_0 (\cosh r_2 \sinh r_1 \cos\varphi_1 + \cosh r_1 \sinh r_2 \cos\varphi_2) \end{aligned} \tag{170}$$

である．これから

$$\begin{aligned} E + F - G &= (\sinh^2 t_0 - \cosh^2 t_0) \cosh r_1 \cosh r_2 + (\cosh^2 t_0 - \sinh^2 t_0) \sinh r_1 \sinh r_2 \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \\ &\qquad + \sinh r_1 \sinh r_2 \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 - 1 - z_1 - z_2 \\ &= -\cosh r_1 \cosh r_2 + \sinh r_1 \sinh r_2 (\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + \sin\varphi_1 \sin\varphi_2) - 1 - z_1 - z_2 \\ &= -\cosh r_1 \cosh r_2 + \sinh r_1 \sinh r_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - 1 - z_1 - z_2 \end{aligned} \tag{171}$$

となる．したがって，

$$x_1x_2 + y_1y_2 - 1 = \frac{-\cosh r_1 \cosh r_2 + \sinh r_1 \sinh r_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - 1 - z_1 - z_2}{(1+z_1)(1+z_2)} \tag{172}$$

という関係式が得られる．ここで，式 (64)–(66)，(72)，(73) から明らかなように z_1，z_2 は双曲面上の点のユークリッド z 座標であり，式 (72)，(73) の分子，すなわち式 (166)，(167) の分子は同 x，y 座標である．したがって，x_i, y_i $(i = 1, 2)$ に対応する双曲面の座標を x'_i, y'_i $(i = 1, 2)$ とすると，

$$x_i = \frac{x'_i}{1+z_i}, \quad y_i = \frac{y'_i}{1+z_i} \tag{173}$$

である．これを式 (171) に代入すると，

$$x'_1x'_2 + y'_1y'_2 - z_1z_2 = -\cosh r_1 \cosh r_2 + \sinh r_1 \sinh r_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \tag{174}$$

となる．左辺は双曲面の内積であり [2]，それぞれの位置ベクトルの示す点間の双曲距離を d とすると，$-\cosh d$ である．いま，点 B と C の間の双曲距離を r_0 とすれば，左辺は $-\cosh r_0$ である．これを式 (174) に代入すると，

$$\cosh r_0 = \cosh r_1 \cosh r_2 - \sinh r_1 \sinh r_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \tag{175}$$

という関係式が得られる．この式は取りも直さず双曲余弦定理である．左辺の値を得るのに双曲面まで戻らないといけないのは苦しいが，もともとパラメータを用いた表現は双曲面からポアンカレ円板まで変数が共通であるからこの方法ではこうならざるを得ない．

参考文献

[1] J. W. Cannon, W. J. Floyd, R. Kenyon, and W. R. Parry, “Hyperbolic Geometry”, Flavors of Germany, MSRI Publications, **31**, 59-115 (1997).
`https://www.math.brown.edu/ rkenyon/papers/cannon.pdf`

[2] 2017/2/9 の entry　双曲面幾何　その 1
`http://totoha.web.fc2.com/Hyperboloid_geo_1.pdf`

[3] 2017/2/10 の entry　双曲面幾何　その 2
`http://totoha.web.fc2.com/Hyperboloid_geo_2.pdf`

[4] 2017/2/19 の entry　双曲面幾何　その 3
`http://totoha.web.fc2.com/Hyperboloid_geo_3.pdf`

[5] 中川仁,「エッシャーの数学」, 平成 26 年度 上越教育大学公開講座資料
`http://www.juen.ac.jp/math/nakagawa/openh26escher.pdf`