双曲面幾何 その１　線分，直線（測地線），角度

2017.2.8　　鈴木　実

1　はじめに

2 次元イジングモデルの厳密解を記述した Onsager [1] や Kaufman [2] の論文を読むと，双曲関数の余弦定理が出てくる．この余弦定理は双曲幾何における三角法で導かれる．双曲幾何は非ユークリッド幾何であり，同じ非ユークリッド幾何の球面幾何と比較すると，直観的に把握することは少し大変である．双曲幾何について調べてみるとわかるように，ほとんどの場合ポアンカレ円盤をもとに双曲関数余弦定理が得られている．ポアンカレ円盤も双曲幾何を構成する空間の一つとは言え，しかし，回転双曲面が出てこないと，双曲幾何であることが直感的に意識されないような気がする．つまりあまりわかった気がしない．そこで，回転双曲面から出発して双曲幾何になることを整理しておくことにする．

2　回転双曲面の計量と内積，距離，直線

同じ非ユークリッド幾何の球面幾何は球面を空間とする幾何である．そこで，双曲幾何の出発点として，球面と同じようにわかりやすい回転双曲面を考えることにしよう．具体的には

$$x^2 + y^2 - z^2 = -1 \tag{1}$$

で決まる 2 つ曲面（二葉双曲面）のうち，$z > 0$ の双曲面を考える．この双曲面の上に 2 次元空間の幾何を構成することになる．一方，$x^2 + y^2 - z^2 = 1$ は同じく z 軸のまわりの回転面を表し，一葉双曲面という．

幾何が成立するためには，以下ユークリッド幾何の公準 [3] を満たす必要である．

1. 2 点を結ぶ線分が唯 1 つ存在する．
2. 線分はどちらの方向にも無限に延長できる．
3. 任意の点を中心として任意の半径の円を描くことができる．
4. 直角は全て等しい．
5. 2 本の直線に 1 つの直線が交差して 2 分するとき，2 本の直線は内角の和が二直角よりも小さい側で交差する．

5' 1 つの直線に対し，その上にない 1 つの点を通りこの直線と交わらない直線（平行な直線）は唯 1 つしかない（平行線公準）．

双曲面の上で幾何が成立するためには，上のユークリッド幾何の公準 [3] に準ずる公準を満たす必要である．

ここで線分，直線，直角という概念が出てくる．この 3 つの概念を定義するためには内積が定義されていなければならない．内積が定義されればノルムすなわち長さが定義され，角度が定義される．長さが定義されれば，線分は 2 点を結ぶ最短の経路として定義される．直線はその中の任意の部分が線分であればよい．つまり，空間であるためには通常の空間と同じように内積が定義されていなければならない．

ベクトルを $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の内積 $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle$ はユークリッド空間である実空間で次のように定義される．

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \tag{2}$$

a_i，b_i ($i = 1, 2, 3$ は x, y, z に対応) は各座標成分である．ノルム $||\mathbf{a}||$ は

$$||\mathbf{a}|| = \sqrt{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}} = \sqrt{\mathbf{a}^2} \tag{3}$$

となり，ベクトル $\mathbf{a}$ の長さである．

微小長さ $\mathrm{d}s$ のベクトル $\mathrm{d}\mathbf{r}^{\mathrm{t}} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z)$ を考えよう．そうすると，

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 \tag{4}$$

である．この ds を用いると，2 点 $\mathbf{r}_1$ と $\mathbf{r}_2$ の距離 L は

$$L = \int_{C_{12}} \mathrm{d}s \tag{5}$$

の経路積分になる．このとき，L が最小になる経路が 2 点を結ぶ線分になる．式 (4) をこの曲面空間の計量 (metric) という．計量がその空間の長さを決定し，したがって直線を決定する．双曲面のように空間が曲がっている場合の直線を測地線という．

