エルミート補間の一般公式におけるルジャンドル形式とニュートン形式

2016.6.12　　鈴木　実

1　はじめに

一般化したエルミート補間公式には，ルジャンドル形式とニュートン形式がある．両者とも同条件を満たす同じ次数の多項式であるので一致するはずであるが，2 つの公式が一致するようには一見してもわからない．両者が式変形で一致するはずなのに，それを明らかにしておかないのは気持ちが落ち着かないので，ここで両者が一致することを示しておこう．ただし，かなり複雑で証明が長い．もっと良い方法があると思うのであるが，すぐには思い付かないので取り敢えずこの長い方法を示しておこう．

2　一般化されたエルミート補間

2.1　ルジャンドル形式

$f^{(j)}(x_i) = f_i^{(j)}$，$i = 0, 1, \ldots, n$; $j = 0, 1, \ldots, r_i$ を満足する最低次の多項式 $f(x)$，すなわち，エルミート補間の一般公式は次のように表される [1, 2]．

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{r_i} A_{ij}(x) f_i^{(j)} \tag{1}$$

ただし，

$$A_{ij}(x) = p_i(x) \frac{(x - x_i)^j}{j!} \sum_{k=0}^{r_i - j} \frac{1}{k!} (x - x_i)^k g_i^{(k)}(x_i) \tag{2}$$

$$p_i(x) = (x - x_0)^{r_0+1}(x - x_1)^{r_1+1} \cdots (x - x_{i-1})^{r_{i-1}+1}(x - x_{i+1})^{r_{i+1}+1} \cdots (x - x_n)^{r_n+1} \tag{3}$$

$$g_i(x) = [p_i(x)]^{-1} \tag{4}$$

である．この多項式 $f(x)$ の次数 N は

$$N = \sum_{i=0}^{n} (r_i + 1) - 1 = \sum_{i=0}^{n} r_i + n \tag{5}$$

である．これはルジャンドル形式である．

2.2　ニュートン形式

$x = x_i (i = 0, \cdots, n)$ で f_i および r 階微分係数 $f_i^{(r)} (r = 0, \cdots, r_i)$ の値をとる N 次の多項式 $f(x)$ は次のように表される [3].

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f[x_0] \\
&\quad + f[x_0, x_0](x - x_0) \\
&\quad + \cdots \\
&\quad + f[\overbrace{x_0, \cdots, x_0}^{r_0+1}](x - x_0)^{r_0} \\
&\quad + f[\overbrace{x_0, \cdots, x_0}^{r_0+1}, x_1](x - x_0)^{r_0+1} \\
&\quad + \cdots \\
&\quad + f[\overbrace{x_0, \cdots, x_0}^{r_0+1}, \cdots, \overbrace{x_n, \cdots, x_n}^{r_n+1}](x - x_0)^{r_0+1} \cdots (x - x_{n-1})^{r_{n-1}+1}(x - x_n)^{r_n} \\
&\quad = \sum_{j=0}^{n-1} f[\overbrace{x_0 \cdots x_0}^{r_0+1} \cdots \overbrace{x_j \cdots x_j}^{r_j+1}](x - x_0)^{r_0+1} \cdots (x - x_j)^{r_j+1} \\
&\quad + f[\overbrace{x_0 \cdots x_0}^{r_0+1} \cdots \overbrace{x_n \cdots x_n}^{r_n+1}](x - x_0)^{r_0+1} \cdots (x - x_{n-1})^{r_{n-1}+1}(x - x_n)^{r_n} \qquad (6)
\end{aligned}
$$

ただし，

$$
N = n + \sum_{j=0}^{n} r_j, \qquad (7)
$$

である．これはすなわちエルミート補間多項式の差分商による表現（ニュートン形式）である [3].

3　準備

3.1　差分商に関する関係式

定理 1

$$
f[\overbrace{x_i, \cdots, x_i}^{r+1}] = \frac{1}{r!} f_i^{(r)} \qquad (8)
$$

の関係式がある．証明は [4] にある．

定理 2

$$
\begin{aligned}
[\overbrace{x_0, \cdots, x_0}^{r_0+1}, \overbrace{x_1, \cdots, x_1}^{r_1+1}, \cdots, \overbrace{x_n, \cdots, x_n}^{r_n+1}] &= \frac{1}{r_0! r_1! \cdots r_n!} \frac{\partial^{r_0+r_1+\cdots+r_n}}{\partial x_0^{r_0} \partial x_1^{r_1} \cdots \partial x_n^{r_n}} [x_0 x_1 \cdots x_n] \qquad (9) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{r_i} \frac{1}{j!} \frac{1}{(r_i - j)!} g_i^{(r_i - j)}(x_i) f_i^{(j)} \qquad (10)
\end{aligned}
$$

定理 2 の証明

式 (10) 第 1 式の証明に関しては,

$$[\overbrace{x_0,\cdots,x_0}^{n+1},x_1,\cdots,x_m]=\frac{1}{n!}\frac{\partial^n}{\partial x^n}[x_0,x_1,\cdots,x_m] \tag{11}$$

を証明すれば十分である.

数学的帰納法を用いる. n=1 のとき, $[x_0,x_1,\cdots,x_m]$ の x_0 に関する偏微分を考える.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_0}[x_0,x_1,\cdots,x_m]&=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{[x_0+h,x_1,\cdots,x_n]-[x_0,x_1,\cdots,x_n]\right\}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{[x_0+h,x_1,\cdots,x_n]-[x_1,\cdots,x_n,x_0]\right\}\\&=\lim_{h\to 0}[x_0+h,x_1,\cdots,x_m,x_0]\\&=\lim_{h\to 0}[x_0+h,x_0,x_1,\cdots,x_m]\\&=[x_0,x_0,x_1,\cdots,x_m]\end{aligned} \tag{12}$$

が成り立つ.

$n=k$ のとき, 第 1 式が成り立つ仮定する. まず,

$$[x_0+(k+1)h,x_0+kh,\cdots,x_0+h,x_0,x_1,\cdots,x_m] \tag{13}$$

を考える.

$$\begin{aligned}&[x_0+(k+1)h,x_0+kh,\cdots,x_0+h,x_0,x_1,\cdots,x_m]\\&=[x_0+(k+1)h,x_0+kh,\cdots,x_0+h,x_1,\cdots,x_m,x_0]\\&=\frac{1}{(k+1)h}\{[x_0+(k+1)h,x_0+kh,\cdots,x_0+h,x_1,\cdots,x_m]-[x_0+kh,\cdots,x_0+h,x_1,\cdots,x_m,x_0]\}\\&=\frac{1}{(k+1)h}\{[x_0+(k+1)h,x_0+kh,\cdots,x_0+h,x_1,\cdots,x_m]-[x_0+kh,\cdots,x_0+h,x_0,x_1,\cdots,x_m]\}\end{aligned}$$

両辺の $h\to 0$ の極限を考えると, 右辺に仮定を用いて,

$$\begin{aligned}[\overbrace{x_0,\cdots,x_0}^{k+1},x_1,\cdots,x_m]&=\lim_{h\to 0}\frac{1}{k+1}\frac{\partial}{\partial x_0}[x_0+kh,\cdots,x_0+h,x_0,x_1,\cdots,x_m]\\&=\frac{1}{(k+1)}\frac{\partial}{\partial x_0}[\overbrace{x_0,\cdots,x_0}^{k+1},x_1,\cdots,x_m]\\&=\frac{1}{(k+1)}\frac{\partial}{\partial x_0}\left\{\frac{1}{k!}\frac{\partial^k}{\partial x_0^k}[x_0,x_1,\cdots,x_m]\right\}\\&=\frac{1}{(k+1)!}\frac{\partial^{k+1}}{\partial x^{k+1}}[x_0,x_1,\cdots,x_m]\end{aligned} \tag{14}$$

となる. すなわち, $n=k+1$ の場合も成り立つので式 (9) は成り立つことが証明された.

