ボルツマン方程式を使わないでホール因子を求める

2014.6.10　　鈴木　実

電流密度 $\mathbf{J}$，電場 $\mathbf{E}$，磁場 $\mathbf{B}$ とし，磁場は z 軸方向，電流，電場は xy 面内とする．電子の非平衡状態の分布関数を $f(\mathbf{v})$ とし，平衡状態の分布関数を $f_0(\mathbf{v})$，$f_0(\mathbf{v})$ は空間的に均一，$\mathbf{v}$ の対称関数，その偏微分は反対称関数とする．電荷を符号を含めて q とする．

電流密度は

$$\mathbf{J} = q\int \mathbf{v}f(\mathbf{v})\mathrm{d}\mathbf{v} \tag{1}$$

と書ける．

非平衡状態の分布関数は，平衡状態の分布関数を微小量である $\Delta\mathbf{v}$ だけシフトした分布で近似的に表すことができる．このシフト量 $\Delta\mathbf{v}$ は，外場が存在する時，その外場によって電子が散乱されるまでに加速される量と見なすことができる．その時間は平均すると，衝突時間 τ となる．外場を $q\mathbf{E}+q\mathbf{v}\times\mathbf{B}$ とすると，

$$\Delta\mathbf{v} = (q\mathbf{E}+q\mathbf{v}\times\mathbf{B})\frac{\tau}{m} \tag{2}$$

とすることができる．

f を f_0 の周りに $\Delta\mathbf{v}$ の 2 次まで展開すると，

$$f(\mathbf{v}) \simeq f_0(\mathbf{v}+\Delta\mathbf{v}) = f_0(\mathbf{v}) + \Delta\mathbf{v}\cdot\frac{\partial f_0}{\partial\mathbf{v}} + \frac{1}{2!}(\Delta\mathbf{v}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}})^2 f_0 \tag{3}$$

となる．

(3) と (2) を (1) に代入し，y 方向の電流密度 J_y を求める．奇関数の積分は 0 になることを考慮すると，

$$J_y = \int qv_y\frac{\partial f_0}{\partial v_y}qE_y\frac{\tau}{m}\mathrm{d}\mathbf{v} - \int qv_yqv_xB\frac{\tau}{m}\frac{\partial^2 f_0}{\partial v_x\partial v_y}qE_x\frac{\tau}{m}\mathrm{d}\mathbf{v} \tag{4}$$

となる．右辺第 2 項で v_y の部分積分をして，

$$J_y = \frac{q^2}{m}E_y\int \tau v_y\frac{\partial f_0}{\partial v_y}\mathrm{d}\mathbf{v} + \frac{q^3}{m^2}BE_x\int \tau^2 v_x\frac{\partial f_0}{\partial v_x}\mathrm{d}\mathbf{v} \tag{5}$$

となる．$\mathscr{E} = (v_x^2+v_y^2+v_z^2)/2m$ から $\partial f_0/\partial v_x = (\partial f_0/\partial\mathscr{E})(\partial\mathscr{E}/\partial v_x) = (\partial f_0/\partial\mathscr{E})mv_x$ となり，同様に，$\partial f_0/\partial v_y = (\partial f_0/\partial\mathscr{E})mv_y$ であるから，

$$J_y = \frac{q^2}{m}E_y\int \tau mv_y^2\frac{\partial f_0}{\partial\mathscr{E}}\mathrm{d}\mathbf{v} + \frac{q^3}{m^2}BE_x\int \tau^2 mv_x^2\frac{\partial f_0}{\partial\mathscr{E}}\mathrm{d}\mathbf{v} \tag{6}$$

となる．立方対称が成り立つとして，$\int v_x^2\mathrm{d}\mathbf{v} = \int v_y^2\mathrm{d}\mathbf{v} = \int v_z^2\mathrm{d}\mathbf{v} = (1/3)\int v^2\mathrm{d}\mathbf{v}$ となるから，

$$J_y = \frac{2q^2}{3m}E_y\int \tau\mathscr{E}\frac{\partial f_0}{\partial\mathscr{E}}\mathrm{d}\mathbf{v} + \frac{2q^3}{3m^2}BE_x\int \tau^2\mathscr{E}\frac{\partial f_0}{\partial\mathscr{E}}\mathrm{d}\mathbf{v} \tag{7}$$

という式が得られる．ホール素子では $J_y = 0$ であるから，(7) より，

$$E_y = -\frac{q}{m}BE_x\frac{\displaystyle\int \tau^2\mathscr{E}\frac{\partial f_0}{\partial\mathscr{E}}\mathrm{d}\mathbf{v}}{\displaystyle\int \tau\mathscr{E}\frac{\partial f_0}{\partial\mathscr{E}}\mathrm{d}\mathbf{v}} \tag{8}$$

が得られる．

一方，J_x を求めると，J_y の第 1 項と同様にして，

$$J_x = \int q v_x \frac{\partial f_0}{\partial v_x} q E_x \frac{\tau}{m} \mathrm{d}\mathbf{v} = \frac{2q^2}{3m} q^2 E_x \int \tau \mathscr{E} \frac{\partial f_0}{\partial \mathscr{E}} \mathrm{d}\mathbf{v} \tag{9}$$

となる．この式の E_x を (8) に代入すると，

$$E_y = -\frac{q}{m} B J_x \frac{\displaystyle\int \tau^2 \mathscr{E} \frac{\partial f_0}{\partial \mathscr{E}} \mathrm{d}\mathbf{v}}{\left[\displaystyle\frac{2q^2}{3m} \int \tau \mathscr{E} \frac{\partial f_0}{\partial \mathscr{E}} \mathrm{d}\mathbf{v}\right] \left[\displaystyle\int \tau \mathscr{E} \frac{\partial f_0}{\partial \mathscr{E}} \mathrm{d}\mathbf{v}\right]} \tag{10}$$

となる．

ここで，平均 $\langle \tau^m \rangle'$ を次のように定義する．

$$\langle \tau^m \rangle' = -\frac{2}{3} \frac{\displaystyle\int \tau^m \mathscr{E} \frac{\partial f_0}{\partial \mathscr{E}} \mathrm{d}\mathbf{v}}{\displaystyle\int f_0 \mathrm{d}\mathbf{v}} \tag{11}$$

そうすると，

$$E_y = \frac{1}{q} B J_x \frac{\langle \tau^2 \rangle'}{\langle \tau \rangle'^2} \frac{1}{\displaystyle\int f_0 \mathrm{d}\mathbf{v}} \tag{12}$$

となる．$\int f_0 \mathrm{d}\mathbf{v} = n$ であることに注意し，$E_y = R_\mathrm{H} B J_x$ であるから，

$$R_\mathrm{H} = \frac{1}{qn} \frac{\langle \tau^2 \rangle'}{\langle \tau \rangle'^2} \tag{13}$$

が得られる．これより，ホール因子 r_H は

$$r_\mathrm{H} = \frac{\langle \tau^2 \rangle'}{\langle \tau \rangle'^2} \tag{14}$$

となる．

以上