それでは，式 (1) の回転双曲面の場合を考えてみよう．(回転双曲面には，z 軸を回転軸とした場合に，$z^2 > x^2 + y^2$ の二葉双曲面と $z^2 < x^2 + y^2$ の一葉双曲面があるが，ここでは二葉双曲面の上半面を考える．) 計量としてユークリッド幾何の式 (4) を適用した場合を考える．この場合は通常の距離と同じであるから，式 (1) の曲面上の 2 点を選びそれを結ぶ線分を考えると，その線分は 2 点をゴム糸で結んだ曲線がそれに対応することになる．これを両端のそれぞれの方向に延長するとその曲線は 2 点における 2 本の法線を含む平面と回転双曲面の交線になる，ということが直感的にわかる．

これをもう少し定量的に考えてみよう．いま，双曲面上の異なる 2 点 A と B を考え，それぞれ ${}^{\mathrm{t}}\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ および ${}^{\mathrm{t}}\mathbf{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ とする．この 2 点以外の双曲面上の点 X をとり，これを ${}^{\mathrm{t}}\mathbf{r} = (x, y, z)$ として，A と B からの距離をそれぞれ $d(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)$ および $d(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2)$ とする．簡単のために，$d(\mathbf{r}_1, \mathbf{r})^2 + d(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2)^2$ が最小になる点を探してみよう．これは $d(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}) = d(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2)$ のときには $d(\mathbf{r}_1, \mathbf{r})^2 + d(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2)^2$ が最小になる点と $d(\mathbf{r}_1, \mathbf{r})^2 + d(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2)^2$ が最小になる点は一致する．ラグランジュの未定係数法により，

$$S = (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2 + (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2 + \lambda(x^2 + y^2 - z^2 + 1) \tag{6}$$

とすると，$\partial S/\partial x = \partial S/\partial y = \partial S/\partial z = \partial S/\partial \lambda = 0$ から，$\mathbf{r}$ が満たすべき条件は

$$\frac{(x_1 + x_2)/2 - x}{x} = \frac{(y_1 + y_2)/2 - y}{y} = \frac{(z_1 + z_2)/2 - z}{-z} = \lambda \tag{7}$$

となる．この式の意味するところは，双曲面上の点で，AB の中点 M から X を結ぶベクトルと，原点 O から X の $z = 0$ 面に関する対称点 D へのベクトルが平行な点が上記の条件を満たすということである．これを幾何的に表現すると，目的の点 X は双曲面上にあり，z 軸上の 1 点 C と M と X が直線上にあり，MCO が M を頂点とする二等辺三角形になっている場合が X のある位置を示す．そのとき，CX と OD は平行になって上の式の条件を満たす．この X は点 CAB で決定される平面と双曲面との交線上にある．この点は同様の手法で連続的に決めることができて，それが点 AB を結ぶ線分になり，その延長が AB 通る測地線になる．線分 CM の傾きが 1 より小さい時にはこの測地線は楕円になり，1 より大きい時には双曲線になる．この 2 種類を測地線とすると，上のような条件を満たす 2 つの楕円，あるいは楕円と双曲線は 2 点で交差することが可能であることがわかる．このことは，2 点を結ぶ線分が 2 本あることを意味する．これは幾何の公準 1 と矛盾している．つ

まり，式 (1) の計量を用いた場合には回転双曲面上で幾何が構成できないことを意味する．したがって，双曲幾何を構成するためには別の計量を考える必要があるということになる．

一般に内積は，

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = (\widetilde{G}\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \widetilde{G}\mathbf{b} = \sum_{i,j=1}^{3} g_{ij} a_i b_j \tag{8}$$

