5 次エルミート補間多項式

2016.6.30　　鈴木　実

1　はじめに

3 点における関数値とその微分係数の値が与えられている場合のエルミート補間公式は 5 次多項式である．ここでは 5 次エルミート補間多項式の係数を具体的に求めておこう．

2　5 次エルミート補間多項式の係数

3 点 (x_0, x_1, x_2) における関数値 $f_i^{(0)}$，および微分係数値 $f_i^{(1)}$ が与えられている場合，エルミート補間公式は 5 次多項式である．これをニュートン形式で記述すると，

$$\begin{aligned} f(x) &= [x_0] \\ &\quad + [x_0x_0](x-x_0) \\ &\quad + [x_0x_0x_1](x-x_0)^2 \\ &\quad + [x_0x_0x_1x_1](x-x_0)^2(x-x_1) \\ &\quad + [x_0x_0x_1x_1x_2](x-x_0)^2(x-x_1)^2 \\ &\quad + [x_0x_0x_1x_1x_2x_2](x-x_0)^2(x-x_1)^2(x-x_2) \end{aligned} \tag{1}$$

である [1]．$f_i^{(0)}$，および $f_i^{(1)}$ はそれぞれ 0 次および 1 次の差分商に一致する．

$$[x_0] = f_0^{(0)}, \quad [x_1] = f_1^{(0)}, \quad [x_2] = f_2^{(0)}, \tag{2}$$

$$[x_0x_0] = f_0^{(1)}, \quad [x_1x_1] = f_1^{(1)}, \quad [x_2x_2] = f_2^{(1)} \tag{3}$$

高次の差分商は一般に

$$[\overbrace{x_0\cdots x_0}^{r_0+1}\cdots\overbrace{x_n\cdots x_n}^{r_n+1}] = \sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{r_i}\frac{1}{k!}\frac{1}{(r_i-k)!}g_i^{(r_i-k)}(x_i)f_i^{(k)} \tag{4}$$

と表される [2]．ただし，$g_i(x) = [p_i(x)]^{-1}$ で，

$$p_i(x) = (x-x_0)^{r_0+1}\cdots(x-x_{i-1})^{r_{i-1}+1}(x-x_{i+1})^{r_{i+1}+1}\cdots(x-x_n)^{r_n+1} \tag{5}$$

である．これを式 (1) の差分商に適用すると，

$$\begin{aligned} [x_0x_0x_1x_1x_2x_2] &= g_0^{(1)}(x_0)f_0^{(0)} + g_0^{(0)}(x_0)f_0^{(1)} \\ &\quad + g_1^{(1)}(x_1)f_1^{(0)} + g_1^{(1)}(x_1)f_1^{(1)} \\ &\quad + g_2^{(1)}(x_2)f_2^{(0)} + g_2^{(2)}(x_2)f_2^{(1)} \end{aligned} \tag{6}$$

である．ただし，

$$\begin{aligned} g_0^{(0)}(x_0) &= \frac{1}{(x_0-x_1)^2(x_0-x_2)^2}, \quad g_0^{(1)}(x_0) = -\frac{2(2x_0-x_1-x_2)}{(x_0-x_1)^3(x_0-x_2)^3}, \\ g_1^{(0)}(x_1) &= \frac{1}{(x_1-x_0)^2(x_1-x_2)^2}, \quad g_1^{(1)}(x_1) = -\frac{2(2x_1-x_0-x_2)}{(x_1-x_0)^3(x_1-x_2)^3}, \\ g_2^{(0)}(x_2) &= \frac{1}{(x_2-x_0)^2(x_2-x_1)^2}, \quad g_2^{(1)}(x_2) = -\frac{2(2x_2-x_0-x_1)}{(x_2-x_0)^3(x_2-x_1)^3} \end{aligned} \tag{7}$$

