双曲面幾何 その 2　長さ，三角法，余弦定理

2017.2.9　　鈴木　実

4　測地線の方程式

二葉双曲面の上半曲面を 2 次元空間とする直線は実空間の双曲線である．この双曲線は式 (1) の双曲面と原点 O を通る平面との交線である．この平面は $z = 0$ 面に垂直に立っているところからその面と垂直方向に θ 回転している．このとき，$\theta < \pi/4$ である．この面を設定するにはまず $x = 0$ の面を考え，これを y 軸の回りに θ 回転し，その後 z 軸の回りに φ 回転すればよい．この状態の双曲線の関数を求めよう．

$x = 0$ 平面が y 軸の回りに θ 回転した状態を x 軸方向から見たのが図 1，y 軸方向から見たのが図 2 である．図 2 で，双曲線上の点 A を (x, y, z) とすると，その点が平面上にあるから，

$$z = \frac{1}{\alpha}x \tag{31}$$

という関係が成り立つ．ただし，$\alpha = \tan\theta$ とおいた．ここに式 (1) を再掲する．

$$x^2 + y^2 - z^2 = -1 \tag{1}$$

この式に式 (31) を代入すると，

$$y^2 - \frac{1}{\beta^2}z^2 = -1 \tag{32}$$

となる．ここで，

$$\beta^2 = \frac{1}{1-\alpha^2} = \frac{1}{1-\tan^2\theta} \tag{33}$$

とおいた．この測地線をパラメータ t を用いて表現しよう．$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$ であるから，$y = \sinh t$，$z = \beta\cosh t$ とおけばよいことがわかる．これと式 (31) から，

$$x = \alpha\beta\cosh t \tag{34}$$
$$y = \sinh t \tag{35}$$
$$z = \beta\cosh t \tag{36}$$

となる．これを z 軸の回りに φ 回転すると，

$$x = \alpha\beta\cos\varphi\cosh t - \sin\varphi\sinh t \tag{37}$$
$$y = \alpha\beta\sin\varphi\cosh t + \cos\varphi\sinh t \tag{38}$$
$$z = \beta\cosh t \tag{39}$$

となる．

この双曲面の直線（実空間での双曲線）上に任意の点 A をとり，A の位置を $t = t_1$ で表す．これをベクトル $\mathbf{a}$ で表すと，

$${}^{\mathrm{t}}\mathbf{a} = [\alpha\beta\cos\varphi\cosh t_1 - \sin\varphi\sinh t_1,\ \alpha\beta\sin\varphi\cosh t_1 + \cos\varphi\sinh t_1,\ \beta\cosh t_1] \tag{40}$$

である．一方，点 A における接線ベクトル $\mathbf{u}$ は，

$$\begin{aligned} {}^{\mathrm{t}}\mathbf{u} &= \left[\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right]_{t=t_1} \\ &= [\alpha\beta\cos\varphi\sinh t_1 - \sin\varphi\cosh t_1,\ \alpha\beta\sin\varphi\sinh t_1 + \cos\varphi\cosh t_1,\ \beta\sinh t_1] \end{aligned} \tag{41}$$

と表すことができる．

ここで，$\mathbf{a}$ と $\mathbf{u}$ を用いて $\mathbf{r}$ を次のように表す [1]．

$$\mathbf{r} = \mathbf{a}\cosh t + \mathbf{u}\sinh t \tag{42}$$

そうすると，$\mathbf{r}$ はこの測地線の任意の点を表す．実際，式 (40) および式 (41) を式 (42) に代入すると，簡単な計算により，

$${}^{\mathrm{t}}\mathbf{r} = [\alpha\beta\cos\varphi\cosh(t_1+t) - \sin\varphi\sinh(t_1+t),\ \alpha\beta\sin\varphi\cosh(t_1+t) + \cos\varphi\sinh(t_1+t),\ \beta\cosh(t_1+t)] \tag{43}$$

となる．つまり，この式は式 (37)-(39) のパラメータが t_1+t のときの測地線を示している．すなわち，$\mathbf{r}$ はパラメータ t により測地線の任意の点を表すことができることを示す．

