

エルミート補間の一般公式 (Generalized Hermite interpolation)

2016.5.30 鈴木 実

1 はじめに

スプライン補間 (Spline interpolation) では接続点で補間多項式が滑らかになるように複数の点を結ぶのに対し、エルミート補間 (Hermite interpolation) では、データ点とデータ点における傾きも用いて、補間する全領域で1つの補間関数が与えられるので、より精度の高い補間が可能である。したがって、データ点数が少なく高精度な補間が必要な場合にはエルミート補間は有用である。通常はデータ点とその点の傾き、すなわち関数値と1次微分値が用いられる。

一般化したエルミート補間では、各データ点における高階の微分係数値に対し、高次の補間多項式が与えられ補間に用いられる。しかし、エルミート補間の一般的な補間式は簡単には見いだせない。3次補間式や5次補間式の特別な例はネットで見出すことができるが、一般的な補間式を知らない場合確認することも難しい。筆者の見出した A. Spitzbart が著した論文 [1] ではこの公式を導いているので、それをできるだけ詳細に補足しながらメモしておこう。ただし、結果の式は正しいが、証明は示唆的であるものの誤っている。そこで証明は最初に筆者が考えた方法を示し、その後で Spitzbart の方法を略記し、問題点の所在と理由を明らかにしておく。

2 エルミート補間

点 $(x_i, f_i), i = 0, \dots, n$ を通り、各点における傾きが $(x_i, f_i^{(1)})$ である最低次 $(2n + 1)$ の多項式は次のエルミート補間公式 (Hermite interpolation) で与えられる¹。

$$f(x) = \sum_{i=0}^n h_{i0}(x) f_i + \sum_{i=0}^n h_{i1}(x) f_i^{(1)} \quad (1)$$

ただし、

$$h_{i0}(x) = p_i(x) \left[\frac{1}{p_i(x_i)} - (x - x_i) \frac{p_i^{(1)}(x_i)}{[p_i(x_i)]^2} \right] \quad (2)$$

$$h_{i1}(x) = (x - x_i) \frac{p_i(x)}{p_i(x_i)} \quad (3)$$

$$p_i(x) = (x - x_0)^2 (x - x_1)^2 \cdots (x - x_{i-1})^2 (x - x_{i+1})^2 \cdots (x - x_n)^2 \quad (4)$$

である。

エルミート補間公式が式 (1) のように表されることは、式 (2) と (3) に $x = x_j$ を代入することにより、

$$h_{i0}(x_j) = \delta_{ij}, \quad h_{i1}(x_j) = 0 \quad (5)$$

かつ、

$$h_{i0}^{(1)}(x_j) = 0, \quad h_{i1}^{(1)}(x_j) = \delta_{ij} \quad (6)$$

が成り立つことがすぐわかるので、これを用いると、式 (1) および式 (1) の1階微分係数に $x = x_i$ を代入することにより、

$$f(x_i) = f_i, \quad f^{(1)}(x_i) = f_i^{(1)} \quad (7)$$

となることがすぐわかる。したがって、式 (1) は $2n + 1$ 次の多項式でありエルミート補間公式である。

¹Spitzbart の論文ではこの部分に因数 2 が欠けている誤りが 2 箇所ある。

3 エルミート補間の一般公式

記号は Spitzbart の論文と可能なかぎり同じにする。

本文で可能な範囲で微分可能な関数 $f(x)$ が、点 x_0, x_1, \dots, x_n において、以下の関数値が与えられているとする。なお、 $f(x)$ の n 階の微分係数は $f^{(n)}(x)$ のように表す。

$$\begin{array}{cccccccc}
 x_0 & f_0 & f_0^{(1)} & f_0^{(2)} & \cdots & f_0^{(r_0)} & & \\
 x_1 & f_1 & f_1^{(1)} & f_1^{(2)} & \cdots & \cdots & \cdots & f_1^{(r_1)} \\
 x_2 & f_2 & f_2^{(1)} & f_2^{(2)} & \cdots & \cdots & f_2^{(r_2)} & \\
 x_3 & f_3 & f_3^{(1)} & f_3^{(2)} & \cdots & \cdots & f_3^{(r_3)} & \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & \\
 x_n & f_n & f_n^{(1)} & f_n^{(2)} & \cdots & \cdots & \cdots & f_n^{(r_n)}
 \end{array} \tag{8}$$

