「エルミート補間の一般公式」に関する補遺

2016.6.30　　鈴木　実

1　はじめに

以前のエントリー「エルミート補間の一般公式」[1] に関して，Spitzbart の論文 [2] で，証明の推論に不十分な点があって，それが示されない限り誤りであると書いた．しかし，式自体は正しいので，推論の不十分な点を補っておけば論文としては問題がなくなる．ここでは，論文の不十分なところをもう一度示し，論理的に不十分な点を補うことにする．

2　推論の問題部分

Spitzbart 論文の第 3 節，一般公式の証明の問題の部分を以下に示す．式 (1) から式 (4) の部分である．

$n+1$ 個の点 x_0–x_n における関数値 $f_i^{(0)}$ $(i=0,1,\cdots,n)$ と微係数値 $f_i^{(r)}$ $(r=1,\cdots,r_i)$ を有するエントリー補間多項式 $f(x)$ は次式で与えられる．

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{r_i}A_{ij}(x)f_i^{(j)} \tag{1}$$

式 (1) が成り立つためには，

$$A_{ij}^{(s)}(x_j)=0,\quad i\neq j,\quad A_{ij}^{(s)}(x_i)=\delta_{sj} \tag{2}$$

でなければならない．$A_{ij}(x)$ は $n+\sum_{i=0}^{n}r_i$ 次の多項式である．

式 (2) から

$$A_{ij}(x_i)=p_i(x)(x-x_i)^jR_{ij}(x) \tag{3}$$

という形になる．ここで，$R_{ij}(x)$ は r_i-j 次の多項式である．また，$p(x)$ は

$$p_i(x)=(x-x_0)^{r_0+1}(x-x_1)^{r_1+1}\cdots(x-x_{i-1})^{r_{i-1}+1}(x-x_{i+1})^{r_{i+1}+1}\cdots(x-x_n)^{r_n+1} \tag{4}$$

と表される関数である．

以上が問題の部分である．もし，式 (3) が式 (2) を満足するなら，なんら問題はない．ところが，これは s の部分的な範囲においては必ずしも自明ではない．それを示さないといけないが，論文ではまるで自明のように書いている．そこの部分を吟味してみよう．

まず，微分の階数はエルミート補間の前提から $s\leq r_i$ として差し支えない．したがって，$p_i(x)$ の関数の形から $i\neq j$ の場合は式 (2) の第 1 式は成り立つ．同様に，$s<j$ の場合，s 回の微分後も $(x-x_i)$ 因子は残るから式 (2) の第 2 式は成り立つ．しかし，$sgeqj$ の場合は必ずしも自明ではない．そこで，$sgeqj$ の場合も式 (2) の第 2 式は成り立つことを示しておこう．より正しく言えば，式 (2) の第 2 式が成り立つように多項式 $R_{ij}(x)$ を決定することができる，ということである．

$s=j$ のとき，

$$A_{ij}^{(j)}(x_i)=j!p_i(x_i)R_{ij}(x_i) \tag{5}$$

となる．

$j < s \leq r_i$ のとき，ライプニッツの公式から，

$$A_{ij}^{(s)}(x_i) = j!\binom{s}{j}\sum_{t=0}^{s-j}\binom{s-j}{t}p_i^{(s-j-t)}(x_i)R_{ij}^{(t)}(x_i) \tag{6}$$

となる．$s-j-t$ はたかだか $r_i - j$ である．$p_i^{(s-j-t)}(x_i)$ は 0 でないと考えて良い．(0 ならそのまま成り立つことになる．) s の範囲は $j+1$ から r_i までである．式 (2) が成り立つためには，式 (5) の右辺が 1 となり，式 (6) の右辺が 0 とならなければならない．つまり，条件式としては，

$$j!p_i(x_i)R_{ij}(x_i) = 1 \tag{7}$$

$$j!\binom{s}{j}\sum_{t=0}^{s-j}\binom{s-j}{t}p_i^{(s-j-t)}(x_i)R_{ij}^{(t)}(x_i) = 0, \quad (s = j+1, \cdots, r_i) \tag{8}$$

となる．これは全部で $r_i - j + 1$ 個の条件である．したがって，$R_{ij}(x)$ は $r_i - j$ 次の多項式であるから，この条件を満たすように $r_i - j + 1$ 個の係数を一義的に決定することができる．つまり，このように決定した $R_{ij}(x)$ を用いれば式 (2) の第 2 式が成り立つことがわかる．したがって，このように決定した $R_{ij}(x)$ が，論文の残りの部分の推論によって決定された $R_{ij}(x)$ と矛盾がなければ正しい．実際には，矛盾がなく，論文としては正しい結果になっている．ということは，式 (5) と式 (6) を解くことにより，$R_{ij}(x)$ が解けることになる．実際，式 (5) から，

$$R_{ij}^{(0)}(x_i) = \frac{1}{j!}\frac{1}{p_i(x_i)} = \frac{1}{j!}g_i(x_i) \tag{9}$$

が得られる．次に，$s = j+1$ の場合に式 (5) から，

$$p_i^{(1)}(x_i)R_{ij}^{(0)}(x_i) + p_i^{(0)}(x_i)R_{ij}^{(1)}(x_i) = 0 \tag{10}$$

この式に式 (8) を用いると，

$$R_{ij}^{(1)}(x_i) = -\frac{1}{j!}\frac{p_i^{(1)}(x_i)}{[p_i^{(0)}(x_i)]^2} = \frac{1}{j!}g_i^{(1)}(x_i) \tag{11}$$

となる．$s = j+2$ の場合にも同様に，

$$R_{ij}^{(2)}(x_i) = \frac{1}{j!}g_i^{(2)}(x_i) \tag{12}$$

の関係が得られる．したがって，式 (5) と式 (6) のみで十分であるが，Spitzbart の論文 [2] の解法のほうがはるかにエレガントである．ただし，推論の過程として上記の部分について言及がないので，そこの部分が問題である．ここの部分は注意が必要だったので補遺としてメモしておく．

参考文献

[1] 「エルミート補間の一般公式 (Generalized Hermite interpolation) 2016/5/30」の式 (9).
[2] A. Spitzbart, “A generalization of Hermite’s interpolation formula”, The American Mathematics Monthly, vol.**67**, pp.42–46 (1960).

`https://www.jstor.org/stable/2308924?seq=1#page_scan_tab_contents`
`http://www.jstor.org/stable/2308924`