$t_1=0$ のとき，点 A は双曲線の下端に位置する．$t>0$ では式 (42) は A を始点とする半直線を示し，$t<0$ はもう一方の半直線を示す．

5　線分の長さ

式 (37)-(39) で示す直線上に点 A と点 B をとり，それぞれパラメータ t_1 と t_2 で示す．この直線の微小線分の長さ $\mathrm{d}s$ は接線ベクトル $\mathbf{u}$ 方向の微小部分であるから

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s &= ||\mathbf{u}||\mathrm{d}t = \sqrt{\langle\, \mathbf{u}, \mathbf{u}\,\rangle}\mathrm{d}t \\ &= \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2}\mathrm{d}t \\ &= \sqrt{\alpha^2\beta^2\sinh^2 t + \cosh^2 t - \beta^2\sinh^2 t\mathrm{d}t}\end{aligned} \tag{44}$$

となる．ここで，ノルムの計算に双曲面の計量を用いていることに注意を要する．式 (33) の関係を代入すると，

$$\mathrm{d}s = \sqrt{-\sinh^2 t + \cosh^2 t}\mathrm{d}t = \mathrm{d}t \tag{45}$$

という驚くほど簡単な式になってしまう．これから線分 AB の長さ l を計算すると

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}s = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t = |t_2 - t_1| \tag{46}$$

となる．つまり，線分の長さはその位置を表すパラメータ t によって直接表されることがわかる．しかも，このパラメータ t は双曲線の下端で $t=0$ と決まっているので，直線を表す絶対座標の意味を持つ．

一方，A と B の位置ベクトル $\mathbf{a}$ および $\mathbf{b}$ は式 (37)-(39) でそれぞれ $t=t_1$ および $t=t_2$ とおけばよい．これをもとに内積を計算すると，

$$\begin{aligned}\langle\, \mathbf{a}, \mathbf{b}\,\rangle &= \alpha^2\beta^2\cosh t_1\cosh t_2 + \sinh t_1\sinh t_2 - \beta^2\cosh t_1\cosh t_2 \\ &= -\cosh t_1\cosh t_2 + \sinh t_1\sinh t_2 \\ &= -\cosh(t_1 - t_2)\end{aligned} \tag{47}$$

となる．式 (46) を式 (47) に代入すると，

$$\cosh l = -\langle\, \mathbf{a}, \mathbf{b}\,\rangle \tag{48}$$

となる．これにより，直線上の 2 点を示す位置ベクトルの内積は 2 点間の距離で表すことができる．

双曲面の長さには少し奇妙なところがある．双曲面の直線はその上のどこの点をとってもその点を始点に直線は双方向に無限に延長できる．したがって，双曲面の長さはどの部分の単位長さをとっても同一である．ところが，実空間の長さは測る始点をどこにとるかその絶対的な位置に依存する．であるから，双曲面の最下点近くにおける単位長さはパラメータが大きいところの最下点から遠い点における単位長さに比較すれば指数関数的に小さいことになる．こういうところに直感的に考えること，すなわち実空間で考えることの難しさがある．

6 法線

平面はその法線ベクトル $\mathbf{q}$ を用いて

$$\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}=0 \tag{49}$$

という方程式で表される．ここで，

$$\mathbf{p}=\widetilde{G}\mathbf{q} \tag{50}$$

とすると，

$$\langle\,\mathbf{p},\mathbf{r}\,\rangle=0 \tag{51}$$

となり，これも同じ平面を表す双曲面における内積を用いた平面の方程式である．実空間の法線ベクトル $\mathbf{q}$ にたいして，$\mathbf{p}$ は双曲面の計量を用いた法線ベクトルの意味がある．

2 つの異なるベクトル $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ が張る平面への法線を考えよう．この法線ベクトルは $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の外積に比例する．実空間の場合，法線ベクトルを $\mathbf{q}$ とすると，

$$\mathbf{q}=\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\sqrt{\mathbf{a}^2\mathbf{b}^2-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2}} \tag{52}$$

と表すことができる．ここで $\mathbf{q}$ は規格化されており，規格化因子は

$$\begin{aligned}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})&=(a_2b_3-b_2a_3)^2+(a_3b_1-b_3a_1)^2+(a_1b_2-b_1a_2)^2\\&=(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2\end{aligned} \tag{53}$$