と書かれる．g_{ij} は対称な計量テンソル $\widetilde{G}$ の成分である．ユークリッド幾何の場合，

$$\widetilde{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{9}$$

であり，式 (2) と一致する．

双曲面の適切な計量テンソルを考える前に，比較のために球面幾何の計量テンソルを考えてみよう．球面幾何では式 (1) の代わりに

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \tag{10}$$

で表される球面が 2 次元空間として用いられ，対応する計量テンソルには式 (10) に対して自然な式 (9) が用いられる．そこで，式 (1) に合わせて次のような計量テンソルを考えてみよう．(これは回転双曲面の 2 次元非ユークリッド幾何で使われる計量である．)

$$\widetilde{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{11}$$

そうすると，式 (4) に対応する計量は

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2 \tag{12}$$

となる．

この計量を用いた場合に測地線は何になるか前の場合と同じように考えてみよう． 回転双曲面上の点 ${}^{\mathrm{t}}\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ と点 ${}^{\mathrm{t}}\mathbf{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ の距離 $d(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ は

$$d(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - (z_1 - z_2)^2 \tag{13}$$

という関係式で表される．この式は双曲面の上に制限されていることに注意を要する．これは実際の空間の距離と違うので，この空間の直線すなわち測地線を直感的に推測するのは難しいが，距離の長短は xy 方向よりも z 方向が短いということがわかる．そこで，実際の直線（測地線）はどのようなものであるか具体的に考えてみよう．いま，双曲面上の任意の点 ${}^{\mathrm{t}}\mathbf{r} = (x, y, z)$ を考える．点 $\mathbf{r}$ が点 $\mathbf{r}_1$ と点 $\mathbf{r}_2$ を結ぶ線分上にあるときに $d(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}) + d(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2)$ は最小になり，$d(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}) = d(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2)$ のときには $d(\mathbf{r}_1, \mathbf{r})^2 + d(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2)^2$ も最小になる．そこで，簡単のために $d(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}) + d(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2)$ が最小になる条件を見てみよう．$\mathbf{r}$ が式 (1) を満たしているときに $d(\mathbf{r}_1, \mathbf{r})^2 + d(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2)^2$ が最小になるのはラグランジュの未定係数法から

$$S = (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 - (z_1 - z)^2 + (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 - (z - z_2)^2 + \lambda(x^2 + y^2 - z^2 + 1) \tag{14}$$

が最小になるときである．つまり，$\partial S/\partial x = \partial S/\partial y = \partial S/\partial z = \partial S/\partial \lambda = 0$ から，$\mathbf{r}$ が満たすべき条件は

$$\frac{(x_1 + x_2)/2 - x}{x} + \frac{(y_1 + y_2)/2 - y}{y} + \frac{(z_1 + z_2)/2 - z}{z} = \lambda \tag{15}$$

となる．この式から，

$$\frac{x_1 + x_2}{2} - x : \frac{y_1 + y_2}{2} - y : \frac{z_1 + z_2}{2} - z = x : y : z \tag{16}$$

が成り立つ．この式が意味するのはベクトル $(\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2)/2-\mathbf{r}$ とベクトル $\mathbf{r}$ が平行であるということである．つまり，$(\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2)/2$，$\mathbf{r}$，および原点 O は 1 直線上にある．すなわち，$\mathbf{r}_1$，$\mathbf{r}_2$，$\mathbf{r}$，および原点 O は 1 つの平面上にあり，この平面と式 (1) の回転双曲面との交線と，$\mathbf{r_1}$ と $\mathbf{r_2}$ の中点と原点を結ぶ直線の交点が点 $\mathbf{r}$ であるということがわかる．$\mathbf{r_1}$ と $\mathbf{r}$ の中点を考えれば同様にして原点を結ぶ直線と回転双曲面との交点が測地線上の点であることがわかる．このようにして，回転双曲面において式 (11) の計量テンソルすなわち式 (12) の計量を用いた時の 2 次元距離空間の直線は原点を含む平面と回転双曲面との交線として得られる双曲線であることがわかる．

このように定義された双曲面の直線は 1 つより多い交点で交わることはない．また，2 点間の線分も 1 通りに定義される．さらに，1 点を通る直線はあらゆる角度の方向に無限に伸びることができるから，任意の点において任意の半径の円を描くことができる．