である．$g_i(x)$ は式 (5) の差分商に対する関数である．以下も同様である．式 (1) の他の差分商に関しても同様に計算すると，

$$\begin{aligned}[x_0x_0x_1x_1x_2] &= g_0^{(1)}(x_0)f_0^{(0)} + g_0^{(0)}(x_0)f_0^{(1)} \\ &+ g_1^{(1)}(x_1)f_1^{(0)} + g_1^{(1)}(x_1)f_1^{(1)} \\ &+ g_2^{(0)}(x_2)f_2^{(0)} \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} g_0^{(0)}(x_0) &= \frac{1}{(x_0-x_1)^2(x_0-x_2)}, \quad g_0^{(1)}(x_0) = -\frac{3x_0-x_1-2x_2}{(x_0-x_1)^3(x_0-x_2)^2}, \\ g_1^{(0)}(x_1) &= \frac{1}{(x_1-x_0)^2(x_1-x_2)}, \quad g_1^{(1)}(x_1) = -\frac{3x_1-x_0-2x_2}{(x_1-x_0)^3(x_1-x_2)^2}, \\ g_2^{(0)}(x_2) &= \frac{1}{(x_2-x_0)^2(x_2-x_1)^2} \end{aligned} \tag{9}$$

$$[x_0x_0x_1x_1] = g_0^{(1)}(x_0)f_0^{(0)} + g_0^{(0)}(x_0)f_0^{(1)} + g_1^{(1)}(x_1)f_1^{(0)} + g_1^{(0)}(x_1)f_1^{(1)} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} g_0^{(0)}(x_0) &= \frac{1}{(x_0-x_1)^2}, \quad g_0^{(1)}(x_0) = -\frac{2}{(x_0-x_1)^3}, \\ g_1^{(0)}(x_1) &= \frac{1}{(x_1-x_0)^2}, \quad g_1^{(1)}(x_1) = -\frac{2}{(x_1-x_0)^3} \end{aligned} \tag{11}$$

$$[x_0x_0x_1] = g_0^{(1)}(x_0)f_0^{(0)} + g_0^{(0)}(x_0)f_0^{(1)} + g_1^{(0)}(x_1)f_1^{(0)} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} g_0^{(0)}(x_0) &= \frac{1}{x_0-x_1}, \quad g_0^{(1)}(x_0) = -\frac{1}{(x_0-x_1)^2}, \\ g_1^{(0)}(x_1) &= \frac{1}{(x_1-x_0)^2} \end{aligned} \tag{13}$$

$$[x_0x_0] = f_0^{(1)} \tag{14}$$

$$[x_0] = f_0^{(0)} \tag{15}$$

のようになる．

一般的には以上であるが，ここで，x_i を等間隔として，$x_2 - x_1 = x_1 - x_0 = h$，かつ $x - x1 = y$ とすると，補間多項式 (1) はもう少し簡単になる．まず，

$$\begin{aligned} (x-x_0) &= y+h \\ (x-x_0)^2 &= (y+h)^2 = y^2+2hy+h^2 \\ (x-x_0)^2(x-x_1) &= (y+h)^2y = y^3+2hy^2+h^2y \\ (x-x_0)^2(x-x_1)^2 &= (y+h)^2y^2 = y^4+2hy^3+h^2y^2 \\ (x-x_0)^2(x-x_1)^2(x-x_2) &= (y+h)^2y^2(y-h) = y^5+hy^4-h^2y^3-h^3y^2 \end{aligned} \tag{16}$$

である．

差分商に関しては，

$$
\begin{aligned}
[x_0x_0x_1x_1x_2x_2] &= -\frac{2(2x_0-x_1-x_2)}{(x_0-x_1)^3(x_0-x_2)^3}f_0^{(0)} + \frac{1}{(x_0-x_1)^2(x_0-x_2)^2}f_0^{(1)} \\
&\quad - \frac{2(2x_1-x_0-x_2)}{(x_1-x_0)^3(x_1-x_2)^3}f_1^{(0)} + \frac{1}{(x_1-x_0)^2(x_1-x_2)^2}f_1^{(1)} \\
&\quad - \frac{2(2x_2-x_0-x_1)}{(x_2-x_0)^3(x_2-x_1)^3}f_2^{(0)} + \frac{1}{(x_2-x_0)^2(x_2-x_1)^2}f_2^{(1)} \\
&= \frac{3}{4h^5}f_0^{(0)} + \frac{1}{4h^4}f_0^{(1)} + \frac{1}{h^4}f_1^{(1)} - \frac{3}{4h^5}f_2^{(0)} + \frac{1}{4h^4}f_2^{(1)} \\
&= \frac{1}{4h^5}(3f_0^{(0)} + 4hf_0^{(1)} + 4hf_1^{(1)} - 3f_2^{(0)} + hf_2^{(1)}) \qquad (17)
\end{aligned}
$$