という式変形を用いて得られる．

$\mathbf{q}$ に対応する双曲面の計量を用いた法線は，

$$\mathbf{p}=\widetilde{G}\mathbf{q}=\frac{\widetilde{G}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})}{\sqrt{\mathbf{a}^2\mathbf{b}^2-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2}}=\frac{\mathbf{a}*\mathbf{b}}{\sqrt{\mathbf{a}^2\mathbf{b}^2-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2}} \tag{54}$$

と表される．この式は規格化されていないので，これを規格化すると，

$$\mathbf{p}=\frac{\mathbf{a}*\mathbf{b}}{\sqrt{\langle\,\mathbf{a},\mathbf{b}\,\rangle^2-\langle\,\mathbf{a},\mathbf{a}\,\rangle\langle\,\mathbf{b},\mathbf{b}\,\rangle}} \tag{55}$$

となる．ここでも，規格化因子は式 (52) と同様な

$$\begin{aligned}\langle\,\mathbf{a}*\mathbf{b},\mathbf{a}*\mathbf{b}\,\rangle&=(a_2b_3-b_2a_3)^2+(a_3b_1-b_3a_1)^2-(a_1b_2-b_1a_2)^2\\&=-(a_1^2+a_2^2-a_3^2)(b_1^2+b_2^2-b_3^2)+(a_1b_1+a_2b_2-a_3b_3)^2\end{aligned} \tag{56}$$

という関係式を用いれば得られる．式 (55) は双曲面の 2 つの異なるベクトル $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ が張る平面への法線を与える．この場合の法線も，実空間の場合と同じように，$\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ に直交する．

ベクトル $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ が一葉または二葉双曲面上の点の位置ベクトルである場合，$\langle\,\mathbf{a},\mathbf{a}\,\rangle=\langle\,\mathbf{b},\mathbf{b}\,\rangle=\pm1$ であるから，式 (53) は

$$\mathbf{p}=\frac{\mathbf{a}*\mathbf{b}}{\sqrt{\langle\,\mathbf{a},\mathbf{b}\,\rangle^2-1}} \tag{57}$$

となる．

式 (52) で，$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\vartheta$ と表すことができるから，$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\vartheta|$ となり，式 (52) はよく知られた外積の大きさを表す．これと同じように，双曲面の外積ベクトルの場合も，$\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ が双曲面の位置ベクトルの場合には式 (48) から $||\mathbf{a}*\mathbf{b}|| = ||\mathbf{a}||\ ||\mathbf{b}||\sinh l = \sinh l$ となり，式 (52) と式 (55) は外積の形式で実空間と双曲面との間に類似の関係がある．

7　双曲面上の 2 つの直線のなす角

双曲面上の 2 つの直線（測地線）r と s が点 A で交差しているとしよう．それぞれの直線を定めている平面を R と S とする．点 A における直線 r と s の接線ベクトルをそれぞれ $\mathbf{t}_r$ と $\mathbf{t}_s$ とする．このとき，

$$\cos\alpha = \frac{\langle\, \mathbf{t}_r, \mathbf{t}_s\,\rangle}{\sqrt{\langle\, \mathbf{t}_r, \mathbf{t}_r\,\rangle\langle\, \mathbf{t}_s, \mathbf{t}_s\,\rangle}} \tag{58}$$

として直線 r と s のなす角 α を定義する．

$\mathbf{t}_r$ と $\mathbf{t}_s$ は，点 A における双曲面の法線ベクトル $\mathbf{n}$ と平面 R と平面 S の法線ベクトルを用いて表すことができる．平面 R と平面 S の法線ベクトルをそれぞれ $\mathbf{q}_r$ および $\mathbf{q}_s$ とすると，

$$\mathbf{t}_r = \mathbf{n}\times\mathbf{q}_r, \quad \mathbf{t}_s = \mathbf{n}\times\mathbf{q}_s \tag{59}$$