式 (10) 第 2 式の証明については次の式を用いる [4].

$$[x_0,x_1,\cdots,x_n]=\sum_{i=0}^{n}\frac{f(x_i)}{\displaystyle\prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n}(x_i-x_k)} \tag{15}$$

この式の右辺を x_k $(k \neq i)$ で r_k 回偏微分する．

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} (x_i - x_k)^{r_k+1}} r_1! r_2! \cdots r_{i-1}! r_{i+1}! \cdots r_n! \tag{16}$$

式 (4) の $p_i(x)$ または $g_i(x)$ を用いて書き換えると

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{p_i(x_i)} \sum_{i=0}^{n} g_i(x_i) f(x_i) r_1! r_2! \cdots r_{i-1}! r_{i+1}! \cdots r_n! \tag{17}$$

右辺を x_i で r_i 回偏微分する．

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{n} \frac{\partial^{r_i}}{\partial x_i^{r_i}} [g_i(x_i) f(x_i)] r_1! r_2! \cdots r_{i-1}! r_{i+1}! \cdots r_n! \\
&= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{r_i} \binom{r_i}{j} g_i^{(r_i-j)}(x_i) f^{(j)}(x_i) r_1! r_2! \cdots r_{i-1}! r_{i+1}! \cdots r_n! \\
&= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{r_i} \frac{1}{j!} \frac{1}{(r_i-j)!}\ g_i^{(r_i-j)}(x_i)\ f^{(j)}(x_i)\ r_1! r_2! \cdots r_n!
\end{aligned} \tag{18}$$

以上の計算をまとめると，

$$\frac{\partial^{r_0+r_1+\cdots+r_n}}{\partial x_0^{r_0} \partial x_1^{r_1} \cdots \partial x_n^{r_n}} [x_0 x_1 \cdots x_n] = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{r_i} \frac{1}{j!} \frac{1}{(r_i-j)!} g_i^{(r_i-j)}(x_i) f_i^{(j)} r_0! r_1! \cdots r_n! \tag{19}$$

となる．この式は証明しようとする式 (10) に他ならない．

4 ルジャンドル形式とニュートン形式が一致することの証明

最初に最も長い $f_0^{(0)} = f_0$ の係数が一致すること，次に最も簡単な最高次の係数およびその次の高次の係数が一致することを導いてから，一般的に一致することを示す．

$f_0^{(0)}$ の場合

f_0 の係数について，最も大きい次数の差分商 $[\overbrace{x_0, \cdots, x_0}^{r_0+1} \cdots \overbrace{x_n, \cdots, x_n}^{r_n+1}]$ から考える．

$[\overbrace{x_0, \cdots, x_0}^{r_0+1} \cdots \overbrace{x_n, \cdots, x_n}^{r_n+1}]$ の中の f_0 の係数 (これを $[c_{00} \overbrace{x_0, \cdots, x_0}^{r_0+1} \cdots \overbrace{x_n, \cdots, x_n}^{r_n+1}]$ と書こう) は式 (10) から，$(x - x_0) = (x - x_n) - (x_0 - x_n)$ とおくことにより，

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{r_0!} g_{0,r_n+1}^{(r_0)}(x_0)\ (x - x_0)^{r_0+1} (x - x_1)^{r_1+1} \cdots (x - x_n)^{r_n} \\
&= \frac{1}{r_0!} g_{0,r_n+1}^{(r_0)}(x_0)\ (x - x_0)^{r_0} (x - x_1)^{r_1+1} \cdots (x - x_n)^{r_n+1} \\
&- \frac{1}{r_0!} g_{0,r_n+1}^{(r_0)}(x_0)\ (x_0 - x_n)(x - x_0)^{r_0} (x - x_1)^{r_1+1} \cdots (x - x_n)^{r_n}
\end{aligned} \tag{20}$$

となる．ここで，

$$g_{i,j(t)}^{(r)}(x) = \frac{\partial^r}{\partial x^r} g_{i,j(t)}(x) = \frac{\partial^r}{\partial x^r} \frac{1}{(x - x_0)^{r_0+1} \cdots (x - x_t)^j} \tag{21}$$

とする．下付き添字の t が自明の場合は省略する．つまり，j は分母の最後の因子の数を表す．

式 (29) で，右辺第 1 項は式 (2) の A_{00} の $t=r_0$ の項であることがわかる．これを A_{00,r_0} と書こう．A_{00,r_0} は最後に累計されるものであるから，あらわに記すことをしない．したがって，次に式 (29) の右辺第 2 項を考える．この項には

$$g_{0,r_n+1}^{(r_0)}(x_0)\,(x_0-x_n) \tag{22}$$

という項が含まれている．いま，ライプニッツの公式を用いると，

$$\frac{\partial^{r_0}}{\partial x_0^{r_0}}[g_{0,r_n+1}(x_0)\,(x_0-x_n)] = g_{0,r_n+1}^{(r_0)}(x_0)\,(x_0-x_n) + r_0 g_{0,r_n+1}^{(r_0-1)}(x_0) \tag{23}$$

となる．$g_{0,r_n+1}^{(0)}(x_0)\,(x_0-x_n) = g_{0,r_n}^{(0)}(x_0)$ であるから，これより，

$$g_{0,r_n+1}^{(r_0)}(x_0)\,(x_0-x_n) = g_{0,r_n}^{(r_0)}(x_0) - r_0 g_{0,r_n+1}^{(r_0-1)}(x_0) \tag{24}$$

が成り立つ．式 (29) に式 (24) の関係を適用すると，

$$\begin{aligned}
&A_{00,r_0}(x) - \frac{1}{r_0!}g_{0,r_n}^{(r_0)}(x_0)\,(x-x_0)^{r_0}(x-x_1)^{r_1+1}\cdots(x-x_n)^{r_n}\\
&+\frac{1}{(r_0-1)!}g_{0,r_n+1}^{(r_0-1)}(x_0)\,(x-x_0)^{r_0}(x-x_1)^{r_1+1}\cdots(x-x_n)^{r_n}
\end{aligned} \tag{25}$$

となる．第 3 項に $(x-x_0)=(x-x_n)-(x_0-x_n)$ とおいて変形すると，

$$\begin{aligned}
&A_{00,r_0}(x) - \frac{1}{r_0!}g_{0,r_n}^{(r_0)}(x_0)\,(x-x_0)^{r_0}(x-x_1)^{r_1+1}\cdots(x-x_n)^{r_n}\\
&+\frac{1}{(r_0-1)!}g_{0,r_n+1}^{(r_0-1)}(x_0)\,(x-x_0)^{r_0-1}(x-x_1)^{r_1+1}\cdots(x-x_n)^{r_n+1}\\
&-\frac{1}{(r_0-1)!}g_{0,r_n+1}^{(r_0-1)}(x_0)\,(x_0-x_n)(x-x_0)^{r_0-1}(x-x_1)^{r_1+1}\cdots(x-x_n)^{r_n}
\end{aligned} \tag{26}$$

となる．この式で第 3 項は $A_{00,r_0-1}(x)$ である．したがって，

$$\begin{aligned}
&A_{00,r_0}(x) + A_{00,r_0-1}(x) - \frac{1}{r_0!}g_{0,r_n}^{(r_0)}(x_0)\,(x-x_0)^{r_0}(x-x_1)^{r_1+1}\cdots(x-x_n)^{r_n}\\
&-\frac{1}{(r_0-1)!}g_{0,r_n+1}^{(r_0-1)}(x_0)\,(x_0-x_n)(x-x_0)^{r_0-1}(x-x_1)^{r_1+1}\cdots(x-x_n)^{r_n}
\end{aligned} \tag{27}$$

とすることができる．第 3 項は，この段階でこのまま残る．第 4 項を式 (24) の関係を適用して変形すると，

$$\begin{aligned}
&A_{00,r_0}(x) + A_{00,r_0-1}(x) - \frac{1}{r_0!}g_{0,r_n}^{(r_0)}(x_0)\,(x-x_0)^{r_0}(x-x_1)^{r_1+1}\cdots(x-x_n)^{r_n}\\
&-\frac{1}{(r_0-1)!}g_{0,r_n}^{(r_0-1)}(x_0)\,(x-x_0)^{r_0}(x-x_1)^{r_1+1}\cdots(x-x_n)^{r_n}\\
&+\frac{1}{(r_0-2)!}g_{0,r_n+1}^{(r_0-2)}(x_0)\,(x-x_0)^{r_0-1}(x-x_1)^{r_1+1}\cdots(x-x_n)^{r_n}
\end{aligned} \tag{28}$$

この式の第 5 項で $(x-x_0)=(x-x_n)-(x_0-x_n)$ とおいて変形すると，

$$\begin{aligned}
&A_{00,r_0}(x) + A_{00,r_0-1}(x) - \frac{1}{r_0!}g_{0,r_n}^{(r_0)}(x_0)\,(x-x_0)^{r_0}(x-x_1)^{r_1+1}\cdots(x-x_n)^{r_n}\\
&-\frac{1}{(r_0-1)!}g_{0,r_n}^{(r_0-1)}(x_0)\,(x-x_0)^{r_0}(x-x_1)^{r_1+1}\cdots(x-x_n)^{r_n}\\
&+\frac{1}{(r_0-2)!}g_{0,r_n+1}^{(r_0-2)}(x_0)\,(x-x_0)^{r_0-2}(x-x_1)^{r_1+1}\cdots(x-x_n)^{r_n+1}\\
&-\frac{1}{(r_0-2)!}g_{0,r_n+1}^{(r_0-2)}(x_0)\,(x_0-x_n)(x-x_0)^{r_0-2}(x-x_1)^{r_1+1}\cdots(x-x_n)^{r_n}
\end{aligned} \tag{29}$$

