立方対称エネルギー帯の場合のホール係数（p-Ge や p-Si の場合）

2015.11.11　　鈴木　実

1　はじめに

電子が放物的な球対称エネルギー帯を有する場合，衝突時間 τ がエネルギーの巾乗なら導電率とホール係数は解析的に求めることができる．エネルギーが異方的になればこれらの輸送特性は解析的にはもはや求めることはできず，数値的に計算する必要がある．ただし，エネルギー帯の立方対称性が満たされていて，エネルギーが波数ベクトルの関数として表現される場合には，導電率とホール係数の計算式が得られ，立方対称性を示す異方的エネルギーの数値的モデルのパラメータ (A, B, C) を決めれば簡単に導電率やホール係数を求めることができる．この計算式は Lax と Madroides [1] によって求められたが，途中の計算はほとんど示されず，結果だけが与えられている．その計算をフォローしたところ，かなりの計算量が必要であることがわかり，確かに途中の計算を論文に載せることは難しいことであろうと思われた．ここでは，その具体的な計算がどのようなものであったのかをメモしておこう．また，この論文の計算をフォローすることでしかわからないようないくつかのミスプリントが見つかったので，それもメモしておこう．

具体的には，Si あるいは Ge の価電子帯の正孔のエネルギーの場合を対象としている．導電体に比べて，価電子帯は warp したエネルギー構造を持っている．特に，重い正孔のエネルギー構造は大きく warp している．図 1 は Si の価電子帯の正孔のエネルギーを 3 次元で描画したものである．計算に使用したパラメータは Si のものを使用しているが，その立方対称エネルギー $\mathscr{E}$ との関係は次の節で示される．このように，等エネルギー面が球面からずれることによって，導電率テンソルには非対角成分が現れ，ホール係数にも異方的なエネルギーの影響が現れる．

2　立方対称エネルギーのモデル

Dresselhaus らが示した立方対称性を有する Ge や Si の等エネルギー面を表す解析モデルは次のように表される．

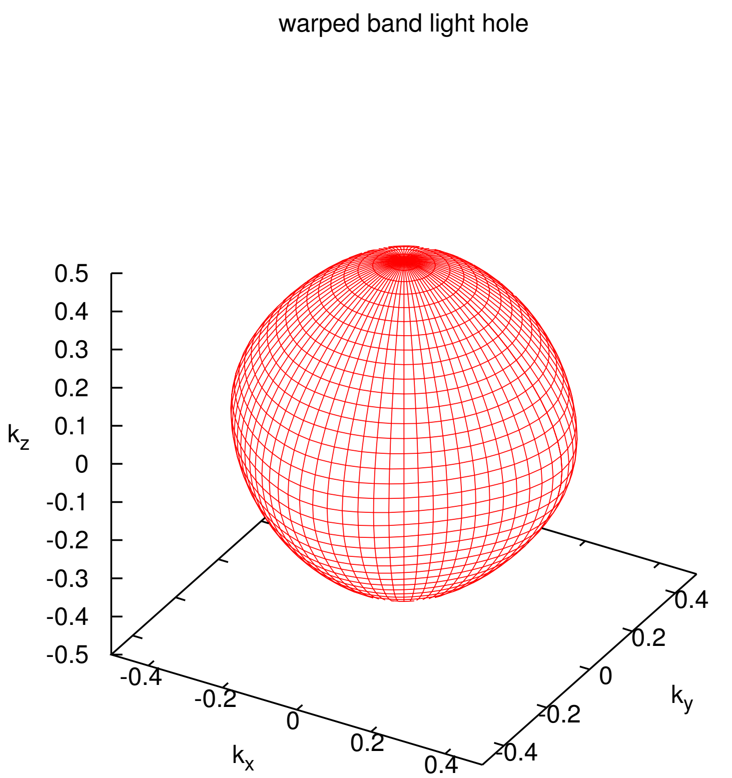
$$\mathscr{E} = -\frac{\hbar^2}{2m_0}\{Ak^2 \pm [B^2k^4 + C^2(k_x^2k_y^2 + k_y^2k_z^2 + k_z^2k_x^2)]^{1/2}\} \tag{1}$$