r_i ($i = 0, \dots, n$) は必ずしも等しくない。そのとき、 $f^{(j)}(x_i) = f_i^{(j)}$, $i = 0, 1, \dots, n$; $j = 0, 1, \dots, r_i$ となる最低次の多項式 $f(x)$ は次のように表される。

$$f(x) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{r_i} A_{ij}(x) f_i^{(j)} \tag{9}$$

ただし、

$$A_{ij}(x) = p_i(x) \frac{(x - x_i)^j}{j!} \sum_{k=0}^{r_i-j} \frac{1}{k!} (x - x_i)^k g_i^{(k)}(x_i) \tag{10}$$

$$p_i(x) = (x - x_0)^{r_0+1} (x - x_1)^{r_1+1} \cdots (x - x_{i-1})^{r_{i-1}+1} (x - x_{i+1})^{r_{i+1}+1} \cdots (x - x_n)^{r_n+1} \tag{11}$$

$$g_i(x) = [p_i(x)]^{-1} \tag{12}$$

である。この多項式 $f(x)$ の次数 N は

$$N = \sum_{i=0}^n (r_i + 1) - 1 = \sum_{i=0}^n r_i + n \tag{13}$$

である。

式 (9), (10) で $r_i = 1, i = 0, 1, \dots, n$ とすると、式 (1) - (3) に一致することがわかる。すなわち、式 (9), (10) は一般化されたエルミート補間公式である。

4 証明

式 (9) が成り立つことを証明するには、

$$f^{(j)}(x_i) = f_i^{(j)}, \quad i = 0, 1, \dots, n; j = 0, 1, \dots, r_i \tag{14}$$

が成り立つことを示せばよい。つまり、これが成り立てば N 次の多項式は一義的に決まる。そのためには、式 (9) において、 $s \leq r_i$ のときに、

$$A_{kj}^{(s)}(x_i) = \delta_{k,i} \delta_{s,j} \tag{15}$$

であることを示せばよい。 $s \leq r_i$ に限るということに注意が必要である。

$s \leq j$ の場合は簡単である。まず、式 (10) の中の $p_i(x)$ の形から、明らかに

$$A_{i0}(x_k) = \frac{p_k(x_i)}{p_i(x_i)} = \delta_{i,k} \tag{16}$$

である.

微分係数に関しては, 最初に $s \leq j$ の場合を考えよう. $s \leq r_i$ であれば ($j \leq r_i$ であるから当然成り立つ), $k \neq i$ であるすべての $p_k(x)$ に関して, 式 (11) よりその微分係数 $p_k^{(s)}(x)$ は少なくとも $(x - x_i)$ の 1 次以上の因子を含むから,

$$p_k^{(s)}(x_i) = 0 \quad (17)$$

となることがわかる.

$k = i$ の場合, $s < j$ なら, 式 (10) より $A_{ij}^{(s)}(x)$ は少なくとも $(x - x_i)$ の 1 次以上の因子を含むから, $A_{ij}^{(s)}(x_i) = 0$ である. $s = j$ なら, $x = x_i$ を代入したときには $k = 0$ のときの $(x - x_i)$ の 0 次の項のみ残るから,

$$A_{ij}^{(s)}(x) = p_i(x_i)g_i(x_i) = \frac{p_i(x_i)}{p_i(x_i)} = 1 \quad (18)$$

である.