この式の第5項は式 (2) と比較して $A_{00,r_0-2}(x)$ であることがわかる．このような変形操作を施すことにより，最終的に $[\overbrace{x_0,\cdots,x_0}^{r_0+1}\cdots\overbrace{x_n,\cdots,x_n}^{r_n+1}]$ の中に含まれる $f_0^{(0)}$ の係数は，

$$
\begin{aligned}
&c_{00}[\overbrace{x_0,\cdots,x_0}^{r_0+1}\cdots\overbrace{x_n,\cdots,x_n}^{r_n+1}] \\
&=A_{00,r_0}(x)+A_{00,r_0-1}(x)+A_{00,r_0-2}(x)\cdots+A_{00,1}(x)+A_{00,0}(x) && (30)\\
&-\frac{1}{r_0!}g_{0,r_n}^{(r_0)}(x_0)\ (x-x_0)^{r_0}(x-x_1)^{r_1+1}\cdots(x-x_n)^{r_n} && (31)\\
&-\frac{1}{(r_0-1)!}g_{0,r_n}^{(r_0-1)}(x_0)\ (x-x_0)^{r_0-1}(x-x_1)^{r_1+1}\cdots(x-x_n)^{r_n} && (32)\\
&-\frac{1}{(r_0-2)!}g_{0,r_n}^{(r_0-2)}(x_0)\ (x-x_0)^{r_0-2}(x-x_1)^{r_1+1}\cdots(x-x_n)^{r_n} && (33)\\
&\vdots\\
&-\frac{1}{1!}g_{0,r_n}^{(1)}(x_0)\ (x-x_0)(x-x_1)^{r_1+1}\cdots(x-x_n)^{r_n} && (34)\\
&-\frac{1}{0!}g_{0,r_n}^{(0)}(x_0)\ (x-x_1)^{r_1+1}\cdots(x-x_n)^{r_n} && (35)
\end{aligned}
$$

であることがわかる．式 (30) の 1 行は A_{00} と等しい．

次に，式 (31) 行を変形しよう．今度は $(x-x_n)^{r_n}$ の 1 つの因子 $(x-x_n)$ に $(x-x_n)=(x-x_0)+(x_0-x_n)$ を代入すると，

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{r_0!}g_{0,r_n}^{(r_0)}(x_0)\ (x-x_0)^{r_0+1}(x-x_1)^{r_1+1}\cdots(x-x_n)^{r_n-1} && (36)\\
&-\frac{1}{r_0!}g_{0,r_n}^{(r_0)}(x_0)\ (x_0-x_n)(x-x_0)^{r_0}(x-x_1)^{r_1+1}\cdots(x-x_n)^{r_n-1} && (37)
\end{aligned}
$$

となる．この式の第 1 項は $[\overbrace{x_0,\cdots,x_0}^{r_0+1}\cdots\overbrace{x_n,\cdots,x_n}^{r_n}]$ の中に含まれる $f_0^{(0)}$ の係数と等しく相殺される．第 2 項に式 (24) の関係を適用して変形すると，

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{r_0!}g_{0,r_n-1}^{(r_0)}(x_0)\ (x-x_0)^{r_0}(x-x_1)^{r_1+1}\cdots(x-x_n)^{r_n-1} && (38)\\
&+\frac{1}{(r_0-1)!}g_{0,r_n}^{(r_0-1)}(x_0)\ (x-x_0)^{r_0}(x-x_1)^{r_1+1}\cdots(x-x_n)^{r_n-1} && (39)
\end{aligned}
$$

となる．第 2 項はそのまま残る．この項は省略する．第 1 項に $(x-x_n)=(x-x_0)+(x_0-x_n)$ を代入すると，

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{r_0!}g_{0,r_n-1}^{(r_0)}(x_0)\ (x-x_0)^{r_0+1}(x-x_1)^{r_1+1}\cdots(x-x_n)^{r_n-2} && (40)\\
&-\frac{1}{r_0!}g_{0,r_n-1}^{(r_0)}(x_0)\ (x_0-x_n)(x-x_0)^{r_0}(x-x_1)^{r_1+1}\cdots(x-x_n)^{r_n-2} && (41)
\end{aligned}
$$

となる．この式の第 1 項は $[\overbrace{x_0,\cdots,x_0}^{r_0+1}\cdots\overbrace{x_n,\cdots,x_n}^{r_n-1}]$ の中に含まれる $f_0^{(0)}$ の係数と等しく相殺される．第 2 項に式 (24) の関係を適用して変形すると，

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{r_0!}g_{0,r_n-2}^{(r_0)}(x_0)\ (x-x_0)^{r_0}(x-x_1)^{r_1+1}\cdots(x-x_n)^{r_n-2} && (42)\\
&+\frac{1}{(r_0-1)!}g_{0,r_n-1}^{(r_0-1)}(x_0)\ (x-x_0)^{r_0}(x-x_1)^{r_1+1}\cdots(x-x_n)^{r_n-2} && (43)
\end{aligned}
$$

となる．第 2 項はそのまま残る．この項は省略する．第 1 項に $(x-x_n)=(x-x_0)+(x_0-x_n)$ を代入すると，

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{r_0!}g_{0,r_n-2}^{(r_0)}(x_0)\ (x-x_0)^{r_0+1}(x-x_1)^{r_1+1}\cdots(x-x_n)^{r_n-3} && (44)\\
&-\frac{1}{r_0!}g_{0,r_n-2}^{(r_0)}(x_0)\ (x_0-x_n)(x-x_0)^{r_0}(x-x_1)^{r_1+1}\cdots(x-x_n)^{r_n-3} && (45)
\end{aligned}
$$

となる．この式の第 1 項は $[\overbrace{x_0,\cdots,x_0}^{r_0+1}\cdots\overbrace{x_n,\cdots,x_n}^{r_n-2}]$ の中に含まれる $f_0^{(0)}$ の係数と等しく相殺される．同じような変形を繰り返したが，以下同様な変形を続けることにより，最後の部分を示すと，

$$-\frac{1}{r_0!}g_{0,2(1)}^{(r_0)}(x_0)\ (x-x_0)^{r_0+1}(x-x_1)-\frac{1}{r_0!}g_{0,2(1)}^{(r_0)}(x_0)\ (x-x_0)^{r_0}(x-x_1) \tag{46}$$

$$=-c_{00}[\overbrace{x_0,\cdots,x_0}^{r_0+1}x_1,x_1]-\frac{1}{r_0!}g_{0,2(1)}^{(r_0)}(x_0)\ (x-x_0)^{r_0}(x-x_1) \tag{47}$$

という式が得られ，第 2 項は，

$$=-\frac{1}{r_0!}g_{0,1(1)}^{(r_0)}(x_0)\ (x-x_0)^{r_0}(x-x_1)+\frac{1}{(r_0-1)!}g_{0,2(1)}^{(r_0-1)}(x_0)\ (x-x_0)^{r_0}(x-x_1) \tag{48}$$

$$=-\frac{1}{r_0!}g_{0,1(1)}^{(r_0)}(x_0)\ (x-x_0)^{r_0+1}-\frac{1}{r_0!}g_{0,1(1)}^{(r_0)}(x_0)\ (x_0-x_1)(x-x_0)^{r_0} \tag{49}$$

$$=-c_{00}[\overbrace{x_0,\cdots,x_0}^{r_0+1}x_1]+\frac{1}{(r_0-1)!}g_{0,1(1)}^{(r_0-1)}(x_0)\ (x-x_0)^{r_0} \tag{50}$$