である（ただし，$\mathbf{t}_r$ と $\mathbf{t}_s$ の方向は $\mathbf{q}_r$ および $\mathbf{q}_s$ の方向に依存する）．ここで，$\mathbf{n} = \widetilde{G}\mathbf{a}$，$\mathbf{q}_r = \widetilde{G}\mathbf{p}_r$，$\mathbf{q}_s = \widetilde{G}\mathbf{p}_s$ という関係を用いると，

$$\mathbf{t}_r = -\widetilde{G}(\mathbf{a}\times\mathbf{p}_r) = -\mathbf{a}*\mathbf{p}_r, \quad \mathbf{t}_s = -\widetilde{G}(\mathbf{a}\times\mathbf{p}_s) = -\mathbf{a}*\mathbf{p}_s \tag{60}$$

という関係式を得る．

したがって，点 A で 2 つの直線 r と s のなす角 α は

$$\cos\alpha = \frac{\langle\, \mathbf{a}*\mathbf{p}_r,\ \mathbf{a}*\mathbf{p}_s\,\rangle}{\sqrt{\langle\, \mathbf{a}*\mathbf{p}_r,\ \mathbf{a}*\mathbf{p}_r\,\rangle\langle\, \mathbf{a}*\mathbf{p}_s,\ \mathbf{a}*\mathbf{p}_s\,\rangle}} \tag{61}$$

となる．

8　双曲面三角形

双曲面上の 3 本の直線（測地線）が互いに交差して 3 つの交点をもち，その点をそれぞれ A，B，C とするとき，点 A，B，C で囲まれた図形を双曲面三角形あるいは単に三角形という．双曲面の直線は実空間では曲線であるから，双曲面上に直線あるいは任意の曲線を用いて三角形を構成できるような気がするが，そうではなく，双曲面三角形は 3 本の測地線で作られるということに注意を要する．

双曲面は負の曲率をもっているので，辺上の点よりも頂点が原点から遠くなり，そのため 3 つの角は平面に投射された通常の三角形の角よりも小さくなり，内角の総和は π よりも小さくなることが直感的にわかる．

三角形の頂点 A，B，C の角を A，B，C または α，β，γ とする．各頂点に対向する辺 BC，CA，AB の長さを a，b，c とする．この長さは式 (46) で示されるパラメータで決定する絶対的な長さである．また，頂点 A，B，C の位置ベクトルを $\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$，$\mathbf{c}$ とする．

この三角形の $\cos\alpha$ を計算する．そのために式 (59) により，点 A における法線ベクトル $\mathbf{n}_{\mathrm{A}}$，辺 AB 方向と辺 AC 方向の接線ベクトル $\mathbf{t}_{\mathrm{AB}}$，$\mathbf{t}_{\mathrm{AC}}$ を計算しておこう．

線分 AB が含まれる O を含む平面の法線は $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の外積により求められる．その法線を $\mathbf{q}_{\mathrm{AB}}$ とする．

$$\cos\alpha = \langle\, \mathbf{t}_{\mathrm{AB}}, \mathbf{t}_{\mathrm{AC}} \,\rangle \tag{62}$$

一方，

$$\mathbf{t}_{\mathrm{AB}} = \mathbf{q}_{\mathrm{AB}} \times \mathbf{n}_{\mathrm{A}} = -\widetilde{G}(\mathbf{p}_{\mathrm{AB}} * \mathbf{a}) \tag{63}$$

$$\mathbf{t}_{\mathrm{AC}} = \mathbf{t}_{\mathrm{AC}} = -\mathbf{q}_{\mathrm{CA}} \times \mathbf{n}_{\mathrm{A}} = -\widetilde{G}(\mathbf{p}_{\mathrm{CA}} * \mathbf{a}) \tag{64}$$

となる．$\mathbf{p}_{\mathrm{AB}}$ と $\mathbf{p}_{\mathrm{AC}}$ は式 (57) から，

$$\mathbf{p}_{\mathrm{AB}} = \frac{\mathbf{a} * \mathbf{b}}{\sqrt{\langle\, \mathbf{a}, \mathbf{b} \,\rangle^2 - 1}} \tag{65}$$

$$\mathbf{p}_{\mathrm{CA}} = \frac{\mathbf{c} * \mathbf{a}}{\sqrt{\langle\, \mathbf{c}, \mathbf{a} \,\rangle^2 - 1}} \tag{66}$$