以上で, 式 (15) の $k = i$ かつ $s > j$ の部分以外は示された. 残された部分は必ずしも自明ではない. そこで, $k = i$ および $s > j$ の場合を具体的に書き下してみよう. ライブニッツの公式を用いると, $A_{ij}(x)$ の s 階微分は

$$A_{ij}^{(s)}(x) = \frac{1}{j!} \sum_{k=0}^{r_i-j} \frac{1}{k!} \sum_{l=0}^s \binom{s}{s-l} p_i^{(s-l)}(x) \frac{(j+k)!}{(j+k-l)!} (x-x_i)^{j+k-l} g_i^{(k)}(x_i) \quad (19)$$

となる. したがって, $j+m = s$ ($m > 1$) とし, $x = x_i$ を代入すると,

$$\begin{aligned} A_{ij}^{(s)}(x_i) &= \frac{1}{j!} \sum_{k=0}^{r_i-j} \frac{1}{k!} \binom{s}{m-k} p_i^{(m-k)}(x_i) \frac{(j+k)!}{0!} g_i^{(k)}(x_i) \\ &= \frac{1}{j!} \frac{1}{0!} \binom{s}{m} p_i^{(m)}(x_i) j! g_i^{(0)}(x_i) \\ &\quad + \frac{1}{j!} \frac{1}{1!} \binom{s}{m-1} p_i^{(m-1)}(x_i) (j+1)! g_i^{(1)}(x_i) \\ &\quad + \frac{1}{j!} \frac{1}{2!} \binom{s}{m-2} p_i^{(m-2)}(x_i) (j+2)! g_i^{(2)}(x_i) \\ &\quad \vdots \\ &\quad + \frac{1}{j!} \frac{1}{(m-2)!} \binom{s}{2} p_i^{(2)}(x_i) (j+m-2)! g_i^{(m-2)}(x_i) \\ &\quad + \frac{1}{j!} \frac{1}{(m-1)!} \binom{s}{1} p_i^{(1)}(x_i) (j+m-1)! g_i^{(m-1)}(x_i) \\ &\quad + \frac{1}{j!} \frac{1}{m!} \binom{s}{0} p_i^{(0)}(x_i) (j+m)! g_i^{(m)}(x_i) \end{aligned} \quad (20)$$

となる。ここで係数を整理すると、

$$\begin{aligned}
A_{ij}^{(s)}(x_i) &= \frac{1}{j!} \frac{(j+m)!}{m!} p_i^{(m)}(x_i) g_i^{(0)}(x_i) \\
&+ \frac{1}{j!} \frac{1}{1!} \frac{(j+m)!}{(m-1)!} p_i^{(m-1)}(x_i) g_i^{(1)}(x_i) \\
&+ \frac{1}{j!} \frac{1}{2!} \frac{(j+m)!}{(m-2)!} p_i^{(m-2)}(x_i) g_i^{(2)}(x_i) \\
&\quad \vdots \\
&+ \frac{1}{j!} \frac{1}{(m-2)!} \frac{(j+m)!}{2!} p_i^{(2)}(x_i) g_i^{(m-2)}(x_i) \\
&+ \frac{1}{j!} \frac{1}{(m-1)!} \frac{(j+m)!}{1!} p_i^{(1)}(x_i) g_i^{(m-1)}(x_i) \\
&+ \frac{1}{j!} \frac{1}{m!} \frac{(j+m)!}{0!} p_i^{(0)}(x_i) g_i^{(m)}(x_i) \\
&= \frac{(j+m)!}{j!m!} \sum_{t=0}^m \binom{m}{t} p_i^{(m-t)}(x_i) g_i^{(t)}(x_i) \\
&= \binom{j+m}{j} \frac{d^t}{dx^t} [p_i(x) g_i(x)]_{x=x_i} \\
&= \binom{j+m}{j} \frac{d^t}{dx^t} \left[p_i(x) \frac{1}{p_i(x)} \right]_{x=x_i} \\
&= \binom{j+m}{j} \frac{d^t}{dx^t} [1] \\
&= 0
\end{aligned}$$

となり、式 (18) と合わせて結局、

$$A_{ij}^{(s)}(x) = \delta_{s,j} \quad (21)$$

となり、式 (15) が成り立つのである。したがって、式 (14) が示され、式 (9)、式 (10) は一般化されたエルミート補間式であることが証明されるのである。