となるまで進む．最後の式は式 (24) の関係を適用した結果であり，式 (24) の右辺第 1 項に相当する部分が 0 になるため，一連の計算はここで終わる．

結局，$[\overbrace{x_0,\cdots,x_0}^{r_0+1}\cdots\overbrace{x_n,\cdots,x_n}^{r_n-1}]$ から $[\overbrace{x_0,\cdots,x_0}^{r_0+1}x_1]$ までの $f_0^{(0)}$ の係数の全てを使ったことになる．ニュートン形式で $f_0^{(0)}$ が残っているのは $[x_0]$ のみである．結局，以上の計算で残った項は，式 (32)–(37)

$$\frac{1}{(r_0-1)!}g_{0,r_n}^{(r_0-1)}(x_0)\ (x-x_0)^{r_0}(x-x_1)^{r_1+1}\cdots(x-x_n)^{r_n-1} \tag{51}$$

$$+\frac{1}{(r_0-1)!}g_{0,r_n-1}^{(r_0-1)}(x_0)\ (x-x_0)^{r_0}(x-x_1)^{r_1+1}\cdots(x-x_n)^{r_n-2} \tag{52}$$

$$+\frac{1}{(r_0-1)!}g_{0,r_n-2}^{(r_0-1)}(x_0)\ (x-x_0)^{r_0}(x-x_1)^{r_1+1}\cdots(x-x_n)^{r_n-3} \tag{53}$$

$$\vdots$$

$$+\frac{1}{(r_0-1)!}g_{0,1(r_n)}^{(r_0-1)}(x_0)\ (x-x_0)^{r_0}(x-x_1)^{r_1+1}\cdots(x-x_n)^{r_{n-1}+1} \tag{54}$$

$$\vdots$$

$$+\frac{1}{(r_0-1)!}g_{0,2(1)}^{(r_0-1)}(x_0)\ (x-x_0)^{r_0}(x-x_1) \tag{55}$$

$$+\frac{1}{(r_0-1)!}g_{0,1(1)}^{(r_0-1)}(x_0)\ (x-x_0)^{r_0} \tag{56}$$

である．

次に式 (32) を同じように変形しよう．式 (32) の $(x-x_n)$ の 1 つの因子に $(x-x_n)=(x-x_0)+(x_0-x_n)$ を代入すると，

$$-\frac{1}{(r_0-1)!}g_{0,r_n}^{(r_0-1)}(x_0)\ (x-x_0)^{r_0}(x-x_1)^{r_1+1}\cdots(x-x_n)^{r_n-1} \tag{57}$$

$$-\frac{1}{(r_0-1)!}g_{0,r_n}^{(r_0-1)}(x_0)\ (x_0-x_n)(x-x_0)^{r_0-1}(x-x_1)^{r_1+1}\cdots(x-x_n)^{r_n-1} \tag{58}$$

となる．第 1 項は式 (51) と相殺する．第 2 項に式 (24) の関係式を適用し，上と同様に第 1 項に $(x-x_n)=$

$(x-x_0)+(x_0-x_n)$ を代入すると，

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{(r_0-1)!}g^{(r_0-1)}_{0,r_n-1}(x_0)\ (x-x_0)^{r_0-1}(x-x_1)^{r_1+1}\cdots(x-x_n)^{r_n-1} && (59)\\
&+\frac{1}{(r_0-2)!}g^{(r_0-2)}_{0,r_n}(x_0)\ (x-x_0)^{r_0-1}(x-x_1)^{r_1+1}\cdots(x-x_n)^{r_n-1} && (60)\\
&=-\frac{1}{(r_0-1)!}g^{(r_0-1)}_{0,r_n-1}(x_0)\ (x-x_0)^{r_0}(x-x_1)^{r_1+1}\cdots(x-x_n)^{r_n-2} && (61)\\
&-\frac{1}{(r_0-1)!}g^{(r_0-1)}_{0,r_n-1}(x_0)\ (x_0-x_n)(x-x_0)^{r_0}(x-x_1)^{r_1+1}\cdots(x-x_n)^{r_n-2} && (62)\\
&+\frac{1}{(r_0-2)!}g^{(r_0-2)}_{0,r_n}(x_0)\ (x-x_0)^{r_0-1}(x-x_1)^{r_1+1}\cdots(x-x_n)^{r_n-1} && (63)
\end{aligned}
$$

右辺第 1 項の式 (61) は式 (52) と相殺する．式 (63) はそのまま残る．式 (62) に式 (24) の関係式を適用し同様の変形を施すと，

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{(r_0-1)!}g^{(r_0-1)}_{0,r_n-2}(x_0)\ (x-x_0)^{r_0-1}(x-x_1)^{r_1+1}\cdots(x-x_n)^{r_n-2} && (64)\\
&+\frac{1}{(r_0-2)!}g^{(r_0-2)}_{0,r_n-1}(x_0)\ (x-x_0)^{r_0-1}(x-x_1)^{r_1+1}\cdots(x-x_n)^{r_n-2} && (65)\\
&=-\frac{1}{(r_0-1)!}g^{(r_0-1)}_{0,r_n-2}(x_0)\ (x-x_0)^{r_0}(x-x_1)^{r_1+1}\cdots(x-x_n)^{r_n-3} && (66)\\
&-\frac{1}{(r_0-1)!}g^{(r_0-1)}_{0,r_n-2}(x_0)\ (x_0-x_n)(x-x_0)^{r_0-1}(x-x_1)^{r_1+1}\cdots(x-x_n)^{r_n-3} && (67)\\
&+\frac{1}{(r_0-2)!}g^{(r_0-2)}_{0,r_n-1}(x_0)\ (x-x_0)^{r_0-1}(x-x_1)^{r_1+1}\cdots(x-x_n)^{r_n-2} && (68)
\end{aligned}
$$

右辺第 1 項の式 (66) は式 (53) と相殺する．式 (68) はそのまま残る．式 (67) に同様な操作を施していくと，

$$\prod(x-x_i)^{r_i-l}$$

の部分が 1 つずつ短くなり，最後に，

$$-\frac{1}{(r_0-1)!}g^{(r_0-1)}_{0,1(1)}(x_0)\ (x-x_0)^{r_0-1}(x-x_1)+\frac{1}{(r_0-2)!}g^{(r_0-2)}_{0,2(1)}(x_0)\ (x-x_0)^{r_0-1}(x-x_1) \tag{69}$$

を経て

$$-\frac{1}{(r_0-1)!}g^{(r_0-1)}_{0,1(1)}(x_0)\ (x-x_0)^{r_0}+\frac{1}{(r_0-2)!}g^{(r_0-2)}_{0,1(1)}(x_0)\ (x-x_0)^{r_0-1} \tag{70}$$

となる．式 (70) の第 1 項は式 (56) と相殺する．式 (69)，(70) の第 2 項はそのまま残る．結局，以上の操作で残る項は，

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{(r_0-2)!}g^{(r_0-2)}_{0,r_n}(x_0)\ (x-x_0)^{r_0-1}(x-x_1)^{r_1+1}\cdots(x-x_n)^{r_n-1} && (71)\\
&+\frac{1}{(r_0-2)!}g^{(r_0-2)}_{0,r_n-1}(x_0)\ (x-x_0)^{r_0-1}(x-x_1)^{r_1+1}\cdots(x-x_n)^{r_n-2} && (72)\\
&+\frac{1}{(r_0-2)!}g^{(r_0-2)}_{0,r_n-2}(x_0)\ (x-x_0)^{r_0-1}(x-x_1)^{r_1+1}\cdots(x-x_n)^{r_n-3} && (73)\\
&\qquad\vdots\\
&+\frac{1}{(r_0-2)!}g^{(r_0-2)}_{0,2(1)}(x_0)\ (x-x_0)^{r_0-1}(x-x_1) && (74)\\
&+\frac{1}{(r_0-2)!}g^{(r_0-2)}_{0,1(1)}(x_0)\ (x-x_0)^{r_0-1} && (75)
\end{aligned}
$$

である．

式 (33) についても同様に変形すればよい．最初の部分を示すと，式 (33) から

$$-\frac{1}{(r_0-2)!}g_{0,r_n}^{(r_0-2)}(x_0)\ (x-x_0)^{r_0-1}(x-x_1)^{r_1+1}\cdots(x-x_n)^{r_n-1} \tag{76}$$

$$-\frac{1}{(r_0-2)!}g_{0,r_n-1}^{(r_0-2)}(x_0)\ (x-x_0)^{r_0-2}(x-x_1)^{r_1+1}\cdots(x-x_n)^{r_n-1} \tag{77}$$

$$+\frac{1}{(r_0-3)!}g_{0,r_n}^{(r_0-3)}(x_0)\ (x-x_0)^{r_0-2}(x-x_1)^{r_1+1}\cdots(x-x_n)^{r_n-1} \tag{78}$$

となる．式 (76) は式 (71) と相殺する．式 (78) はそのまま残る．式 (77) を同様に変形すると，

$$-\frac{1}{(r_0-2)!}g_{0,r_n-1}^{(r_0-2)}(x_0)\ (x-x_0)^{r_0-1}(x-x_1)^{r_1+1}\cdots(x-x_n)^{r_n-2} \tag{79}$$

$$-\frac{1}{(r_0-2)!}g_{0,r_n-2}^{(r_0-2)}(x_0)\ (x-x_0)^{r_0-2}(x-x_1)^{r_1+1}\cdots(x-x_n)^{r_n-2} \tag{80}$$

$$+\frac{1}{(r_0-3)!}g_{0,r_n-1}^{(r_0-3)}(x_0)\ (x-x_0)^{r_0-2}(x-x_1)^{r_1+1}\cdots(x-x_n)^{r_n-2} \tag{81}$$