1 つの測地線 h とその上にない 1 つの点 A を考えてみよう．測地線は原点を通る 1 つの平面で決定されるから，h には 1 つの決まった平面が対応する．一方，他にも O と A を含む平面が存在して，h とその平面は 1 本のユークリッド直線上で交差する．もし，この直線が双曲平面と交わらなければ 2 つの測地線はこの双曲面上では交差しないことになる．O と A を通り h との交線が双曲平面と交わらない平面は OA を軸に連続に回転可能であるから，h に平行で A を通る測地線は無限に多く存在することがわかる．これはユークリッド公準の 5 番目の項目を満たさない．したがって，式 (11) の計量で構成される双曲平面の幾何は非ユークリッド幾何である．

3　回転双曲面における外積と角度

次に角度について考えてみよう．その前に，前節で定義した内積に随伴する外積を定義しておこう．外積，すなわちベクトル積はベクトルの回転に用いる．通常，2 つのベクトルの外積はもとのベクトルに直角すなわちユークリッド空間の内積が 0 になるので，ここで新たに定義する外積は，それを構成する 2 つのベクトルのおのおのと式 (11) を用いる内積を作ったときに 0 になるようにしておくことが必要である．${}^t\mathbf{a}=(a_1,a_2,a_3)$，${}^t\mathbf{b}=(b_1,b_2,b_3)$ とすると，内積は式 (11) の計量テンソル $\widetilde{G}$ を用いて

$$\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle=\mathbf{a}\cdot\widetilde{G}\mathbf{b}=a_1b_1+a_2b_2-a_3b_3 \tag{17}$$

となる．

いま，ベクトル $\mathbf{a}$ とベクトル $\mathbf{b}$ のユークリッド幾何のベクトル積，すなわち通常の外積を作り，これとベクトル $\mathbf{a}$ およびベクトル $\mathbf{b}$ の内積を考えてみる．ユークリッド内積では行列表示の方法から 0 となることが簡単にわかる．一方，双曲幾何の内積の場合，

$$(\mathbf{a},\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & -a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \tag{18}$$

となり，0 にはならない．$(\mathbf{b},\mathbf{a}\times\mathbf{b})$ の場合も同様である．通常のベクトル積のように，$\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ が $\mathbf{a}$ および $\mathbf{b}$ に垂直であるためには，双曲面の外積の定義を少し変える必要がある．

上のような不都合を取り除くためには，少し考えれば，双曲面の外積を次のように定義すればよいことがわかる．すなわち，$\mathbf{a}*\mathbf{b}$ で双曲面の外積（ベクトル積）を表すことにすると，

$$\mathbf{a}*\mathbf{b}=\widetilde{G}(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) \tag{19}$$

とすればよいことがわかる．この表記は岡田の論文 [4] に倣った．双曲面の外積を $\mathbf{a}*\mathbf{b}$ のように表して通常のユークリッド空間の外積の表記 $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ と区別した．$\widetilde{G}$ は内積の定義で用いた計量テンソルである．この定義は

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\widetilde{G}(\mathbf{a}*\mathbf{b}) \tag{20}$$

とも書くことができる．この外積は $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ を x, y, z 軸方向の単位ベクトルとすると，

$$\mathbf{a} * \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & -\mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \tag{21}$$

と表すことができる．この定義を用いれば外積を作るベクトルの間の直交関係は保存されることがわかる．すなわち，

$$(\mathbf{a}, \mathbf{a} * \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \mathbf{a} * \mathbf{a}) = 0 \tag{22}$$

となることが式 (16) のような行列式表示から明らかである．

岡田の論文 [4] に従い，内積，外積の性質および補題を以下にまとめる．

$$[1]\quad \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle,\ \langle \lambda\mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \lambda \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle,\ \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} + \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle + \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle \tag{23}$$

$$[2]\quad \mathbf{a} * \mathbf{b} = -\mathbf{b} * \mathbf{a},\ (\lambda\mathbf{a}) * \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} * \mathbf{b}),\ \mathbf{a} * (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} * \mathbf{b} + \mathbf{a} * \mathbf{c} \tag{24}$$

$$[3]\quad \langle \mathbf{a} * \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = |\mathbf{abc}|, \tag{25}$$

$$[4]\quad \langle \mathbf{a} * \mathbf{b}, \mathbf{c} * \mathbf{d} \rangle = -\langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle \langle \mathbf{b}, \mathbf{d} \rangle + \langle \mathbf{a}, \mathbf{d} \rangle \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle \tag{26}$$

$$[5]\quad \mathbf{a} * (\mathbf{b} * \mathbf{c}) = -\langle \mathbf{a} * \mathbf{c} \rangle \mathbf{b} + \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \mathbf{c} \tag{27}$$