5 Spitzbart 論文での証明と問題点

ここで Spitzbart 論文 [1] の証明を最初に紹介し、その後でこの証明の問題点をあげる。記号は添字を除き同じにしてある。

この論文では式 (9)、式 (10) を以下のように示している。式 (9)、式 (10) が成り立つためには、

$$A_{kj}^{(s)}(x_i) = 0, \quad k \neq i, \quad A_{ij}^{(s)}(x_i) = \delta_{s,j} \quad (22)$$

でなければならない。\$A_{ij}(x)\$ は \$n + \sum_{i=0}^n r_i\$ 次の多項式である。式 (22) から

$$A_{ij}(x_i) = p_i(x)(x-x_i)^j R_{ij}(x) \quad (23)$$

という形になる。ここで、\$R_{ij}(x)\$ は \$r_i - j\$ 次の多項式である。\$S_{ij}(x) = (x-x_i)^j\$、\$g_i(x) = [p_i(x)]^{-1}\$ とすると、式 (23) は

$$S_{ij}(x)R_{ij}(x) = A_{ij}(x_i)g_i(x) \quad (24)$$

と書くことができる。

$$S_{ij}^{(j+t)} = \begin{cases} j! & t=0 \\ 0 & t>0 \end{cases} \quad (25)$$

であることに注意して，式 (24) を $j+t$ 回微分すると，

$$\sum_{l=0}^j \binom{j+t}{l} S_{ij}^{(l)}(x) R_{ij}^{(j+t-l)}(x) = \sum_{l=0}^{j+t} \binom{j+t}{l} A_{ij}^{(l)}(x) g_i^{(j+t-l)}(x) \quad (26)$$

である．これに $x = x_i$ を代入し， $s = 0, 1, \dots, j-1$ で $S_{ij}^{(s)} = 0$ であることと，式 (22) を用いると，

$$\binom{j+t}{j} j! R_{ij}^{(t)}(x_i) = \binom{j+t}{j} g_i^{(t)}(x_i) \quad (27)$$

が成り立つ．したがって，

$$R_{ij}^{(t)}(x_i) = \frac{1}{j!} g_i^{(t)}(x_i) \quad (28)$$

となる．これを用いることにより， $R_{ij}(x)$ は $r_i - j$ 次の多項式であるから次のようにテイラー展開できる．

$$R_{ij}(x) = \frac{1}{j!} \sum_{k=0}^{r_i-j} \frac{1}{k!} g_i^{(k)}(x_i) (x - x_i)^k \quad (29)$$

これを式 (23) に代入すれば式 (10) が得られる，というのが Spitzbart の論文である．

上の証明で問題となるのは，式 (23) が式 (22) の必要条件にはなることが示されていないことである．式 (23) において，式 (22) が成り立つのは， $s \leq r_i$ および $s \leq j$ の場合で， $j < s < r_i$ の場合は必ずしも自明ではなく，証明にはそれが示されていない．しかし，式 (26) を導く際にそれを用いている．ここが論理的に証明になっていないとみなされる点である．結果の式は正しいが，証明は誤っている．

6 一般化されたエルミート補間公式はどのように導かれるか

式 (10) がどのような考えで導かれるのか．これを示さないと気持ちのおさまりが悪い．これを示すには，式 (23) で， s が j よりも大きくても式 (22) の第 2 式が成り立つ式を導けばよい．そこで，最初に次のような恒等式を考えよう．この恒等式は $s > j$ のときに必ず成り立つ．

$$\frac{d^s}{dx^s} \left[p_i(x) (x - x_i)^j \frac{1}{p_i(x)} \right] = 0 \quad (30)$$