となる．したがって，

$$\begin{aligned}
\cos\alpha &= \langle\, -\widetilde{G}(\mathbf{p}_{\mathrm{AB}} * \mathbf{a}),\ \widetilde{G}(\mathbf{p}_{\mathrm{CA}} * \mathbf{a}) \,\rangle = -\langle\, \mathbf{p}_{\mathrm{AB}} * \mathbf{a},\ \mathbf{p}_{\mathrm{CA}} * \mathbf{a} \,\rangle \\
&= \frac{-\langle\, (\mathbf{a} * \mathbf{b}) * \mathbf{a},\ (\mathbf{c} * \mathbf{a}) * \mathbf{a} \,\rangle}{\sqrt{\langle\, \mathbf{a}, \mathbf{b} \,\rangle^2 - 1}\sqrt{\langle\, \mathbf{c}, \mathbf{a} \,\rangle^2 - 1}}
\end{aligned} \tag{67}$$

となる．ここで，分子を整理すると，

$$\begin{aligned}
-\langle\, (\mathbf{a} * \mathbf{b}) * \mathbf{a},\ (\mathbf{c} * \mathbf{a}) * \mathbf{a} \,\rangle &= -\langle\, \langle\, \mathbf{a}, \mathbf{a} \,\rangle\mathbf{b} - \langle\, \mathbf{a}, \mathbf{b} \,\rangle\mathbf{a},\ \langle\, \mathbf{a}, \mathbf{c} \,\rangle\mathbf{a} - \langle\, \mathbf{a}, \mathbf{a} \,\rangle\mathbf{c} \,\rangle \\
&= -\langle\, -\mathbf{b} - \langle\, \mathbf{a}, \mathbf{b} \,\rangle\mathbf{a},\ \langle\, \mathbf{a}, \mathbf{c} \,\rangle\mathbf{a} + \mathbf{c} \,\rangle \\
&= \langle\, \mathbf{a}, \mathbf{c} \,\rangle\langle\, \mathbf{b}, \mathbf{a} \,\rangle + \langle\, \mathbf{b}, \mathbf{c} \,\rangle + \langle\, \mathbf{a}, \mathbf{b} \,\rangle\langle\, \mathbf{a}, \mathbf{c} \,\rangle\langle\, \mathbf{a}, \mathbf{a} \,\rangle + \langle\, \mathbf{a}, \mathbf{b} \,\rangle\langle\, \mathbf{a}, \mathbf{c} \,\rangle \\
&= \langle\, \mathbf{b}, \mathbf{c} \,\rangle + \langle\, \mathbf{a}, \mathbf{b} \,\rangle\langle\, \mathbf{a}, \mathbf{c} \,\rangle
\end{aligned} \tag{68}$$

となるから，式 (67) は最終的に

$$\cos\alpha = \frac{\langle\, \mathbf{b}, \mathbf{c} \,\rangle + \langle\, \mathbf{a}, \mathbf{b} \,\rangle\langle\, \mathbf{a}, \mathbf{c} \,\rangle}{\sqrt{\langle\, \mathbf{a}, \mathbf{b} \,\rangle^2 - 1}\sqrt{\langle\, \mathbf{c}, \mathbf{a} \,\rangle^2 - 1}} \tag{69}$$

という関係式が得られる．

9　双曲三角形の余弦定理，正弦定理

9.1　双曲余弦定理

式 (69) に式 (48) を適用すると，

$$\cos\alpha = \frac{-\cosh a + \cosh c \cosh b}{\sqrt{\cosh^2 c - 1}\sqrt{\cosh^2 b - 1}} = \frac{-\cosh a + \cosh c \cosh b}{\sinh c \sinh b} \tag{70}$$

となり，少し変形して結局，

$$\cosh a = \cosh b \cosh c - \sinh b \sinh c \cos\alpha \tag{71}$$

という関係式が得られる．A, B, C と α, β, γ および a, b, c を同時に cyclic に変えてもこの関係式は成り立つから，

$$\cosh c = \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b \cos\gamma \tag{72}$$

というよく知られた関係式が成り立つ．これは双曲三角形の余弦定理として知られる．

9.2　双曲正弦定理

まず，一般に

$$\left(\frac{\sinh c}{\sin\gamma}\right)^2 = \frac{\sinh^2 c}{1-\cos^2\gamma} \tag{73}$$

