双曲面幾何 (その 3) クライン円板

2017.2.15　　鈴木　実

1　回転双曲面から Klein 円板へ

回転双曲面 (hyperboloid) $x^2+y^2-z^2=-1$ に非ユークリッド計量 $\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2-\mathrm{d}z^2=-1$ を導入して構成される双曲幾何は 3 次元ユークリッド空間の中の 2 次元曲面の上にある．これは図示するのが困難で推論するときにぎこちない．これを 2 次元平面に変換すると図示することも簡単になる．その変換で得られる平面上で構成される双曲幾何の一つがクライン円板である．(Beltrami-Klein model とも言われる.)

Klein 円板の定義すなわち回転双曲面からクライン円板への変換は次のように行う．次の回転双曲面（二葉双曲面の上半面）

$$x^2+y^2-z^2=-1 \qquad (z>0) \tag{1}$$

の上の点を，この点から原点 O を通る直線によりこの直線が $z=1$ の平面上と交差する点を対応させる．これを 1 つの写像とすると，この写像による点の集合は点 $(0,0,1)$ を中心とする半径 1 の円の内部になる．この円に円周を加えたものは円板になる．この円板をクライン円板 (Klein disk) という．(ここに図)

双曲面上の点を (x_1,y_1,z_1)，対応するクライン円板上の点を (x,y) とする．上に述べた変換 (写像) から，

$$x=x_1/z_1 \tag{2}$$

$$y=y_1/z_1 \tag{3}$$

という関係が成り立つ．

2　計量

双曲面を一般に

$$y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2-y_{n+1}^2=-1 \tag{4}$$

とすると，その計量は

$$\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}y_1^2+\mathrm{d}y_2^2+\cdots+\mathrm{d}y_n^2-\mathrm{d}y_{n+1}^2 \tag{5}$$

である．双曲面の座標とクライン円板の座標の関係は，

$$x_1=\frac{y_1}{y_{n+1}}, \quad \cdots, x_i=\frac{y_i}{y_{n+1}}, \quad \cdots, \quad x_n=\frac{y_n}{y_{n+1}}, \quad x_{n+1}=1 \tag{6}$$

である．式 (6) より $y_i=x_iy_{n+1}$ であるから，$\mathrm{d}y_i=y_{n+1}\mathrm{d}x_i+x_i\mathrm{d}y_{n+1}$ となり，かつ，式 (4) と式 (5) から

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1-\frac{1}{y_{n+1}^2} \tag{7}$$

となるからこの関係を用いると，

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}s^2&=\sum_{i=1}^{n}(y_{n+1}\mathrm{d}x_i+x_i\mathrm{d}y_{n+1})^2-\mathrm{d}y_{n+1}^2\\
&=y_{n+1}^2\sum_{i=1}^{n}\mathrm{d}x_i^2+2y_{n+1}\sum_{i=1}^{n}x_i\mathrm{d}x_i\mathrm{d}y_{n+1}+\mathrm{d}y_{n+1}^2\sum_{i=1}^{n}x_i^2-dy_{n+1}^2\\
&=y_{n+1}^2\sum_{i=1}^{n}\mathrm{d}x_i^2+2y_{n+1}\mathrm{d}y_{n+1}\sum_{i=1}^{n}x_i\mathrm{d}x_i-\frac{\mathrm{d}y_{n+1}^2}{y_{n+1}^2}
\end{aligned} \tag{8}$$

となる．式 (7) から，

$$y_{n+1}^2 = \frac{1}{1 - x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_n^2} \tag{9}$$

となり，これからさらに，

$$y_{n+1}\mathrm{d}y_{n+1} = \frac{x_1\mathrm{d}x_1 + \cdots + x_n\mathrm{d}x_n}{(1 - x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_n^2)^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i\mathrm{d}x_i}{(1 - x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_n^2)^2} \tag{10}$$

が得られる．これら 2 つの式を式 (8) に代入すると，

$$\mathrm{d}s^2 = y_{n+1}^2 \sum_{i=1}^n \mathrm{d}x_i^2 + 2\frac{(\sum_{i=1}^n x_i\mathrm{d}x_i)^2}{(1 - x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_n^2)^2} - \frac{1}{y_{n+1}^4}\left[\frac{\sum_{i=1}^n x_i\mathrm{d}x_i}{(1 - x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_n^2)^2}\right]^2 \tag{11}$$