である．同様にして，以下の式が得られる．

$$
\begin{aligned}
[x_0x_0x_1x_1x_2] &= -\frac{3x_0-x_1-2x_2}{(x_0-x_1)^3(x_0-x_2)^2}f_0^{(0)} + \frac{1}{(x_0-x_1)^2(x_0-x_2)}f_0^{(1)} \\
&\quad - \frac{3x_1-x_0-2x_2}{(x_1-x_0)^3(x_1-x_2)^2}f_1^{(0)} + \frac{1}{(x_1-x_0)^2(x_1-x_2)}f_1^{(1)} \\
&\quad + \frac{1}{(x_2-x_0)^2(x_2-x_1)^2}f_2^{(0)} \\
&= -\frac{5}{4h^4}f_0^{(0)} - \frac{1}{2h^3}f_0^{(1)} + \frac{1}{h^4}f_1^{(0)} - \frac{1}{h^3}f_1^{(1)} + \frac{1}{4h^4}f_2^{(0)} \\
&= \frac{1}{4h^4}(-5f_0^{(0)} - 2hf_0^{(1)} + 4f_1^{(0)} - 4hf_1^{(1)} + f_2^{(0)}) \qquad (18)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[x_0x_0x_1x_1] &= -\frac{2}{(x_0-x_1)^3}f_0^{(0)} + \frac{1}{(x_0-x_1)^2}f_0^{(1)} - \frac{2}{(x_1-x_0)^3}f_1^{(0)} + \frac{1}{(x_1-x_0)^2}f_1^{(1)} \\
&= \frac{2}{h^2}f_0^{(0)} + \frac{1}{h^2}f_0^{(1)} - \frac{2}{h^3}f_1^{(0)} + \frac{1}{h^2}f_1^{(1)} \\
&= \frac{1}{h^3}(2f_0^{(0)} + hf_0^{(1)} - 2f_1^{(0)} + hf_1^{(1)}) \qquad (19)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[x_0x_0x_1] &= -\frac{1}{(x_0-x_1)^2}f_0^{(0)} + \frac{1}{x_0-x_1}f_0^{(1)} + \frac{1}{(x_1-x_0)^2}f_1^{(0)} \\
&= -\frac{1}{h^2}f_0^{(0)} - \frac{1}{h}f_0^{(1)} + \frac{1}{h^2}f_1^{(0)} \\
&= \frac{1}{h^2}(-f_0^{(0)} - hf_0^{(1)} + f_1^{(0)}) \qquad (20)
\end{aligned}
$$