この式を見ると，Ak^2 からずれる部分，つまり球対称からずれる部分は $(k_x^2k_y^2+k_y^2k_z^2+k_z^2k_x^2)$ である．あるいは，B と C が球対称からのずれを表すパラメータであって，最終的な計算はこれらのパラメータからなる定数による無限級数で表される．したがって，級数が早く収束するためには，大括弧内の変動部分 $(k_x^2k_y^2+k_y^2k_z^2+k_z^2k_x^2)$ からその中間値を引いておき，それを ak^4 という形で足しておけば，巾乗の形をとる変数の絶対値が小さくなり，収束が速くなる．具体的には次のようにおく．

$$\mathscr{E} = -\frac{\hbar^2}{2m_0}\{Ak^2 \pm [B^2k^4 + aC^2k^4 + C^2(k_x^2k_y^2 + k_y^2k_z^2 + k_z^2k_x^2 - ak^4)]^{1/2}\} \tag{2}$$

a は $(k_x^2k_y^2 + k_y^2k_z^2 + k_z^2k_x^2)/k^4$ の中間値で与えられるが，それは後で示す．ここで，

$$B'^2 = B^2 + aC^2 \tag{3}$$



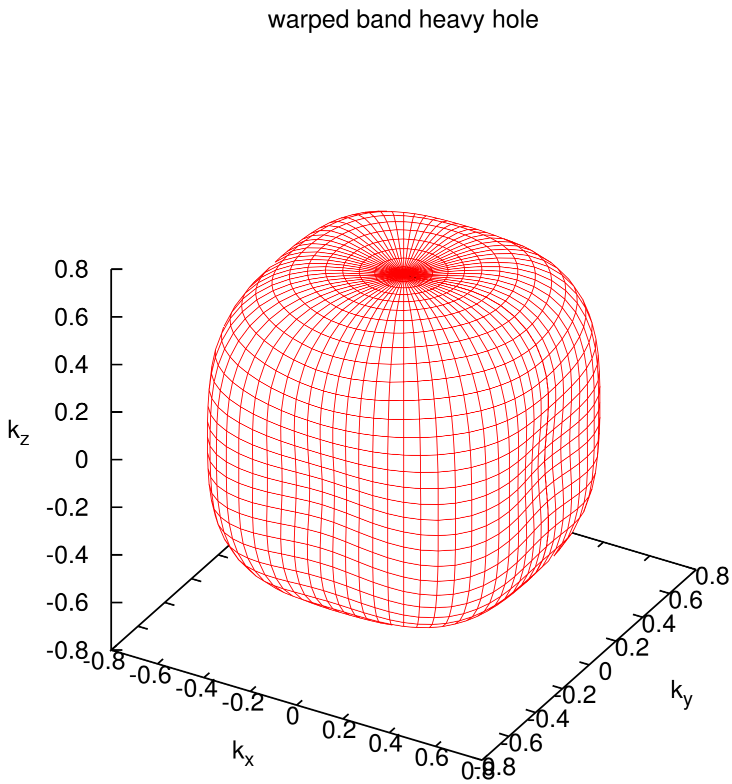


図 1: 軽い正孔（左図）と重い正孔（右図）の等エネルギー面．波数は $0.1(2\pi/a_0)$ を単位として，エネルギーがバンドの頂上から 51.0 meV 低い場合を表す．Si の価電子帯の場合で，格子定数は $a_0 = 5.43$ Å，パラメータの値は $A = 4.1$，$B = 1.4$，$C = 3.7$ である．