となる．これに式 (9) に代入すると，

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n \mathrm{d}x_i^2}{1 - x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_n^2} + \frac{(\sum_{i=1}^n x_i\mathrm{d}x_i)^2}{(1 - x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_n^2)^2} \tag{12}$$

となる．これがクライン円板の計量である．

双曲面が 3 次元実空間の一葉双曲面の場合に，式 (12) から計量は

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}{1 - x^2 - y^2} + \frac{(x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y)^2}{(1 - x^2 - y^2)^2} \tag{13}$$

となる．

前の entry[1] で用いた一葉双曲面上の点 (x_1, y_1, z_1) を表すパラメータ t を用いると，

$$x = \alpha \cosh t \cos\varphi - \sinh t \sin\varphi \tag{14}$$

$$y = \alpha \cosh t \sin\varphi + \sinh t \cos\varphi \tag{15}$$

$$z = \beta \cosh t \tag{16}$$

となる [1]．ここで，$\alpha = \tan\theta$，$\beta = 1/\sqrt{1 - \tan^2\theta} = 1/\sqrt{1 - \alpha^2}$ である．クライン円板上の点 (x, y) をこのパラメータ t を用いて表すと，

$$x = \alpha\cos\varphi - \frac{1}{\beta}\sin\varphi \tanh t \tag{17}$$

$$y = \alpha\sin\varphi + \frac{1}{\beta}\cos\varphi \tanh t \tag{18}$$

となる．すなわち，クライン円板上の点もパラメータ t を用いて表すことができる．また，式 (14)–(16) は双曲面上の直線（測地線）を表しているので，式 (17)，(18) はクライン円板における直線を表す．双曲面からクライン円板へ変換する方法からでも明らかなように，クライン円板の直線は実空間の直線である．式 (17)，(18) から t を消去すると，

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi = \alpha \tag{19}$$

となる．これが直線の方程式で，傾きが $\tan\varphi$，原点からの距離が α の直線を表している．

図示すれば明らかなように，1 つの直線とその上にない点があるとき，この点を通る直線は連続的に無限に引くことが可能である．

このパラメータ t を用いた場合の計量を計算してみよう．式 (17)，(18) から

$$\frac{1}{1 - x^2 - y^2} = \beta^2 \cosh^2 t \tag{20}$$

$$\frac{1}{(1 - x^2 - y^2)^2} = \beta^4 \cosh^4 t \tag{21}$$

$$\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 = \frac{1}{\beta^2}\mathrm{sech}^4 t\mathrm{d}t^2 \tag{22}$$

$$x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x^2 + y^2)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\alpha^2 + \frac{1}{\beta^2}\tanh^2 t)\mathrm{d}t = \frac{1}{\beta^2}\tanh t \mathrm{sech}^2 t \tag{23}$$

となる．これを式 (13) に代入すると，

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{sech}^2 t \mathrm{d}t^2 + \tanh^2 t \mathrm{d}t^2 = \mathrm{d}t^2 \tag{24}$$

となる．したがって，

$$\mathrm{d}s = \mathrm{d}t \tag{25}$$

である．これは双曲面で成り立つ計量とパラメータと同じ関係である．しかし，これはそうなるように定義しているのであるからこの関係が成り立つのは当然である．このように，パラメータ t と計量の関係が明らかになったので，クライン円板における距離が計算できる．

3　クライン円板上の線分の長さ

実空間の長さ l をパラメータ t を用いて表してみよう．直線の方向ベクトル $\mathbf{t}$ は式 (17)，(18) から，

$${}^{\mathrm{t}}\mathbf{t} = \frac{\mathrm{d}\,{}^{\mathrm{t}}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = (-\beta^{-1}\sin\varphi \mathrm{sech}^2 t, \beta^{-1}\cos\varphi \mathrm{sech}^2 t) \tag{26}$$

となるから，直線方向の微小長さ $\mathrm{d}l$ は

$$\mathrm{d}l = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{\beta}\mathrm{sech}^2 t\ \mathrm{d}t \tag{27}$$

