エルミート補間多項式

2016.6.29　　鈴木　実

1　はじめに

エルミート補間は，通常，$n+1$ 個の点における関数値とその微分係数の値が与えられている場合を前提とした補間法である．その場合のエルミート補間多項式の導出をメモしておく．一般的には多項式の係数に関する $2n+2$ 元連立方程式を解けば良いが，ここでは Spitzbart の論文 [1] と同じ方法によりエルミート補間多項式の具体的な式を導こう．

2　エルミート補間多項式の導出

$n+1$ 個の点 $x=x_0, x_1, \cdots, x_n$ における関数値 $f_i^{(0)}$ を通り，1 階微分係数 $f_i^{(1)}$ を有するエルミート補間多項式 (Hermite interpolation polynomial) は

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \{A_{i0}(x) f_i^{(0)} + A_{i1}(x) f_i^{(1)}\} \tag{1}$$

と書くことができる．すなわち，

$$f(x_i) = f_i^{(0)} \qquad (n=0,1,\cdots,n), \tag{2}$$
$$f^{(1)}(x_i) = f_i^{(1)} \qquad (n=0,1,\cdots,n) \tag{3}$$

が成り立つ．式 (2)，(3) の条件は $2(n+1)$ 個あるので，$f(x)$ は $2n+1$ 次の多項式である．つまり，$A_{i0}(x)$ と $A_{i1}(x)$ は $2n+1$ 次の多項式である．

式 (2)，(3) が満たされるためには，$A_{i0}(x)$ と $A_{i1}(x)$ は

$$A_{i0}(x_j) = \delta_{i,j}, \qquad A_{i1}(x_j) = 0, \tag{4}$$
$$A_{i0}^{(1)}(x_j) = 0, \qquad A_{i1}^{(1)}(x_j) = \delta_{i,j} \tag{5}$$

を満足すればよい．この条件を満たす $A_{i0}(x)$ と $A_{i1}(x)$ は次の形の式でなければならない．

$$A_{i0}(x) = p_i(x) R_{i0}(x), \tag{6}$$
$$A_{i1}(x) = p_i(x)(x-x_i) R_{i1}(x) \tag{7}$$

ただし,,

$$p_i(x) = (x-x_0)^2(x-x_1)^2 \cdots (x-x_{i-1})^2 (x-x_{i+1})^2 \cdots (x-x_n)^2 \tag{8}$$

である．また，$R_{i0}(x)$ は 1 次の多項式，$R_{i1}(x)$ は 0 次の多項式である．なぜ式 (6)，(7) の形でなければならないのかということを少し補足しておこう．

明らかに，$j \neq i$ の場合，

$$p_i(x_j) = 0,$$
$$p_i^{(1)}(x_j) = 0$$

が成り立つから，式 (4) と式 (5) が成り立つ．$j=i$ の場合，明らかに式 (4) の第 2 式が成り立つ．式 (4) の第 1 式と式 (5) の第 1 式は $R_{i0}(x)$ の 2 つの係数を適当に決めることによって成り立つ．式 (5) の第 2 式は $R_{i1}(x)$ の 1 つの係数を適当に決めることによって成り立つ．つまり，$R_{i0}(x)$ の定数係数については，式 (4)，(5) で $j=i$ の条件から 1 次式の 2 つの係数が決定する．$R_{i1}(x)$ については，式 (5) で $j=i$ の条件から 0 次式の 1 つの定数が決定する．具体的な係数は式 (4)，(5) を満足するようにこの後求められる．したがって，式 (6)，(7) のようにおくことができるのである．

式 (6) に $x=x_i$ を代入すると，式 (4) より，

$$1 = p_i(x_i)R_{i0(x_i)}$$

となる．したがって，

$$R_{i0}(x_i) = \frac{1}{p_i(x_i)} \tag{9}$$

である．

次に，$g_i(x) = [p_i(x)]^{-1}$ とおいて，式 (6) を

$$A_{i0}(x)g_i(x) = R_{i0}(x)$$

と変形する．これを 1 回微分して $x=x_i$ とおくと，

$$A_{i0}^{(1)}(x_i)g_i(x_i) + A_{i0}(x_i)g_i^{(1)}(x_i) = R_{i0}^{(1)}(x_i)$$

となる．式 (4)，(5) の関係を用いると，

$$R_{i0}^{(1)}(x_i) = g_i^{(1)}(x_i) = -\frac{p_i^{(1)}(x_i)}{p_i^2(x_i)} \tag{10}$$

という関係が得られる．

A_{i1} に関しても，式 (7) を

$$A_{i1}(x)g_i(x) = (x-x_i)R_{i1}(x)$$

と変形する．これを 1 回微分して $x=x_i$ とおくと，

$$A_{i1}^{(1)}(x_i)g_i(x_i) + A_{i1}(x_i)g_i^{(1)}(x_i) = R_{i1}(x_i)$$

となる．これに式 (4)，(5) の関係を用いると，

$$R_{i1}(x_i) = g_i(x_i) = \frac{1}{p_i(x_i)} \tag{11}$$

という関係が得られる．

式 (9)，(10)，(11) から

$$R_{i0}(x) = R_{i0}(x_i) + R_{i0}^{(1)}(x_i)(x-x_i) = \frac{1}{p_i(x_i)} - \frac{p_i^{(1)}(x_i)}{p_i^2(x_i)}(x-x_i) \tag{12}$$

$$R_{i1}(x) = R_{i1}(x_i) = \frac{1}{p_i(x_i)} \tag{13}$$

であることがわかる．

これを式 (6)，(7) に代入すると，

$$A_{i0}(x) = \left[1-(x-x_i)\frac{p_i^{(1)}(x_i)}{p_i(x_i)}\right]\frac{p_i(x)}{p_i(x_i)} \tag{14}$$

$$A_{i1}(x) = (x-x_i)\frac{p_i(x)}{p_i(x_i)} \tag{15}$$

となり，エルミート補間多項式が導出された．

参考文献

[1] A. Spitzbart, “A generalization of Hermite’s interpolation formula”, The American Mathematics Monthly, vol.**67**, pp.42–46 (1960).

`https://www.jstor.org/stable/2308924?seq=1#page_scan_tab_contents`
`http://www.jstor.org/stable/2308924`