したがって，式 (23) の R_{ij} は上の式を微分した式で $1/p_i(x)$ に由来する部分に $x = x_i$ を代入して形作ることができると考えられる．具体的に，式 (30) の左辺の $s = j+m$ 回微分を計算してみよう． $g_i(x) = [p_i(x)]^{-1}$ とし，ライプニッツの公式を用いると，

$$\begin{aligned} \frac{d^s}{dx^s} p_i(x) (x - x_i)^j g_i(x) &= \sum_{k=0}^s \binom{s}{k} p_i^{(s-k)}(x) \frac{d^k}{dx^k} [(x - x_i)^j g_i(x)] \\ &= \sum_{k=0}^s \binom{s}{k} p_i^{(s-k)}(x) \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} \frac{j!}{(j-r)!} (x - x_i)^{j-r} g_i^{(k-r)}(x) \\ &= \sum_{k=0}^s \sum_{r=0}^k p_i^{(s-k)}(x) \frac{s!}{(s-k)! r! (k-r)!} \frac{j!}{(j-r)!} (x - x_i)^{j-r} g_i^{(k-r)}(x) \end{aligned} \quad (31)$$

となる．ここで， $g_i^{(k-r)}(x)$ に $x = x_i$ を代入して多項式にしよう． $x = x_i$ を代入したとき 0 にならないのは $j-r=0$ のときのみである．したがってまた， $k \geq j$ でなければならぬ． $j-r=0$ の項を取り出し，さらに， $k-j=l$ において新しい整数変数 l を導入する．そうすると，前式は，

$$\begin{aligned} \text{式 (31)} &= \sum_{k=j}^s p_i^{(s-k)}(x) \frac{s!}{(s-k)! (k-j)!} g_i^{(k-j)}(x_i) \\ &= \sum_{l=0}^m p_i^{(m-l)}(x) \frac{(j+m)!}{(m-l)! l!} g_i^{(l)}(x_i) \end{aligned} \quad (32)$$

となる。しかし、このままでは微分の階数が項毎に異なるのでこれを揃えるためには、 $x = x_i$ を代入したときに $p_i^{(m-l)}(x_i)$ となるが、微分は l に依存しない次のような形に変形したい。

$$\frac{d^m}{dx^m} [p_i(x)(x - x_i)^l]_{x=x_i} \quad (33)$$

すなわち、

$$\frac{d^m}{dx^m} [p_i(x)(x - x_i)^l] = \sum_{t=0}^m \binom{m}{t} p_i^{(m-t)}(x) \frac{l!}{(l-t)!} (x - x_i)^{l-t} \quad (34)$$

となるが、 $x = x_i$ を代入して残る項は $t = l$ の場合のみ、したがって、 $x = x_i$ のとき、

$$\frac{d^m}{dx^m} [p_i(x)(x - x_i)^l] = \binom{m}{l} p_i^{(m-l)}(x) \frac{l!}{0!} = \frac{m!}{(m-l)!} p_i^{(m-l)}(x) \quad (35)$$

が残る。これを式 (32) に代入すると、 $x = x_i$ のとき、

$$\begin{aligned} \text{式 (32)} &= \sum_{l=0}^m \frac{(j+m)!}{m!} \frac{d^m}{dx^m} [p_i(x)(x - x_i)^l] \frac{1}{l!} g_i^{(l)}(x_i) \\ &= \frac{(j+m)!}{m!} \frac{d^m}{dx^m} \left[p_i(x) \sum_{l=0}^m \frac{1}{l!} (x - x_i)^l g_i^{(l)}(x_i) \right] \end{aligned} \quad (36)$$

となる。したがって、式 (23) の R_{ij} に相当する多項式としては定数係数を除いて、

$$\sum_{l=0}^m \frac{1}{l!} (x - x_i)^l g_i^{(l)}(x_i) \quad (37)$$

のような形を考えればよいということになる。

参考文献

[1] A. Spitzbart, "A generalization of Hermite's interpolation formula", The American Mathematics Monthly, vol. **67**, pp.42-46 (1960).

https://www.jstor.org/stable/2308924?seq=1#page_scan_tab_contents

<http://www.jstor.org/stable/2308924>