となる．式 (79) は式 (72) と相殺する．式 (81) はそのまま残る．式 (80) を同様に変形し，その操作を続けると，最後に，

$$-\frac{1}{(r_0-2)!}g_{0,1(1)}^{(r_0-2)}(x_0)\ (x-x_0)^{r_0-1} \tag{82}$$

$$+\frac{1}{(r_0-3)!}g_{0,1(1)}^{(r_0-3)}(x_0)\ (x-x_0)^{r_0-2} \tag{83}$$

となる．式 (82) は式 (75) と相殺し，これで式 (71) から式 (75) の全ての項は相殺される．式 (83) は残る．残った項は，

$$+\frac{1}{(r_0-3)!}g_{0,r_n}^{(r_0-3)}(x_0)\ (x-x_0)^{r_0-2}(x-x_1)^{r_1+1}\cdots(x-x_n)^{r_n-1} \tag{84}$$

$$+\frac{1}{(r_0-3)!}g_{0,r_n-1}^{(r_0-3)}(x_0)\ (x-x_0)^{r_0-2}(x-x_1)^{r_1+1}\cdots(x-x_n)^{r_n-2} \tag{85}$$

$$\vdots$$

$$+\frac{1}{(r_0-3)!}g_{0,2(1)}^{(r_0-3)}(x_0)\ (x-x_0)^{r_0-2}(x-x_1) \tag{86}$$

$$+\frac{1}{(r_0-3)!}g_{0,1(1)}^{(r_0-3)}(x_0)\ (x-x_0)^{r_0-2} \tag{87}$$

となる．これらの項も，式 (33) の次の項を変形することによりこれまでと同様にすべて相殺される．

このような操作を続けて行き，やがて式 (34) の変形まで到達する．式 (34) の変形から，前段の計算で残った項が相殺され，それ以外には次の項が残る．

$$+\frac{1}{1!}g_{0,r_n}^{(0)}(x_0)\ (x-x_0)(x-x_1)^{r_1+1}\cdots(x-x_n)^{r_n-1} \tag{88}$$

$$+\frac{1}{1!}g_{0,r_n-1}^{(0)}(x_0)\ (x-x_0)(x-x_1)^{r_1+1}\cdots(x-x_n)^{r_n-2} \tag{89}$$

$$\vdots$$

$$+\frac{1}{1!}g_{0,2(1)}^{(0)}(x_0)\ (x-x_0)(x-x_1) \tag{90}$$

$$+\frac{1}{1!}g_{0,1(1)}^{(0)}(x_0)\ (x-x_0) \tag{91}$$

これらの項は，式 (37) から，

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{0!}g_{0,r_n}^{(0)}(x_0)\ (x-x_0)(x-x_1)^{r_1+1}\cdots(x-x_n)^{r_n-1} && (92)\\
&-\frac{1}{0!}g_{0,r_n}^{(0)}(x_0)\ (x_0-x_n)(x-x_1)^{r_1+1}\cdots(x-x_n)^{r_n-1} && (93)\\
=&-\frac{1}{0!}g_{0,r_n}^{(0)}(x_0)\ (x-x_0)(x-x_1)^{r_1+1}\cdots(x-x_n)^{r_n-1} && (94)\\
&-\frac{1}{0!}g_{0,r_n-1}^{(0)}(x_0)\ (x-x_1)^{r_1+1}\cdots(x-x_n)^{r_n-1} && (95)
\end{aligned}
$$

となり，式 (92) は式 (88) と相殺される．こうして，因子が 1 つずつ縮約されて，最後に，

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{0!}g_{0,2(1)}^{(0)}(x_0)\ (x-x_1)^2 && (96)\\
=&-\frac{1}{0!}g_{0,2(1)}^{(0)}(x_0)\ (x-x_0)(x-x_1)-\frac{1}{0!}g_{0,2(1)}^{(0)}(x_0)\ (x_0-x_1)(x-x_1) && (97)\\
=&-\frac{1}{0!}g_{0,2(1)}^{(0)}(x_0)\ (x-x_0)(x-x_1)-\frac{1}{0!}g_{0,1(1)}^{(0)}(x_0)\ (x-x_1) && (98)\\
=&-\frac{1}{0!}g_{0,2(1)}^{(0)}(x_0)\ (x-x_0)(x-x_1)-\frac{1}{0!}g_{0,1(1)}^{(0)}(x_0)\ (x-x_0)-\frac{1}{0!}g_{0,1(1)}^{(0)}(x_0)\ (x_0-x_1) && (99)\\
=&-\frac{1}{0!}g_{0,2(1)}^{(0)}(x_0)\ (x-x_0)(x-x_1)-\frac{1}{0!}g_{0,1(1)}^{(0)}(x_0)\ (x-x_0)-\frac{1}{0!}g_{0,0(1)}^{(0)}(x_0) && (100)
\end{aligned}
$$

となる．式 (92) で，第 1 項は式 (90) と相殺し，第 2 項は式 (91) と相殺する．第 3 項は $[x_0]$ であり，これで全ての項は相殺されて，$[x_0]$ から $[\overbrace{x_0,\cdots,x_0}^{r_0+1}\cdots\overbrace{x_n,\cdots,x_n}^{r_n+1}]$ に含まれる $f_0^{(0)}$ の係数は A_{00} に等しいことが証明された．

$f_n^{(n)}$ の場合

次に，$f_n^{(n)}$ の係数について考えてみよう．$f_n^{(n)}$ は $[\overbrace{x_0,\cdots,x_0}^{r_0+1}\cdots\overbrace{x_n,\cdots,x_n}^{r_n+1}]$ の中にのみ 1 個存在する．その係数は

$$\frac{1}{r_n!}g_n^{(0)}(x_n)\ (x-x_0)^{r_0+1}(x-x_1)^{r_1+1}\cdots(x-x_n)^{r_n} \tag{101}$$

である．これは明らかに

$$\frac{1}{r_n!}p_n(x)(x-x_n)^{r_n}g_n^{(0)}(x_n) \tag{102}$$

であり，A_{nn} と一致する．

$f_n^{(n-1)}$ の場合

$f_n^{(n-1)}$ の係数についても考えてみよう．$f_n^{(n-1)}$ は $[\overbrace{x_0,\cdots,x_0}^{r_0+1}\cdots\overbrace{x_n,\cdots,x_n}^{r_n+1}]$ の中に 1 個，$[\overbrace{x_0,\cdots,x_0}^{r_0+1}\cdots\overbrace{x_n,\cdots,x_n}^{r_n}]$ の中に 1 個存在する．前者の係数は

$$\frac{1}{(r_n-1)!}g_n^{(1)}(x_n)\ (x-x_0)^{r_0+1}(x-x_1)^{r_1+1}\cdots(x-x_n)^{r_n} \tag{103}$$

後者の係数は

$$\frac{1}{(r_n-1)!}g_n^{(0)}(x_n)\ (x-x_0)^{r_0+1}(x-x_1)^{r_1+1}\cdots(x-x_n)^{r_n-1} \tag{104}$$

であり，両者の和はそのまま A_{n,r_n-1} に等しい．

$f_i^{(j)}$ の場合

以上で見通しは立ったので，一般に $f_i^{(j)}$ の場合を考えよう．

$f_i^{(j)}$ は最も高次の差分商である $[\overbrace{x_0,\cdots,x_0}^{r_0+1}\cdots\overbrace{x_n,\cdots,x_n}^{r_n+1}]$ から $[\overbrace{x_0,\cdots,x_0}^{r_0+1}\cdots\overbrace{x_i,\cdots,x_i}^{j+1}]$ の中に存在する．$f_0^{(0)}$ の場合と同様の操作をしよう．$[\overbrace{x_0,\cdots,x_0}^{r_0+1}\cdots\overbrace{x_n,\cdots,x_n}^{r_n+1}]$ の中の $f_i^{(j)}$ の係数は式 (10) の対応する項から得られ，1 つの $(x-x_i)$ を $(x-x_i)=(x-x_n)-(x_i-x_n)$ とおくことにより，

$$\frac{1}{j!}\frac{1}{(r_i-j)!}g_{i,r_n+1}^{(r_i-j)}(x_i)\ (x-x_0)^{r_0+1}\cdots(x-x_i)^{r_i+1}\cdots(x-x_n)^{r_n} \tag{105}$$

$$=\frac{1}{j!}\frac{1}{(r_i-j)!}g_{i,r_n+1}^{(r_i-j)}(x_i)\ (x-x_0)^{r_0+1}\cdots(x-x_i)^{r_i}\cdots(x-x_n)^{r_n+1} \tag{106}$$

$$-\frac{1}{j!}\frac{1}{(r_i-j)!}g_{i,r_n+1}^{(r_i-j)}(x_i)\ (x_i-x_n)(x-x_0)^{r_0+1}\cdots(x-x_i)^{r_i}\cdots(x-x_n)^{r_n} \tag{107}$$