と表される．

いま，クライン円板上に直線を考え，その直線上に点 $\mathrm{P}(t_1)$ と点 $\mathrm{Q}(t_2)$ を考えよう．そうすると線分 PQ の実空間の長さ $l(\mathrm{P},\mathrm{Q})$ は

$$l(\mathrm{A},\mathrm{P}) = \int_{\mathrm{P}}^{\mathrm{Q}} \mathrm{d}l = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{\beta}\mathrm{sech}^2 t\ \mathrm{d}t = \frac{1}{\beta}(\tanh t_2 - \tanh t_1) \tag{28}$$

となる．一方，クライン円板上の長さ $d(\mathrm{P},\mathrm{Q})$ は式 (25) からも明らかなように

$$d(\mathrm{P},\mathrm{Q}) = t_2 - t_1 \tag{29}$$

である．$d(\mathrm{P},\mathrm{Q})$ を実空間の長さで表してみよう．線分 PQ を両端から双方向に延長して円周と交わる点を A および B とする．それぞれは $t=-\infty$ と $t=\infty$ に対応する．実空間における長さを簡単のために，AP を a，QB を b，AQ を q，PB を p としよう．そうすると，式 (28) と同じ計算により，

$$a = l(\mathrm{P},\mathrm{Q}) = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{P}} \mathrm{d}l = \int_{-\infty}^{t_1} \frac{1}{\beta}\mathrm{sech}^2 t\ \mathrm{d}t = \frac{1}{\beta}(\tanh t_1 + 1) \tag{30}$$

$$b = l(\mathrm{Q},\mathrm{B}) = \int_{\mathrm{Q}}^{\mathrm{B}} \mathrm{d}l = \int_{t_2}^{\infty} \frac{1}{\beta}\mathrm{sech}^2 t\ \mathrm{d}t = \frac{1}{\beta}(1 - \tanh t_2) \tag{31}$$

$$p = l(\mathrm{P},\mathrm{B}) = \int_{\mathrm{P}}^{\mathrm{B}} \mathrm{d}l = \int_{t_1}^{\infty} \frac{1}{\beta}\mathrm{sech}^2 t\ \mathrm{d}t = \frac{1}{\beta}(1 - \tanh t_1) \tag{32}$$

$$q = l(\mathrm{A},\mathrm{Q}) = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{Q}} \mathrm{d}l = \int_{-\infty}^{t_2} \frac{1}{\beta}\mathrm{sech}^2 t\ \mathrm{d}t = \frac{1}{\beta}(\tanh t_2 + 1) \tag{33}$$

となる．これから pq/ab を計算すると，

$$\begin{aligned}
\frac{pq}{ab} &= \frac{(1-\tanh t_1)(1+\tanh t_2)}{(1+\tanh t_1)(1-\tanh t_2)} = \frac{(1-\tanh t_1)^2(1+\tanh t_2)^2}{(1-\tanh^2 t_1)(1-\tanh^2 t_2)} \\
&= \frac{(1-\tanh t_1)^2(1+\tanh t_2)^2}{\mathrm{sech}^2 t_1\ \mathrm{sech}^2 t_2} = (\cosh t_1 - \sinh t_1)^2(\cosh t_2 + \sinh t_2)^2 \\
&= \mathrm{e}^{-2t_1}\mathrm{e}^{2t_2} = \mathrm{e}^{2(t_2-t_1)}
\end{aligned} \tag{34}$$

となる．この式と式 (29) より，

$$d(\mathrm{P},\mathrm{Q})=\frac{1}{2}\ln\frac{pq}{ab} \tag{35}$$

という関係式が得られる．これはクライン円板における線分の長さと実空間における長さの関係を与える．クライン円板の中心 O からの実空間長さを r とすると，P が O と一致する場合を考えれば良い．すなわち，$a=1$，$p=1$，$b=1-r$，$q=1+r$ となり，