とおくと，

$$
\begin{aligned}
\mathscr{E} &= -\frac{\hbar^2}{2m_0}\{Ak^2 \pm [B'^2k^4 + C^2(k_x^2k_y^2 + k_y^2k_z^2 + k_z^2k_x^2 - ak^4)]^{1/2}\} \\
&= -\frac{\hbar^2}{2m_0}\left[Ak^2 \pm B'k^2\left(1 + \frac{C^2}{B'^2}\frac{k_x^2k_y^2 + k_y^2k_z^2 + k_z^2k_x^2 - ak^4}{k^2}\right)^{1/2}\right] \\
&\simeq -\frac{\hbar^2}{2m_0}\left[Ak^2 \pm B'k^2 \pm \frac{C^2}{2B'}\left(\frac{k_x^2k_y^2 + k_y^2k_z^2 + k_z^2k_x^2 - ak^4}{k^4}\right)\right] \\
&= -\frac{\hbar^2}{2m_0}(A \pm B')k^2\left[1 \pm \frac{C^2}{2B'(A \pm B')}\left(\frac{k_x^2k_y^2 + k_y^2k_z^2 + k_z^2k_x^2}{k^4} - a\right)\right] \\
&= -\frac{\hbar^2}{2m_0}(A \pm B')k^2\left[1 - \gamma\left(\frac{k_x^2k_y^2 + k_y^2k_z^2 + k_z^2k_x^2}{k^4} - a\right)\right] \\
&= -g(\theta,\phi)k^2k_BT
\end{aligned}
\tag{4}
$$

と整理変形できる．ただし，

$$
\gamma = \mp\frac{C^2}{2B'(A \pm B')} \tag{5}
$$

$$
g(\theta,\phi) = \frac{\hbar^2}{2m_0}\frac{A \pm B'}{k_BT}\left[1 - \gamma\left(\frac{k_x^2k_y^2 + k_y^2k_z^2 + k_z^2k_x^2}{k^4} - a\right)\right] \tag{6}
$$

とおいた．

ここで，a の値を決めておこう．後のホール係数や導電率の計算では式 (6) の

$$
\gamma\left(\frac{k_x^2k_y^2 + k_y^2k_z^2 + k_z^2k_x^2}{k^4} - a\right) \tag{7}
$$

の部分の巾乗が展開項になるから，式 (6) の絶対値が小さいほうが収束が速くなる．それには a を大括弧内第 1 項の最小値と最大値の中間の値にすれば良い．大括弧内第 1 項を ψ とおき，極座標表示すると，

$$
\psi = \frac{k_x^2k_y^2 + k_y^2k_z^2 + k_z^2k_x^2}{k^4} = \cos^2\phi\sin^2\phi\sin^4\theta + \sin^2\theta\cos^2\theta \tag{8}
$$

となる．

$$
\frac{\partial\psi}{\partial\phi} = \sin 2\phi\cos 2\phi\sin^4\theta = 0
$$

より，ϕ は $\phi = 0$ で極小，$\phi = \pi/4$ で極大となる．$\phi = \pi/4$ を式 (8) に代入すると，

$$
\psi = \frac{1}{4}\sin^4\theta + \sin^2\theta\cos^2\theta \tag{9}
$$

となるから，

$$
\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = \sin\theta\cos\theta(3\cos^2\theta - 1) = 0
$$

より，ψ が最大となるのは $3\cos^2\theta - 1 = 0$ の時である．これを式 (9) に代入することにより，ψ の最大値は 1/3，最小値は 0 であることがわかる．これより，$a = 1/6$ となることがわかる．

具体的な a を用い，式 (6) を極座標表示で書き換えると，

$$
g(\theta,\phi) = \frac{\hbar^2}{2m_0}\frac{A \pm B'}{k_BT}\left[1 - \gamma\left(\cos^2\phi\sin^2\phi\sin^4\theta + \sin^2\theta\cos^2\theta - \frac{1}{6}\right)\right] \tag{10}
$$

となる．このままでも良いが，論文 [1] ではこれを整理変形して次のような違う表現にしている．

$$
g(\theta,\phi) = \frac{\hbar^2}{2m_0}\frac{A \pm B'}{k_BT}\{1 + \frac{1}{2}\gamma[\sin^4\theta(\cos^4\phi + \sin^4\phi) + \cos^4\theta - \frac{2}{3}]\} \tag{11}
$$

式 (10) から式 (11) への変形は脚注に示す通りである．[1] ここで，

$$q = -\frac{1}{2}[\sin^4\theta(\cos^4\phi + \sin^4\phi) + \cos^4\theta - \frac{2}{3}] \tag{12}$$

とおけば，

$$g(\theta,\phi) = \frac{\hbar^2}{2m_0}\frac{A \pm B'}{k_B T}(1-\gamma q) \tag{13}$$