$$[x_0x_0] = f_0^{(1)} \qquad (21)$$

$$[x_0] = f_0^{(0)} \qquad (22)$$

以上の式 (16) から式 (22) を式 (1) に代入し，y の冪乗の係数を a_0–a_5 とすると，

$$
\begin{aligned}
f(x) &= a_5y^5 + a_4y^4 + a_3y^3 + a_2y^2 + a_1y + a_0 \\
&= \frac{1}{4h^5}(3f_0^{(0)} + hf_0^{(1)} + 4hf_1^{(1)} - 3f_2^{(0)} + hf_2^{(1)})(y^5 + hy^4 - h^2y^3 - h^3y^2) \\
&\quad + \frac{1}{4h^4}(-5f_0^{(0)} - 2hf_0^{(1)} + 4f_1^{(0)} - 4hf_1^{(1)} + f_2^{(0)})(y^4 + 2hy^3 + h^2y^2) \\
&\quad + \frac{1}{h^3}(2f_0^{(0)} + hf_0^{(1)} - 2f_1^{(0)} + hf_1^{(1)})(y^3 + 2hy^2 + h^2y) \\
&\quad + \frac{1}{h^2}(-f_0^{(0)} - hf_0^{(1)} + f_1^{(0)})(y^2 + 2hy + h^2) \\
&\quad + \frac{1}{h^2}f_0^{(1)}(y + h) \\
&\quad + f_0^{(0)} \qquad (23)
\end{aligned}
$$

であるから，それぞれの係数は，

$$a_5 = \frac{1}{4h^5}(3f_0^{(0)} + hf_0^{(1)} + 4hf_1^{(1)} - 3f_2^{(0)} + hf_2^{(1)}) \tag{24}$$

$$\begin{aligned} a_4 &= \frac{1}{4h^4}(3f_0^{(0)} + hf_0^{(1)} + 4hf_1^{(1)} - 3f_2^{(0)} + hf_2^{(1)}) \\ &\quad + \frac{1}{4h^4}(-5f_0^{(0)} - 2hf_0^{(1)} + 4f_1^{(0)} - 4hf_1^{(1)} + f_2^{(0)}) \\ &= \frac{1}{4h^4}(-2f_0^{(0)} - hf_0^{(1)} + 4f_1^{(0)} - 2f_2^{(0)} + hf_2^{(1)}) \end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned} a_3 &= -\frac{1}{4h^3}(3f_0^{(0)} + hf_0^{(1)} + 4hf_1^{(1)} - 3f_2^{(0)} + hf_2^{(1)}) \\ &\quad + \frac{2}{4h^3}(-5f_0^{(0)} - 2hf_0^{(1)} + 4f_1^{(0)} - 4hf_1^{(1)} + f_2^{(0)}) \\ &\quad + \frac{1}{h^3}(2f_0^{(0)} + hf_0^{(1)} - 2f_1^{(0)} + hf_1^{(1)}) \\ &= \frac{1}{4h^3}(-5f_0^{(0)} - hf_0^{(1)} - 8hf_1^{(1)} + 5f_2^{(0)} - hf_2^{(1)}) \end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned} a_2 &= -\frac{1}{4h^2}(3f_0^{(0)} + hf_0^{(1)} + 4hf_1^{(1)} - 3f_2^{(0)} + hf_2^{(1)}) \\ &\quad + \frac{1}{4h^2}(-5f_0^{(0)} - 2hf_0^{(1)} + 4f_1^{(0)} - 4hf_1^{(1)} + f_2^{(0)}) \\ &\quad + \frac{2}{h^2}(2f_0^{(0)} + hf_0^{(1)} - 2f_1^{(0)} + hf_1^{(1)}) \\ &\quad + \frac{1}{h^2}(-f_0^{(0)} - hf_0^{(1)} + f_1^{(0)}) \\ &= \frac{1}{4h^2}(4f_0^{(0)} + hf_0^{(1)} - 8f_1^{(0)} + 4f_2^{(0)} - hf_2^{(1)}) \end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{h}(2f_0^{(0)} + hf_0^{(1)} - 2f_1^{(0)} + hf_1^{(1)}) \\ &\quad + \frac{2}{h}(-f_0^{(0)} - hf_0^{(1)} + f_1^{(0)}) \\ &\quad + f_0^{(1)} \\ &= f_1^{(1)} \end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned} a_0 &= (-f_0^{(0)} - hf_0^{(1)} + f_1^{(0)}) + hf_0^{(1)} + f_0^{(0)} \\ &= f_1^{(0)} \end{aligned} \tag{29}$$

となる．

参考文献

[1] 「差分商を用いたエルミート補間多項式の表現（ニュートン形式）2016/5/17」の式 (1).

[2] 「エルミート補間の一般公式におけるルジャンドル形式とニュートン形式 2016/6/12」の式 (9).