$$d(\mathrm{O},\mathrm{Q})=\frac{1}{2}\ln\frac{1+r}{1-r} \tag{36}$$

となる．この関係式は

$$r=\tanh d(\mathrm{O},\mathrm{Q}) \tag{37}$$

と書き換えることもできる．

4　クライン円板上の角度

双曲面上の直線とクライン円板の直線は第 1 節で述べた両者の関係から実空間の 1 つの平面上にあることがわかる．双曲面の角度の定義は 1 つの点を始点とする半直線のなす角度であって，実空間では始点におけるそれぞれの測地線に対する接線ベクトルの間の角度である．この接線ベクトルはそれぞれの測地線を定義する平面内にあるから，この接線ベクトルに対応するクライン円板上のベクトルも対応する半直線上にある．したがって，クライン円板の角度も対応する 2 つの半直線の間の角度とすることができる．しかし，双曲面の接平面はクライン円板から一般に傾いているために，双曲面の角度とクライン円板の対応する半直線間の角度は一致しない．接平面がクライン円板と平行な場合，つまり，点 (0,0,1) における接平面内に接線ベクトルがある場合にのみ両者の角度は一致する．それ以外は，クライン円板の角度は双曲面の角度よりも大きくなるこれは，双曲面の角度を定義する接平面は z 一定の面から傾いていることと，この角度が双曲面から原点へ向かう直線によって $z=0$ に平行な面へ写像されることのためである．

このように，例外を除いて，クライン円板の角度は実際の角度とも双曲面の角度とも一致しない．したがって，クライン円板の角度を考える場合は，双曲面の角度で考えなければならない．その一つの例として双曲余弦定理を考えてみよう．図のようにクライン円板上の三角形 ABC を考える．角 A を α，頂点 ABC に対向する辺の長さを a，b，c とする．この三角形 ABC に対応して双曲面に三角形 $\mathrm{A'B'C'}$ が存在する．辺の長さは双曲面とクライン円板で両方共同じである．頂点 $\mathrm{A'}$，$\mathrm{B'}$，$\mathrm{C'}$ の位置ベクトルを $\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$，$\mathbf{c}$ とする．$\mathrm{A'}$ における $\mathrm{A'B'}$ 方向の接ベクトルを $\mathbf{u}$，$\mathrm{A'C'}$ 方向の接ベクトルを $\mathbf{v}$ とする．そうすると，$\mathbf{u}$，$\mathbf{v}$ は一葉双曲面の位置ベクトルであるから，まず

$$\langle\mathbf{a},\mathbf{a}\rangle=\langle\mathbf{b},\mathbf{b}\rangle=\langle\mathbf{c},\mathbf{c}\rangle=-1, \tag{38}$$

$$\langle\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle=\langle\mathbf{v},\mathbf{v}\rangle=1, \tag{39}$$

の関係が成り立つ [1]．この $\mathbf{u}$，$\mathbf{v}$ はクライン円板上ではそれぞれ AB, AC 上あるいはその延長上にある．この $\mathbf{u}$，$\mathbf{v}$ を用いて，次のようなベクトル $\mathbf{a}'$ と $\mathbf{b}'$ を考える．

$$\mathbf{b}'=\mathbf{a}+h\mathbf{u},\quad \mathbf{c}'=\mathbf{a}+k\mathbf{v} \tag{40}$$

このとき，h および k は次のように決められる．式の形から $\mathbf{b}'$ は $\mathrm{A'B'}$ を含む平面上にある．このとき，h を $\mathbf{b}'$ が $\mathbf{b}$ と同じ方向になるように選ぶことができる．つまり，$h\mathbf{u}$ は $\mathrm{A'}$ を始点として $\mathbf{u}$ が $\mathrm{OB'}$ と交差するところを終点とするベクトルである.（交差する点が $\mathbf{u}$ よりも短いところにあり，延長上でないことはこの後でわかる.）このように決まる $\mathbf{b}'$ は規格化されていない．正規化したベクトルは二葉双曲面上の点を示す位置ベクトルであるから，この場合は $\mathbf{b}$ である．$\langle\mathbf{a},\ \mathbf{u}\rangle=0$ であるから，$\mathbf{b}'$ の長さは

$$\langle\mathbf{a}',\mathbf{a}'\rangle=\langle\mathbf{a}+h\mathbf{u},\ \mathbf{a}+h\mathbf{u}\rangle=\langle\mathbf{a},\ \mathbf{a}\rangle+2h\langle\mathbf{a},\ \mathbf{u}\rangle+h^2\langle\mathbf{u},\ \mathbf{u}\rangle=-1+h^2 \tag{41}$$