と書ける．

3　正孔の濃度

正孔のエネルギー $\mathscr{E}$ はバンド頂上から測った値とする．式 (1) は正確には電子のエネルギーで，したがって負である．バンド頂上のエネルギーを $\mathscr{E}_{\mathrm{v}}$，フェルミエネルギーを $\mathscr{E}_{\mathrm{F}}$ とする．$\mathscr{E}$ に正孔がある確率，すなわち電子が存在しない確率 $f(\mathscr{E})$ は，$\mathscr{E} + \mathscr{E}_{\mathrm{v}} < \mathscr{E}_{\mathrm{F}}$ であることを注意して，

$$1 - f_0(\mathscr{E}) = 1 - \frac{1}{\mathrm{e}^{(\mathscr{E}+\mathscr{E}_{\mathrm{v}}-\mathscr{E}_{\mathrm{F}})/k_{\mathrm{B}}T}+1} = \frac{\mathrm{e}^{(\mathscr{E}+\mathscr{E}_{\mathrm{v}}-\mathscr{E}_{\mathrm{F}})/k_{\mathrm{B}}T}}{\mathrm{e}^{(\mathscr{E}+\mathscr{E}_{\mathrm{v}}-\mathscr{E}_{\mathrm{F}})/k_{\mathrm{B}}T}+1} \simeq \mathrm{e}^{(\mathscr{E}+\mathscr{E}_{\mathrm{v}}-\mathscr{E}_{\mathrm{F}})/k_{\mathrm{B}}T} \tag{14}$$

である．したがって，正孔の濃度 p は

$$\begin{aligned} p &= \int (1-f_0)\frac{\mathrm{d}\mathbf{k}}{4\pi^4} = \frac{1}{4\pi^3}\int \mathrm{e}^{(\mathscr{E}+\mathscr{E}_{\mathrm{v}}-\mathscr{E}_{\mathrm{F}})/k_{\mathrm{B}}T}\mathrm{d}\mathbf{k} = \frac{\mathrm{e}^{(\mathscr{E}_{\mathrm{v}}-\mathscr{E}_{\mathrm{F}})/k_{\mathrm{B}}T}}{4\pi^3}\int \mathrm{e}^{\mathscr{E}/k_{\mathrm{B}}T}\mathrm{d}\mathbf{k} \\ &\simeq \frac{\mathrm{e}^{(\mathscr{E}_{\mathrm{v}}-\mathscr{E}_{\mathrm{F}})/k_{\mathrm{B}}T}}{4\pi^3}\int \mathrm{e}^{-g(\theta,\phi)k^2/k_{\mathrm{B}}T}k^2\sin\theta\mathrm{d}k\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi \\ &= \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\mathrm{e}^{(\mathscr{E}_{\mathrm{v}}-\mathscr{E}_{\mathrm{F}})/k_{\mathrm{B}}T}}{4\pi^3}\int [g(\theta,\phi)]^{-3/2}\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi \end{aligned} \tag{15}$$

となる．[2]

これを積分するために，$g^{-3/2}$ を二項展開すると，

$$[g(\theta,\phi)]^{-3/2} = \left[\frac{\hbar^2(A\pm B')}{2m_0k_{\mathrm{B}}T}\right]^{-3/2}(1-\frac{3}{2}\gamma q+\frac{15}{8}\gamma^2q^2-\frac{35}{16}\gamma^3q^3+\cdots) \tag{16}$$

これを式 (15) に代入すると，

$$p = \frac{\mathrm{e}^{(\mathscr{E}_{\mathrm{v}}-\mathscr{E}_{\mathrm{F}})/k_{\mathrm{B}}T}}{16\pi^{5/2}}\left[\frac{2m_0k_{\mathrm{B}}T}{\hbar^2(A\pm B')}\right]^{3/2}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}(1-\frac{3}{2}\gamma q+\frac{15}{8}\gamma^2q^2-\frac{35}{16}\gamma^3q^3+\cdots)\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi \tag{17}$$

---

[1]

$$\cos^2\phi\sin^2\phi = \frac{1}{4}[(\cos^2\phi+\sin^2\phi)^2-(\cos^2\phi-\sin^2\phi)^2] = \frac{1}{4}[1-(\cos^2\phi-\sin^2\phi)^2] = \frac{1}{4}[1-\cos^4\phi+2\cos^2\phi\sin^2\phi-\sin^4\phi^2]$$