二葉双曲面を Q，上半二葉双曲面を Q^+，下半二葉双曲面を Q^-，一葉双曲面を P とする．$\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = 0$ なら，$\mathbf{a}$ は漸近線の回転面上にある．$\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = -1$ なら，$\mathbf{a}$ は Q の上にある．$\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = 1$ なら，$\mathbf{a}$ は P の上にある．$\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle < -1$ なら，$\mathbf{a}$ は上下の回転錐体の中にある．$\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle > 1$ なら，$\mathbf{a}$ はそれ以外の横の回転体の中にある．ベクトルの傾きが 1 より大きいとき，すなわち $|z/r| > 1 (r^2 = x^2 + y^2)$ なら $\mathbf{a}$ は上下の回転錐体の中にある．ベクトルの傾きが 1 より小さいとき，すなわち $|z/r| < 1$ なら $\mathbf{a}$ は横の回転体の中にある．

補題 1 $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle < 0$，$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 0$ なら $\langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle > 0$ となる $\mathbf{b}$ が存在する．

$\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle < 0$ であるから，$\mathbf{a}$ は上下の回転錐体の中にある．したがって，$\mathbf{a}$ と直交するベクトルは O を通り $\mathbf{a}$ と直交する平面上にあり，この平面は必ず横の回転体と交差する．この平面上で横の回転体の中にある点を選び，その位置ベクトルを $\mathbf{b}'$ とすると $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}' = 0$ である．ここで，$\mathbf{b} = \widetilde{G}\mathbf{b}'$ とすると，$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 0$ となる．かつ，$\mathbf{b}$ は $\mathbf{b}'$ と $z = 0$ 面に関して対称位置にあり傾きは変わらないから横の回転体の中にあり，$\langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle > 0$ である．

補題 2 $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle > 0$ なら，$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 0$，$\langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle < 0$ となる $\mathbf{b}$ が存在する．

これは補題 1 の逆で，$\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle > 0$ であるから，$\mathbf{a}$ は横の回転体の中にある．$\mathbf{a}$ と直交するベクトルは O を通り $\mathbf{a}$ と直交する平面上にあり，この平面は必ず上下の回転錐体と交差する．この平面上にありかつ上下の回転錐体の中の点を選び，その位置ベクトルを $\mathbf{b}'$ とすると $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}' = 0$ である．ここで，$\mathbf{b} = \widetilde{G}\mathbf{b}'$ とすると，$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 0$ となる．かつ，$\mathbf{b}$ は $\mathbf{b}'$ と $z = 0$ 面に関して対称位置にあり傾きは変わらないから上下の回転錐体の中にあり，$\langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle < 0$ である．

補題 3 $\mathbf{a} * \mathbf{b} = 0$ なら $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ は 1 次従属である．逆も成り立つ．

$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \widetilde{G}(\mathbf{a} * \mathbf{b}) = 0$．したがって，$\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ は 1 次従属である．$\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ が 1 次従属なら，$\mathbf{a} * \mathbf{b} = \widetilde{G}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$．

補題 4 A, B の位置ベクトルを $\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$ とする．A, B が Q^+（二葉双曲面の上半面）上の異なる 2 点ならば $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle < -1$ である．

Q は上に凹（曲率が負）であるから，$(\mathbf{a} + \mathbf{b})/2$ は Q の上側にある．したがって，

$$\langle \tfrac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b}), \tfrac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \rangle < -1.$$