から得られる．$\mathbf{a}'$ は上半回転錘の中にあるから $\langle \mathbf{a}', \mathbf{a}' \rangle < 0$ である．したがって，式 (41) から $0 < h < 1$ でなければならない．$\mathbf{b}'$ を規格化すると $\mathbf{b}$ となるから，以上の結果を用いて結局，

$$\mathbf{b} = \frac{\mathbf{a}'}{\sqrt{1-h^2}} \tag{42}$$

となる．$\mathbf{c}$ についても同様に，

$$\mathbf{c} = \frac{\mathbf{c}'}{\sqrt{1-k^2}} \tag{43}$$

というように定義される．

一方，双曲面の線分の長さと両端の位置ベクトルの関係から [1]，

$$\cosh b = -\langle \mathbf{a},\ \mathbf{c} \rangle = -\frac{1}{\sqrt{1-k^2}} \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} + k\mathbf{v} \rangle = -\frac{1}{\sqrt{1-k^2}} (\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle + k \langle \mathbf{a}, \mathbf{v} \rangle) = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} \tag{44}$$

と表される．同様に，

$$\cosh c = -\langle \mathbf{a},\ \mathbf{b} \rangle = \frac{1}{\sqrt{1-h^2}} \tag{45}$$

である．したがって，式 (44)，(45) から

$$\sinh b = \frac{k}{\sqrt{1-k^2}} \tag{46}$$

$$\sinh c = \frac{h}{\sqrt{1-h^2}} \tag{47}$$

である．$\cos \alpha = \langle \mathbf{u},\ \mathbf{v} \rangle$ であるから，以上の結果を用いて，

$$\begin{aligned} \sinh a &= -\langle \mathbf{b},\ \mathbf{c} \rangle = -\frac{1}{\sqrt{1-h^2}} \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} \langle \mathbf{a} + h\mathbf{u},\ \mathbf{a} + k\mathbf{v} \rangle \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1-h^2}} \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} (-1 + hk \langle \mathbf{u},\ \mathbf{v} \rangle) \\ &= \cosh b \cosh c - \sinh b \sinh c \cos \alpha \end{aligned} \tag{48}$$

という双曲余弦定理が得られる．注意することはこの式に用いられている α が双曲面の接平面におけるベクトル間の角度であって，クライン円板上の半直線間の角度ではないということである．クライン円板モデルでは測地線が実空間の直線によって表すことができるが，原点で交差する 2 つの直線のなす角度を例外として，角度が実際の角度あるいは双曲面の角度と一致しない点がクライン円板モデルの不十分なところである．

5　クライン円板上の円，楕円

クライン円板は等方的であるが，径方向は均一ではなく周辺に向かって単位長さは実空間で短くなり，円周は無限遠になる．ある点からの等距離にある曲線は，それが中心の場合には実空間でも円になるが，中心と異なる場合には長さが実空間では均一でないために楕円になる．これを以下に示しておこう．

クライン円板でも，双曲面でも，対応する点間の距離は同じであるから，双曲面で考えることにする．中心点として，$y = 0$ 面と双曲面の交線上の 1 点 $\mathrm{A}(\mathbf{r}_0)$ を選んでも一般性は失われない．これを

$${}^{t}\mathbf{r}_0 = (\sinh t_0, 0, \cosh t_0) \tag{49}$$

とする [1]．$\mathbf{r}_0$ すなわち A における接平面上にあり，A を中心に 2π 回転する単位ベクトル $\mathbf{u}$ を考える．A から一定の距離 r にある点 $\mathbf{r}$ は

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 \cosh r + \mathbf{u} \sinh r \tag{50}$$

である [1]．この $\mathbf{r}$ の軌跡をクライン円板へ投射した図形を考えればよい．

まず，$\mathbf{u}$ を表すことを考えよう．$\mathbf{u}$ は一葉双曲面上の点の位置ベクトルであるので $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 1$ である．点 A における法線 $\mathbf{n}$ は

$$ {}^{\mathrm{t}}\mathbf{n}_0 = (\sinh t_0, 0, -\cosh t_0) \tag{51} $$

である [1]．一方，$y = 0$ 面の法線 $\mathbf{q}$ は

$$ {}^{\mathrm{t}}\mathbf{q}_0 = (0, -1, 0) \tag{52} $$

である．したがって，$\mathbf{q}$ と $\mathbf{n}$ に垂直な接線ベクトル $\mathbf{u}_0 = \mathbf{q} \times \mathbf{n}$ は，

$$ {}^{\mathrm{t}}\mathbf{u}_0 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -1 & 0 \\ \sinh t_0 & 0 & -\cosh t_0 \end{vmatrix} = (\cosh t_0, 0, \sinh t_0) \tag{53} $$