となる．右辺第 1 項は A_{ij,r_i-j} $(=A_{ij,r_i-j-(i)})$ である．第 2 項に式 (24) の関係を適用して変形すると，

$$-\frac{1}{j!}\frac{1}{(r_i-j)!}g_{i,r_n}^{(r_i-j)}(x_i)\ (x-x_0)^{r_0+1}\cdots(x-x_i)^{r_i}\cdots(x-x_n)^{r_n} \tag{108}$$

$$+\frac{1}{j!}\frac{1}{(r_i-j-1)!}g_{i,r_n+1}^{(r_i-j-1)}(x_i)\ (x-x_0)^{r_0+1}\cdots(x-x_i)^{r_i}\cdots(x-x_n)^{r_n} \tag{109}$$

となる．第 1 項はそのまま残る．第 2 項の 1 つの $(x-x_i)$ を $(x-x_i)=(x-x_n)-(x_i-x_n)$ とおくことにより，

$$-\frac{1}{j!}\frac{1}{(r_i-j-1)!}g_{i,r_n+1}^{(r_i-j-1)}(x_i)\ (x-x_0)^{r_0+1}\cdots(x-x_i)^{r_i-1}\cdots(x-x_n)^{r_n+1} \tag{110}$$

$$+\frac{1}{j!}\frac{1}{(r_i-j-1)!}g_{i,r_n+1}^{(r_i-j-1)}(x_i)\ (x_i-x_n)(x-x_0)^{r_0+1}\cdots(x-x_i)^{r_i-1}\cdots(x-x_n)^{r_n} \tag{111}$$

となる．第 1 項は A_{ij,r_i-j-1} $(A_{ij,r_i-j-1(i)})$ である．第 2 項に式 (24) の関係を適用すると式 (108) と式 (109) と同様な 2 つの項が得られる．第 1 項はそのまま残る．第 2 項の 1 つの $(x-x_i)$ を $(x-x_i)=(x-x_n)-(x_i-x_n)$ とおくことにより，$A_{ij,r_i-j-2(i)}$ に一致する項が得られる．同時に，$(x-x_i)$ の次数は 1 つずつ少なくなる．この数式変形を繰り返すことにより，以下の式に到達する．

$$\frac{1}{j!}\frac{1}{2!}g_{i,r_n+1}^{(2)}(x_i)\ (x-x_0)^{r_0+1}\cdots(x-x_i)^{j+3}\cdots(x-x_n)^{r_n} \tag{112}$$

$$=\frac{1}{j!}\frac{1}{2!}g_{i,r_n}^{(2)}(x_i)\ (x-x_0)^{r_0+1}\cdots(x-x_i)^{j+2}\cdots(x-x_n)^{r_n+1} \tag{113}$$

$$-\frac{1}{j!}\frac{1}{2!}g_{i,r_n+1}^{(2)}(x_i)\ (x_i-x_n)(x-x_0)^{r_0+1}\cdots(x-x_i)^{j+2}\cdots(x-x_n)^{r_n} \tag{114}$$

右辺第 1 項は $A_{ij,2}$ である．同第 2 項は式 (24) の関係から

$$-\frac{1}{j!}\frac{1}{2!}g_{i,r_n}^{(2)}(x_i)\ (x-x_0)^{r_0+1}\cdots(x-x_i)^{j+2}\cdots(x-x_n)^{r_n} \tag{115}$$

$$+\frac{1}{j!}\frac{1}{1!}g_{i,r_n+1}^{(1)}(x_i)\ (x-x_0)^{r_0+1}\cdots(x-x_i)^{j+2}\cdots(x-x_n)^{r_n} \tag{116}$$

となる．第 1 項はそのまま残る．第 2 項の 1 つの $(x-x_i)$ を $(x-x_i)=(x-x_n)-(x_i-x_n)$ とすると，

$$\frac{1}{j!}\frac{1}{1!}g_{i,r_n+1}^{(1)}(x_i)\ (x-x_0)^{r_0+1}\cdots(x-x_i)^{j+1}\cdots(x-x_n)^{r_n+1} \tag{117}$$

$$-\frac{1}{j!}\frac{1}{1!}g_{i,r_n+1}^{(1)}(x_i)\ (x_i-x_n)(x-x_0)^{r_0+1}\cdots(x-x_i)^{j+1}\cdots(x-x_n)^{r_n} \tag{118}$$

となる．第 1 項は $A_{ij,1}$ である．第 2 項に式 (24) の関係を適用すると，

$$-\frac{1}{j!}\frac{1}{1!}g^{(1)}_{i,r_n}(x_i)\ (x-x_0)^{r_0+1}\cdots(x-x_i)^{j+1}\cdots(x-x_n)^{r_n} \tag{119}$$
$$+\frac{1}{j!}\frac{1}{0!}g^{(0)}_{i,r_n+1}(x_i)\ (x-x_0)^{r_0+1}\cdots(x-x_i)^{j+1}\cdots(x-x_n)^{r_n} \tag{120}$$

となる．第 1 項はそのまま残る．第 2 項の 1 つの $(x-x_i)$ を $(x-x_i)=(x-x_n)-(x_i-x_n)$ とすると，

$$\frac{1}{j!}\frac{1}{0!}g^{(0)}_{i,r_n+1}(x_i)\ (x-x_0)^{r_0+1}\cdots(x-x_i)^{j}\cdots(x-x_n)^{r_n+1} \tag{121}$$
$$-\frac{1}{j!}\frac{1}{0!}g^{(0)}_{i,r_n}(x_i)\ (x-x_0)^{r_0+1}\cdots(x-x_i)^{j}\cdots(x-x_n)^{r_n} \tag{122}$$

となる．第 1 項は $A_{ij,0}$ である．第 2 項はそのまま残る．一連の数式変形はここで終わる．

結局，残った項は全部で

$$c_{ij}[\overbrace{x_0,\cdots,x_0}^{r_0+1}\cdots\overbrace{x_n,\cdots,x_n}^{r_n+1}]$$
$$=A_{ij,r_i-j}+A_{ij,r_i-j-1}+\cdots+A_{ij,2}+A_{ij,1}+A_{ij,0} \tag{123}$$
$$-\frac{1}{j!}\frac{1}{(r_i-j)!}g^{(r_i-j)}_{i,r_n}(x_i)\ (x-x_0)^{r_0+1}\cdots(x-x_i)^{r_i}\cdots(x-x_n)^{r_n} \tag{124}$$
$$-\frac{1}{j!}\frac{1}{(r_i-j-1)!}g^{(r_i-j-1)}_{i,r_n}(x_i)\ (x-x_0)^{r_0+1}\cdots(x-x_i)^{r_i-1}\cdots(x-x_n)^{r_n} \tag{125}$$
$$-\frac{1}{j!}\frac{1}{(r_i-j-2)!}g^{(r_i-j-2)}_{i,r_n}(x_i)\ (x-x_0)^{r_0+1}\cdots(x-x_i)^{r_i-2}\cdots(x-x_n)^{r_n} \tag{126}$$
$$\vdots$$
$$-\frac{1}{j!}\frac{1}{2!}g^{(2)}_{i,r_n}(x_i)\ (x-x_0)^{r_0+1}\cdots(x-x_i)^{j+2}\cdots(x-x_n)^{r_n} \tag{127}$$
$$-\frac{1}{j!}\frac{1}{1!}g^{(1)}_{i,r_n}(x_i)\ (x-x_0)^{r_0+1}\cdots(x-x_i)^{j+1}\cdots(x-x_n)^{r_n} \tag{128}$$
$$-\frac{1}{j!}\frac{1}{0!}g^{(0)}_{i,r_n}(x_i)\ (x-x_0)^{r_0+1}\cdots(x-x_i)^{j}\cdots(x-x_n)^{r_n} \tag{129}$$