両辺を 2 倍してから移項すると，

$$\cos^2\phi\sin^2\phi = \frac{1}{2}(1-\cos^4\phi-\sin^4\phi)$$

となる．同様に

$$\cos^2\theta\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1-\cos^4\theta-\sin^4\theta)$$

も成り立つ．これを式 (10) に代入すると式 (11) が得られる．

[2] 次の積分公式を用いる．

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-ax^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

となる．これを項別に積分すると次式を得る．($\hbar$ が h に変わっていることに要注意．)

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{2\pi}\frac{(2\pi m_0 k_{\mathrm{B}}T)^{3/2}}{h^3}\mathrm{e}^{(\mathscr{E}_{\mathrm{v}}-\mathscr{E}_{\mathrm{F}})/k_{\mathrm{B}}T}(A\pm B')^{-3/2}\int(1-\frac{3}{2}\gamma q+\frac{15}{8}\gamma^2q^2-\frac{35}{16}\gamma^3q^3+\cdots)\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi && (18)\\ &= 2\frac{(2\pi m_0 k_{\mathrm{B}}T)^{3/2}}{h^3}\mathrm{e}^{(\mathscr{E}_{\mathrm{v}}-\mathscr{E}_{\mathrm{F}})/k_{\mathrm{B}}T}(A\pm B')^{-3/2}(1+\frac{1}{20}\gamma+\frac{165}{10080}\gamma^2+\frac{15715}{17297280}\gamma^3+\cdots) && (19)\\ &= 2\frac{(2\pi m_0 k_{\mathrm{B}}T)^{3/2}}{h^3}\mathrm{e}^{(\mathscr{E}_{\mathrm{v}}-\mathscr{E}_{\mathrm{F}})/k_{\mathrm{B}}T}(A\pm B')^{-3/2}(1+0.05\gamma+0.01636905\gamma^2+0.00090852\gamma^3+\cdots) && (20)\end{aligned}$$

この式は論文 [1] の Eq.(10) である計算の詳細は後に記す．論文の γ^2 の係数の小数点 5 桁はミスプリントである．式 (15) が論文の Eq.(8)，式 (16) が Eq.(9) となっており，式 (20) に至る煩瑣な計算は省略されている．この計算は煩瑣ではあるが，後に記すホール係数の計算の煩雑さに比べれば大したことではない．

4 導電率

導電率の計算は

$$J_i = -\sigma_{ij}E_j + \sigma_{ijl}E_jB_l + \sigma_{ijlm}E_jB_lB_m + \sigma_{ijlmn}E_jB_lB_mB_n + \cdots \tag{21}$$

として，

$$\sigma_{ij} = \frac{e^2}{4\pi^3\hbar^2}\int\tau\frac{\partial f_0}{\partial\mathscr{E}}\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial k_i}\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial k_j}\mathrm{d}\mathbf{k} \tag{22}$$

で与えられる（例えば 2015.9.21 の式 (29) を参照.）この計算は，正孔の濃度と比較しても，はるかに複雑かつ煩雑であるが，論文では，簡単に正孔濃度と同様に計算できるとのみ書いてあって結果の式しか示されていない．実はこれから記す計算量を見ればとても論文に記述できないことがわかる．ここではその計算過程をメモしておこう．

立方対称であるから，$i \neq j$ のとき $\sigma_{ij}=0$ となり，$\sigma_{11}=\sigma_{22}=\sigma_{33}$ である．したがって，$i=j=x$ の場合を計算すればよい．