である．（これは $\mathrm{d}\mathbf{r}/\mathrm{d}t$ としても得られる．）$\mathbf{u}_0$ と直交するもう 1 つの接線ベクトルは $\mathbf{v}_0 = \mathbf{n} \times \mathbf{u}_0$ とすることができて，

$$ {}^{\mathrm{t}}\mathbf{v}_0 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \sinh t_0 & 0 & -\cosh t_0 \\ \cosh t_0 & 0 & \sinh t_0 \end{vmatrix} = (0, -\cosh^2 t_0 - \sinh^2 t_0, 0) \tag{54} $$

$\langle \mathbf{v}_0, bv_0 \rangle = 1$ となるように正規化してこれを改めて $\mathbf{v}_0$ とおくと，

$$ {}^{\mathrm{t}}\mathbf{v}_0 = (0, -1, 0) \tag{55} $$

である．これから，$\mathbf{u}$ は次のように表すことができる．

$$ {}^{\mathrm{t}}\mathbf{u} = {}^{\mathrm{t}}\,\mathbf{u}_0 \cos\varphi + {}^{\mathrm{t}}\,\mathbf{v}_0 \sin\varphi = (\cosh t_0 \cos\varphi,\ -\sin\varphi,\ \sinh t_0 \cos\varphi) \tag{56} $$

したがって，$\mathbf{r}_0$ を中心とする半径 r の円は式 (50) から，

$$ \begin{aligned} {}^{\mathrm{t}}\mathbf{r} &= (x_1, y_1, z_1) \\ &= (\sinh t_0 \cosh r + \cosh t_0 \sinh r \cos\varphi,\ -\sinh r \sin\varphi,\ \cosh t_0 \cosh r + \sinh t_0 \sinh r \cos\varphi) \end{aligned} \tag{57} $$

となる．これから，クライン円板上の座標 (x, y) に変換すると，

$$ x = \frac{x_1}{z_1} = \frac{\sinh t_0 \cosh r + \cosh t_0 \sinh r \cos\varphi}{\cosh t_0 \cosh r + \sinh t_0 \sinh r \cos\varphi} \tag{58} $$

$$ y = \frac{x_1}{z_1} = \frac{-\sinh r \sin\varphi}{\cosh t_0 \cosh r + \sinh t_0 \sinh r \cos\varphi} \tag{59} $$

となるので，この 2 つの式から φ を消去すればよい．あとは少し複雑であるが計算のみである．式 (58) から，

$$ \cos\varphi = \frac{(x \cosh t_0 - \sinh t_0) \cosh r}{(\cosh t_0 - x \sinh t_0) \sinh r} \tag{60} $$

となる．これから $\sin\varphi$ を求めると，

$$ \sin\varphi = \frac{\sqrt{D}}{(\cosh t_0 - x \sinh t_0) \sinh r} \tag{61} $$

となる．ただし，

$$ D = (\cosh t_0 - x \sinh t_0)^2 \sinh^2 r - (x \cosh t_0 - \sinh t_0)^2 \cosh r^2 \tag{62} $$

である．式 (60)，(61) を式 (59) に代入すると，

$$ y \cosh t_0 \cosh r = \frac{-y \sinh t_0 (x \cosh t_0 - \sinh t_0) \cosh r + \sqrt{D}}{\cosh t_0 - x \sinh t_0} \tag{63} $$

となるので，これを整理すると，

$$y \cosh r = \sqrt{D} \tag{64}$$

となるから，この式を平方して D を展開することにより，

$$y^2 \cosh^2 r = -x^2 \cosh(t_0 + r) \cosh(t_0 - r) + x \sinh 2t_0 + \sinh(t_0 + r) \sinh(t_0 - r) \tag{65}$$

となる．すでにこの式は楕円を表す式になっているが，さらに整理して

$$\frac{(x - \lambda \sinh 2t_0)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{66}$$

とすることができる．ただし，

$$a^2 = \lambda^2(\cosh^2 2r - 1) \tag{67}$$

$$b^2 = \frac{\lambda(\cosh^2 2r - 1)}{2\cosh^2 r} \tag{68}$$

$$\lambda = \frac{1}{\cosh 2t_0 + \cosh 2r} \tag{69}$$

である．

参考文献

[1] 2017/2/10 の entry　双曲面幾何　その 2 `http://totoha.web.fc2.com/Hyperboloid_geo_2.pdf`