となる．(123) 行は総和すると A_{ij} になる．

(124) 行から数式を A_{00} の場合のように変形していこう．(124) 行の 1 つの $(x-x_n)$ に $(x-x_n)=(x-x_i)+(x_i-x_n)$ を代入すると，

$$-\frac{1}{j!}\frac{1}{(r_i-j)!}g^{(r_i-j)}_{i,r_n}(x_i)\ (x-x_0)^{r_0+1}\cdots(x-x_i)^{r_i+1}\cdots(x-x_n)^{r_n-1} \tag{130}$$
$$-\frac{1}{j!}\frac{1}{(r_i-j)!}g^{(r_i-j)}_{i,r_n}(x_i)\ (x_i-x_n)(x-x_0)^{r_0+1}\cdots(x-x_i)^{r_i}\cdots(x-x_n)^{r_n-1} \tag{131}$$

となる．上式第 1 項は $c_{ij}[\overbrace{x_0,\cdots,x_0}^{r_0+1}\cdots\overbrace{x_n,\cdots,x_n}^{r_n}]$ と一致する．第 2 項に式 (24) の関係，すなわち

$$g^{(r_i-j)}_{i,r_n}(x_i)\ (x_i-x_n)=g^{(r_i-j)}_{i,r_n-1}(x_i)-(r_i-j)g^{(r_i-j-1)}_{i,r_n}(x_i)$$

を代入すると，

$$-\frac{1}{j!}\frac{1}{(r_i-j)!}g^{(r_i-j)}_{i,r_n-1}(x_i)\ (x-x_0)^{r_0+1}\cdots(x-x_i)^{r_i}\cdots(x-x_n)^{r_n-1} \tag{132}$$
$$+\frac{1}{j!}\frac{1}{(r_i-j-1)!}g^{(r_i-j-1)}_{i,r_n}(x_i)\ (x-x_0)^{r_0+1}\cdots(x-x_i)^{r_i}\cdots(x-x_n)^{r_n-1} \tag{133}$$

となる．上式第 2 項はそのまま残る．第 1 項の 1 つの $(x-x_n)$ に $(x-x_n)=(x-x_i)+(x_i-x_n)$ を代入すると，

$$-\frac{1}{j!}\frac{1}{(r_i-j)!}g_{i,r_n-1}^{(r_i-j)}(x_i)\ (x-x_0)^{r_0+1}\cdots(x-x_i)^{r_i+1}\cdots(x-x_n)^{r_n-2} \tag{134}$$

$$-\frac{1}{j!}\frac{1}{(r_i-j)!}g_{i,r_n-1}^{(r_i-j)}(x_i)\ (x_i-x_n)(x-x_0)^{r_0+1}\cdots(x-x_i)^{r_i}\cdots(x-x_n)^{r_n-2} \tag{135}$$

となる．上式第 1 項は $c_{ij}[\overbrace{x_0,\cdots,x_0}^{r_0+1}\cdots\overbrace{x_n,\cdots,x_n}^{r_n-1}]$ と一致する．

以下，順次この数式変形を施すことにより，因子 $(x-x_k)$ が添字の大きい方から 1 つずつ減り，

$$-\frac{1}{j!}\frac{1}{(r_i-j)!}g_{i,1(i+1)}^{(r_i-j)}(x_i)\ (x-x_0)^{r_0+1}\cdots(x-x_i)^{r_i}(x-x_{i+1}) \tag{136}$$

$$=-\frac{1}{j!}\frac{1}{(r_i-j)!}g_{i,1(i+1)}^{(r_i-j)}(x_i)\ (x-x_0)^{r_0+1}\cdots(x-x_i)^{r_i+1} \tag{137}$$

$$-\frac{1}{j!}\frac{1}{(r_i-j)!}g_{i,1(i+1)}^{(r_i-j)}(x_i)\ (x_i-x_{i+1})(x-x_0)^{r_0+1}\cdots(x-x_i)^{r_i} \tag{138}$$

というところまで来る．右辺第 1 項は $c_{ij}[\overbrace{x_0,\cdots,x_0}^{r_0+1}\cdots\overbrace{x_i,\cdots,x_i}^{r_i+1},x_{i+1}]$ と一致する．右辺第 2 項に第 2 項に式 (24) の関係，すなわち

$$g_{i,1(i+1)}^{(r_i-j)}(x_i)\ (x_i-x_n)=g_{i,0(i+1)}^{(r_i-j)}(x_i)-(r_i-j)g_{i,1(i+1)}^{(r_i-j-1)}(x_i)$$

を代入すると，

$$-\frac{1}{j!}\frac{1}{(r_i-j)!}g_{i,0(i+1)}^{(r_i-j)}(x_i)\ (x-x_0)^{r_0+1}\cdots(x-x_i)^{r_i} \tag{139}$$

$$+\frac{1}{j!}\frac{1}{(r_i-j-1)!}g_{i,1(i+1)}^{(r_i-j-1)}(x_i)\ (x-x_0)^{r_0+1}\cdots(x-x_i)^{r_i} \tag{140}$$

となる．上式第 1 項は $c_{ij}[\overbrace{x_0,\cdots,x_0}^{r_0+1}\cdots\overbrace{x_i,\cdots,x_i}^{r_i+1}]$ と一致する．第 2 項はそのまま残る．(124) 行の式変形はここまでである．この式変形で残った項は，

$$\frac{1}{j!}\frac{1}{(r_i-j-1)!}g_{i,r_n}^{(r_i-j-1)}(x_i)\ (x-x_0)^{r_0+1}\cdots(x-x_i)^{r_i}\cdots(x-x_n)^{r_n-1} \tag{141}$$

$$+\frac{1}{j!}\frac{1}{(r_i-j-1)!}g_{i,r_n-1}^{(r_i-j-1)}(x_i)\ (x-x_0)^{r_0+1}\cdots(x-x_i)^{r_i}\cdots(x-x_n)^{r_n-2} \tag{142}$$

$$\vdots$$

$$+\frac{1}{j!}\frac{1}{(r_i-j-1)!}g_{i,2(i+1)}^{(r_i-j-1)}(x_i)\ (x-x_0)^{r_0+1}\cdots(x-x_i)^{r_i}(x-x_{i+1}) \tag{143}$$

$$+\frac{1}{j!}\frac{1}{(r_i-j-1)!}g_{i,1(i+1)}^{(r_i-j-1)}(x_i)\ (x-x_0)^{r_0+1}\cdots(x-x_i)^{r_i} \tag{144}$$

である．

次に (125) 行の式変形をする．(125) 行は 1 つの $(x-x_n)$ に $(x-x_n)=(x-x_i)+(x_i-x_n)$ を代入することにより，

$$-\frac{1}{j!}\frac{1}{(r_i-j-1)!}g_{i,r_n}^{(r_i-j-1)}(x_i)\ (x-x_0)^{r_0+1}\cdots(x-x_i)^{r_i}\cdots(x-x_n)^{r_n-1} \tag{145}$$

$$-\frac{1}{j!}\frac{1}{(r_i-j-1)!}g_{i,r_n}^{(r_i-j-1)}(x_i)\ (x_i-x_n)(x-x_0)^{r_0+1}\cdots(x-x_i)^{r_i-1}\cdots(x-x_n)^{r_n-1} \tag{146}$$

となる．上式第 1 項は (141) 行と相殺する．第 2 項に式 (24) の関係，すなわち

$$g_{i,r_n}^{(r_i-j-1)}(x_i)\ (x_i-x_n)=g_{i,r_n-1}^{(r_i-j-1)}(x_i)-(r_i-j-1)g_{i,r_n}^{(r_i-j-2)}(x_i)$$

を代入すると，

$$-\frac{1}{j!}\frac{1}{(r_i-j-1)!}g_{i,r_n-1}^{(r_i-j-1)}(x_i)\ (x-x_0)^{r_0+1}\cdots(x-x_i)^{r_i-1}\cdots(x-x_n)^{r_n-1} \tag{147}$$

$$+\frac{1}{j!}\frac{1}{(r_i-j-2)!}g_{i,r_n}^{(r_i-j-2)}(x_i)\ (x-x_0)^{r_0+1}\cdots(x-x_i)^{r_i-1}\cdots(x-x_n)^{r_n-1} \tag{148}$$

となる．上式第 2 項はそのまま残る．第 1 項の 1 つの $(x-x_n)$ に $(x-x_n)=(x-x_i)+(x_i-x_n)$ を代入すると，

$$-\frac{1}{j!}\frac{1}{(r_i-j-1)!}g_{i,r_n-1}^{(r_i-j-1)}(x_i)\ (x-x_0)^{r_0+1}\cdots(x-x_i)^{r_i}\cdots(x-x_n)^{r_n-2} \tag{149}$$

$$-\frac{1}{j!}\frac{1}{(r_i-j-1)!}g_{i,r_n-1}^{(r_i-j-1)}(x_i)\ (x_i-x_n)(x-x_0)^{r_0+1}\cdots(x-x_i)^{r_i-1}\cdots(x-x_n)^{r_n-2} \tag{150}$$