が成り立つ．[1]次に，式 (72) より，

$$\cos^2\gamma = \frac{(\cosh a\cosh b - \cosh c)^2}{(\sinh a\sinh b)^2}. \tag{74}$$

さらに，

$$\begin{aligned}
1-\cos^2\gamma &= \frac{\sinh^2 a\sinh^2 b - (\cosh a\cosh b-\cosh c)^2}{\sinh^2 a\sinh^2 b}\\
&= \frac{(\cosh^2 a-1)(\cosh^2 b-1) - (\cosh a\cosh b-\cosh c)^2}{\sinh^2 a\sinh^2 b}\\
&= \frac{1-(\cosh^2 a+\cosh^2 b+\cosh^2 c)+2\cosh a\cosh b\cosh c}{\sinh^2 a\sinh^2 b}
\end{aligned} \tag{75}$$

となり，この式と式 (73) より，

$$\left(\frac{\sinh c}{\sin\gamma}\right)^2 = \frac{\sinh^2 a\sinh^2 b\sinh^2 c}{1-(\cosh^2 a+\cosh^2 b+\cosh^2 c)+2\cosh a\cosh b\cosh c} \tag{76}$$

となる．式 (72) の場合と同様に変数を cyclic に変えても成り立つことと，右辺が対称であることから，

$$\left(\frac{\sinh a}{\sin\alpha}\right)^2 = \left(\frac{\sinh b}{\sin\beta}\right)^2 = \left(\frac{\sinh c}{\sin\gamma}\right)^2 \tag{77}$$

が成り立つ．$\sin\alpha, \sin\beta, \sin\gamma, \sinh a, \sinh b, \sinh c > 0$ であるから，結局，

$$\frac{\sinh a}{\sin\alpha} = \frac{\sinh b}{\sin\beta} = \frac{\sinh c}{\sin\gamma} \tag{78}$$

という関係式が得られる．この式は双曲正弦定理と呼ばれる．

9.3　双曲第 2 余弦定理

後付け的であるが，$(\cos\alpha\cos\beta+\cos\gamma)/\sin\alpha\sin\beta$ を変形する．これに式 (71) を変形した

$$\cos\alpha = \frac{\cosh b\cosh c - \cosh a}{\sinh b\sinh c}, \tag{79}$$

および，$\cos\beta$, $\cos\gamma$ に関する同様の式と，式 (78) をこれに代入すると，

$$\frac{\cos\alpha\cos\beta+\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\beta} = \frac{(\cosh b\cosh c-\cosh a)(\cosh c\cosh a-\cosh b)+\sinh^2 c(\cosh a\cosh b-\cosh b)}{\sinh^2 a\sinh^2 b\sin^2\gamma} \tag{80}$$

となる．この式の分母は式 (75) より

$$\text{分母} = \sinh^2 a\sinh^2 b\sin^2\gamma = 1-(\cosh^2 a+\cosh^2 b+\cosh^2 c)+2\cosh a\cosh b\cosh c \tag{81}$$

となる．一方，分子は

$$\begin{aligned}
\text{分子} &= (\cosh b\cosh c-\cosh a)(\cosh c\cosh a-\cosh b)+(\cosh^2 c-1)(\cosh a\cosh b-\cosh b)\\
&= [1-(\cosh^2 a+\cosh^2 b+\cosh^2 c)+2\cosh a\cosh b\cosh c]\cosh c
\end{aligned} \tag{82}$$

[1]以下は文献 [2] を参照した．

と変形できるので，結局，次の関係式を得る．

$$\cosh c = \frac{\cos\alpha\cos\beta + \cos\gamma}{\sin\alpha\sin\beta} \tag{83}$$

この式は双曲第 2 余弦定理と呼ばれる．

参考文献

[1] 岡田幾太郎, 「双曲幾何における極三角形」, 近畿大学九州工学部研究報告, **28**, pp.89-07 (2000).
`http://ci.nii.ac.jp/naid/110001020496`

[2] 中川仁,「エッシャーの数学」, 平成 26 年度 上越教育大学公開講座資料
`http://www.juen.ac.jp/math/nakagawa/openh26escher.pdf`