計算には式 (11) が入ってくるので，k_i に関する偏微分を球座標にかんする偏微分に変換する必要がある．その変換は，

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial}{\partial k_x}\\ \dfrac{\partial}{\partial k_y}\\ \dfrac{\partial}{\partial k_z}\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\dfrac{\partial k}{\partial k_x} & \dfrac{\partial\theta}{\partial k_x} & \dfrac{\partial\phi}{\partial k_x}\\ \dfrac{\partial k}{\partial k_y} & \dfrac{\partial\theta}{\partial k_y} & \dfrac{\partial\phi}{\partial k_y}\\ \dfrac{\partial k}{\partial k_z} & \dfrac{\partial\theta}{\partial k_z} & \dfrac{\partial\phi}{\partial k_z}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial}{\partial k}\\ \dfrac{\partial}{\partial\theta}\\ \dfrac{\partial}{\partial\phi}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\dfrac{\partial k_x}{\partial k} & \dfrac{\partial k_y}{\partial k} & \dfrac{\partial k_z}{\partial k}\\ \dfrac{\partial k_x}{\partial\theta} & \dfrac{\partial k_y}{\partial\theta} & \dfrac{\partial k_z}{\partial\theta}\\ \dfrac{\partial k_x}{\partial\phi} & \dfrac{\partial k_y}{\partial\phi} & \dfrac{\partial k_z}{\partial\phi}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial}{\partial k}\\ \dfrac{\partial}{\partial\theta}\\ \dfrac{\partial}{\partial\phi}\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\cos\phi\sin\theta & \dfrac{1}{k}\cos\phi\cos\theta & -\dfrac{\sin\phi}{k\sin\theta}\\ \sin\phi\sin\theta & \dfrac{1}{k}\sin\phi\cos\theta & \dfrac{\cos\phi}{k\sin\theta}\\ \cos\theta & -\dfrac{1}{k}\sin\theta & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial}{\partial k}\\ \dfrac{\partial}{\partial\theta}\\ \dfrac{\partial}{\partial\phi}\end{pmatrix} && (23)\end{aligned}$$

を使う．ここで式が煩瑣になるのを避けるために，次の G と G_0 を用いる．

$$\mathscr{E} = -g(\theta,\phi)k^2 k_{\mathrm{B}}T = -G_0 k^2(1+\gamma q)k_{\mathrm{B}}T = Gk^2(1+\gamma q) \tag{24}$$

$$g = G_0(1+\gamma q) \tag{25}$$

$$G_0 = \frac{\hbar^2}{2m_0}\frac{A\pm B'}{k_{\mathrm{B}}T} \tag{26}$$

$$G = -G_0 k_{\mathrm{B}}T \tag{27}$$

そうすると，

$$\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial k} = -2kG_0(1+\gamma q)k_{\mathrm{B}}T \tag{28}$$

$$\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial\theta} = -k^2 G_0\gamma\frac{\partial q}{\partial\theta}k_{\mathrm{B}}T \tag{29}$$

$$\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial\phi} = -k^2 G_0\gamma\frac{\partial q}{\partial\phi}k_{\mathrm{B}}T \tag{30}$$

$$\tag{31}$$

である．立方対称性から σ_{ij} の式で $(\partial\mathscr{E}/\mathbf{k}_i)^2$ は $(\partial\mathscr{E}/\mathbf{k}_x)^2$，$(\partial\mathscr{E}/\mathbf{k}_y)^2$，$(\partial\mathscr{E}/\mathbf{k}_z)^2$ のいずれでも良いから，式が簡単な $(\partial\mathscr{E}/\mathbf{k}_z)^2$ を計算することにしよう．

$$\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial k_z} = \cos\theta\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial k} - \frac{\sin\theta}{k}\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial\theta} \tag{32}$$

$$= -G_0 k_{\mathrm{B}}Tk[2\cos\theta(1+\gamma q) + \gamma\sin\theta\frac{\partial q}{\partial\theta}] \tag{33}$$

$$= -G_0 k_{\mathrm{B}}TkQ \tag{34}$$

ただし，

$$Q = 2\cos\theta(1+\gamma q) + \gamma\sin\theta\frac{\partial q}{\partial\theta} \tag{35}$$

である．以上の式と，$f_0 = 1 - \mathrm{e}^{(\mathscr{E}+\mathscr{E}_{\mathrm{v}}-\mathscr{E}_{\mathrm{F}})/k_{\mathrm{B}}T}$，$\tau = l|\mathscr{E}|^{-\lambda}$ などを式 (22) に代入すると，

$$\sigma_{ii} = \frac{e^2 l}{4\pi^3\hbar}G_0^2 k_{\mathrm{B}}T\mathrm{e}^{(\mathscr{E}_{\mathrm{v}}-\mathscr{E}_{\mathrm{F}})/k_{\mathrm{B}}T}\int \mathrm{e}^{-gk^2}\mathscr{E}^{-\lambda}k^2Q^2k^2\mathrm{d}\Omega \tag{36}$$