となる．上式第 1 項は (142) 行と相殺する．

以下，順次この数式変形を施すことにより，因子 $(x-x_k)$ が添字の大きい方から 1 つずつ減り，

$$-\frac{1}{j!}\frac{1}{(r_i-j-1)!}g_{i,2(i+1)}^{(r_i-j-1)}(x_i)\ (x-x_0)^{r_0+1}\cdots(x-x_i)^{r_i}(x-x_{i+1}) \tag{151}$$

$$-\frac{1}{j!}\frac{1}{(r_i-j-1)!}g_{i,2(i+1)}^{(r_i-j-1)}(x_i)\ (x_i-x_{i+1})(x-x_0)^{r_0+1}\cdots(x-x_i)^{r_i-1}(x-x_{i+1}) \tag{152}$$

というところまで来る．上式第 1 項は (143) 行と相殺する．第 2 項に式 (24) の関係，すなわち

$$g_{i,2(i+1)}^{(r_i-j-1)}(x_i)\ (x_i-x_n)=g_{i,1(i+1)}^{(r_i-j-1)}(x_i)-(r_i-j)g_{i,2(i+1)}^{(r_i-j-2)}(x_i)$$

を代入すると，

$$-\frac{1}{j!}\frac{1}{(r_i-j-1)!}g_{i,1(i+1)}^{(r_i-j-1)}(x_i)\ (x-x_0)^{r_0+1}\cdots(x-x_i)^{r_i-1}(x-x_{i+1}) \tag{153}$$

$$+\frac{1}{j!}\frac{1}{(r_i-j-2)!}g_{i,2(i+1)}^{(r_i-j-2)}(x_i)\ (x-x_0)^{r_0+1}\cdots(x-x_i)^{r_i-1}(x-x_{i+1}) \tag{154}$$

上式第 2 項はそのまま残る．第 1 項の 1 つの $(x-x_n)$ に $(x-x_{i+1})=(x-x_i)+(x_i-x_{i+1})$ を代入すると，

$$-\frac{1}{j!}\frac{1}{(r_i-j-1)!}g_{i,1(i+1)}^{(r_i-j-1)}(x_i)\ (x-x_0)^{r_0+1}\cdots(x-x_i)^{r_i} \tag{155}$$

$$-\frac{1}{j!}\frac{1}{(r_i-j-1)!}g_{i,1(i+1)}^{(r_i-j-1)}(x_i)\ (x_i-x_{i+1})(x-x_0)^{r_0+1}\cdots(x-x_i)^{r_i-1} \tag{156}$$

となる．上式の第 1 項は (144) 行と相殺する．第 2 項に式 (24) の関係，すなわち

$$g_{i,1(i+1)}^{(r_i-j-1)}(x_i)\ (x_i-x_{i+1})=g_{i,0(i+1)}^{(r_i-j-1)}(x_i)-(r_i-j-1)g_{i,1(i+1)}^{(r_i-j-2)}(x_i)$$

を代入すると，

$$-\frac{1}{j!}\frac{1}{(r_i-j)!}g_{i,0(i+1)}^{(r_i-j-1)}(x_i)\ (x-x_0)^{r_0+1}\cdots(x-x_i)^{r_i-1} \tag{157}$$

$$+\frac{1}{j!}\frac{1}{(r_i-j-2)!}g_{i,1(i+1)}^{(r_i-j-2)}(x_i)\ (x-x_0)^{r_0+1}\cdots(x-x_i)^{r_i-1} \tag{158}$$

となる．上式第 1 項は $c_{ij}[\overbrace{x_0,\cdots,x_0}^{r_0+1}\cdots\overbrace{x_i,\cdots,x_i}^{r_i}]$ と一致する．第 2 項はそのまま残る．(125) 行の式変形はここまでである．(124) 行で残った項はここで全て相殺される．差分商は上記の 1 項が追加される．

(126) 行を式変形すると，(125) 行の式変形で残った項は全て相殺され，1 次低い差分商が追加される．同様な式変形を繰り返して行き，(127) 行を式変形するところまでに達する．(127) 行の式変形では，前の段階で残った項が相殺され，$c_{ij}[\overbrace{x_0,\cdots,x_0}^{r_0+1}\cdots\overbrace{x_i,\cdots,x_i}^{j+2}]$ が追加される．

(128) 行の式変形では，(127) 行の式変形で残った項が相殺され，$c_{ij}[\overbrace{x_0,\cdots,x_0}^{r_0+1}\cdots\overbrace{x_i,\cdots,x_i}^{j+1}]$ が追加される．

最後に，(129) 行は，1 つの $(x-x_n)$ に $(x-x_n)=(x-x_i)+(x_i-x_n)$ を代入して，

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{j!}\frac{1}{0!}g^{(0)}_{i,r_n}(x_i)\ (x-x_0)^{r_0+1}\cdots(x-x_i)^j\cdots(x-x_n)^{r_n} && (159)\\
=&-\frac{1}{j!}\frac{1}{0!}g^{(0)}_{i,r_n}(x_i)\ (x-x_0)^{r_0+1}\cdots(x-x_i)^{j+1}\cdots(x-x_n)^{r_n-1} && (160)\\
&-\frac{1}{j!}\frac{1}{0!}g^{(0)}_{i,r_n-1}(x_i)\ (x-x_0)^{r_0+1}\cdots(x-x_i)^j\cdots(x-x_n)^{r_n-1} && (161)
\end{aligned}
$$

となる．第 1 項は (128) 行の式変形で残った項と相殺される．第 2 項に同じ式変形を施すと，

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{j!}\frac{1}{0!}g^{(0)}_{i,r_n-1}(x_i)\ (x-x_0)^{r_0+1}\cdots(x-x_i)^{j+1}\cdots(x-x_n)^{r_n-2} && (162)\\
&-\frac{1}{j!}\frac{1}{0!}g^{(0)}_{i,r_n-2}(x_i)\ (x-x_0)^{r_0+1}\cdots(x-x_i)^j\cdots(x-x_n)^{r_n-2} && (163)
\end{aligned}
$$

となる．第 1 項は (128) 行の式変形で残った項と相殺される．これを続けることにより，最後に，

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{j!}\frac{1}{0!}g^{(0)}_{i,1(i+1)}(x_i)\ (x-x_0)^{r_0+1}\cdots(x-x_i)^j(x-x_{i+1}) && (164)\\
=&-\frac{1}{j!}\frac{1}{0!}g^{(0)}_{i,1(i+1)}(x_i)\ (x-x_0)^{r_0+1}\cdots(x-x_i)^{j+1} && (165)\\
&-\frac{1}{j!}\frac{1}{0!}g^{(0)}_{i,0(i+1)}(x_i)\ (x-x_0)^{r_0+1}\cdots(x-x_i)^j && (166)
\end{aligned}
$$

となる．右辺第 1 項は (128) 行の式変形で残った最後の項と相殺され，全ての残った項は相殺される．第 2 項は $c_{ij}[\overbrace{x_0,\cdots,x_0}^{r_0+1}\cdots\overbrace{x_i,\cdots,x_i}^{j+1}]$ である．

以上で，式 (6) の差分商を係数とする多項式 $f(x)$ に含まれる $f_i^{(j)}$ の係数の総和，すなわち，$[\overbrace{x_0,\cdots,x_0}^{r_0+1}\cdots\overbrace{x_n,\cdots,x_n}^{r_n+1}]$ から $[\overbrace{x_0,\cdots,x_0}^{r_0+1}\cdots\overbrace{x_i,\cdots,x_i}^{j+1}]$ の中に存在する $f_i^{(j)}$ の係数の総和は，A_{ij} であることが示された．このように，非常に長い計算であるが，エルミート補間公式において，ニュートン形式は式変形によりルジャンドル形式に書き直せることを確かに示すことはできる．両者が等しいことは，勿論このような計算をしなくても明らかである．

参考文献

[1] A. Spitzbart, “A generalization of Hermite’s interpolation formula”, The American Mathematics Monthly, vol.**67**, pp.42–46 (1960).

`https://www.jstor.org/stable/2308924?seq=1#page_scan_tab_contents`
`http://www.jstor.org/stable/2308924`

[2] 「エルミート補間の一般公式 (Generalized Hermite interpolation)」, 2016/5/30 のエントリー
[3] 「差分商を用いたエルミート補間多項式の表現（ニュートン形式）」, 2016/5/17 のエントリー
[4] 「差分商 (divied differences) について」, 2016/4/12 のエントリー