これから

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle + 2\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle < -4.$$

A, B は Q 上にあるから，$\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle = -1$ したがって，上の式が成り立つ．

補題 5 $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = -1$，$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 1$，$\langle \mathbf{a}, \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{v} \rangle = 0$ ならば $-1 \leqslant \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \leqslant 1$ が成り立つ．

まず，$\mathbf{a}$ は Q 上に，$\mathbf{u}$ と $\mathbf{v}$ は P 上にある．いま，

$$f = x^2 + y^2 - z^2 \tag{28}$$

という関数を考えると，$f = 1$ の面の規格化しない法線 $\mathbf{n}$ は，

$$\mathbf{n} = \operatorname{grad} f =^{\mathrm{t}} [x, y, -z] \tag{29}$$

である．$\mathbf{a}^{\mathrm{t}} = (x, y, z)$ とすると，上の式から，$\mathbf{n} = \widetilde{G}\mathbf{a}$ であることがわかる．したがって，$\langle \mathbf{a}, \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{v} \rangle = 0$ から $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0$ が成り立つ．これは，$\mathbf{u}$ と $\mathbf{v}$ が点 A における Q の接平面内にあることを意味する．この接平面と平行で O を通る平面と P との交線は楕円になる（図省略）．したがって，$\mathbf{u}$ と $\mathbf{v}$ は O を始点とするするベクトルで終点はこの楕円上にある．楕円上の点は

$$\begin{aligned} x &= a \cos\theta \\ y &= \sin\theta \\ z &= b \cos\theta \end{aligned}$$

と表すことができるので，$\mathbf{u}$ を θ_1，$\mathbf{v}$ を θ_2 で表すと，

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle &= a^2 \cos\theta_1 \cos\theta_2 + \sin\theta_1 \sin\theta_2 - b^2 \cos\theta_1 \cos\theta_2 \\ &= (a^2 - b^2) \cos\theta_1 \cos\theta_2 + \sin\theta_1 \cos\theta_2 \end{aligned}$$

となる．楕円は P 上にあるから，$a^2 - b^2 = 1$ である．したがって，

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \cos\theta_1 \cos\theta_2 + \sin\theta_1 \cos\theta_2 = \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

となる．これから

$$-1 \leqslant \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \leqslant 1 \tag{30}$$

が成り立つことがわかる．

実際の $\mathbf{u}$ と $\mathbf{v}$ のなす角度は必ずしも $\theta_1 - \theta_2$ とは一致しない．図示すれば明らかなように，$\mathbf{n}$ の $z = 0$ 面への射影の方向が $\theta = 0$ の方向で，$\mathbf{u}$，$\mathbf{v}$ が $|\theta| < \pi/2$ では $\theta = 0$ からの角度が $|\theta|$ よりも小さくなり，$|\theta| > \pi/2$ では $|\theta|$ よりも大きくなる．両者が一致するのは，$z_1 z_2 = 0$ および $|\theta_1 - \theta_2| = \pi$ のときのみである．つまり，双曲面の直線が交差してなす実空間の角度は双曲面の内積が表す角度と異なる．

（続く）

参考文献

[1] Lars Onsager, “Crystal Statitics. I. A Two-Dimensional Model with an Order-Disorder Transition”, Phys. Rev. **65**, 117-149 (1944).

[2] Bruria Kaufman, “Crystal Statistics. II. Partition Function Evaluated by Spinor Analysis”, Phys. Rev. **76**, 1232-1243 (1949).

[3] J. W. Cannon, W. J. Floyd, R. Kenyon, and W. R. Parry, “Hyperbolic Geometry”, Flavors of Germany, MSRI Publications, **31**, 59-115 (1997).
`https://www.math.brown.edu/~rkenyon/papers/cannon.pdf`

[4] 岡田幾太郎, 「双曲幾何における極三角形」, 近畿大学九州工学部研究報告, **28**, pp.89-07 (2000).
`http://ci.nii.ac.jp/naid/110001020496`