となる．$\mathrm{d}\Omega = \sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$ である．ここで，$gk^2 = t$ と変数変換すると，$\mathscr{E} = -tk_{\mathrm{B}}T$ などとなり，積分は

$$\sigma_{ii} = \frac{e^2 l}{8\pi^3\hbar^2}G_0^2(k_{\mathrm{B}}T)^{1-\lambda}\mathrm{e}^{(\mathscr{E}_{\mathrm{v}}-\mathscr{E}_{\mathrm{F}})/k_{\mathrm{B}}T}\int \mathrm{e}^{-t}t^{3/2-\lambda}g^{-5/2}Q^2\mathrm{d}t\mathrm{d}\Omega \tag{37}$$

$$= \frac{e^2 l}{8\pi^3\hbar^2}G_0^{-1/2}(k_{\mathrm{B}}T)^{1-\lambda}\mathrm{e}^{(\mathscr{E}_{\mathrm{v}}-\mathscr{E}_{\mathrm{F}})/k_{\mathrm{B}}T}\int \Gamma(5/2-\lambda)(1+\gamma q)^{-5/2}Q^2\mathrm{d}\Omega \tag{38}$$

$$= \frac{e^2 l}{8\pi^3\hbar^2}\left[\frac{\hbar^2}{2m_0}(A\pm B')\right]^{-1/2}(k_{\mathrm{B}}T)^{3/2-\lambda}\mathrm{e}^{(\mathscr{E}_{\mathrm{v}}-\mathscr{E}_{\mathrm{F}})/k_{\mathrm{B}}T}\Gamma(5/2-\lambda)\int(1+\gamma q)^{-5/2}Q^2\mathrm{d}\Omega \tag{39}$$

$$= \frac{e^2 l}{8\pi^3\hbar^3}(2m_0k_{\mathrm{B}}T)^{3/2}\frac{1}{2m_0}\mathrm{e}^{(\mathscr{E}_{\mathrm{v}}-\mathscr{E}_{\mathrm{F}})/k_{\mathrm{B}}T}\Gamma(5/2-\lambda)(k_{\mathrm{B}}T)^{-\lambda}(A\pm B')^{-1/2}I \tag{40}$$

となる．ただし，

$$\begin{aligned} I &= \int(1+\gamma q)^{-5/2}Q^2\mathrm{d}\Omega = \int(1+\gamma q)^{-5/2}\left[2\cos\theta(1+\gamma q)+\gamma\sin\theta\frac{\partial q}{\partial\theta}\right]^2\mathrm{d}\Omega \\ &= \int\left[4\cos^2\theta(1+\gamma q)^{-1/2} + 4\sin\theta\cos\theta\gamma(1+\gamma q)^{-3/2}\frac{\partial q}{\partial\theta} + \gamma^2\sin^2\theta\left(\frac{\partial q}{\partial\theta}\right)^2(1+\gamma q)^{-5/2}\right]\mathrm{d}\Omega \end{aligned} \tag{41}$$

である．最終的にこの積分 I を計算して γ の冪級数にすればよい．

I を計算するために，まず $(1+\gamma q)^{-5/2}$ を二項展開しておく．

$$(1+\gamma q)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}(\gamma q) + \frac{3}{8}(\gamma q)^2 - \frac{5}{16}(\gamma q)^3 + \frac{35}{128}(\gamma q)^4 - \frac{63}{256}(\gamma q)^5 + \cdots \tag{42}$$

$$(1+\gamma q)^{-3/2} = 1 - \frac{3}{2}(\gamma q) + \frac{15}{8}(\gamma q)^2 - \frac{35}{16}(\gamma q)^3 + \frac{315}{128}(\gamma q)^4 - \frac{693}{256}(\gamma q)^5 + \cdots \tag{43}$$

$$(1+\gamma q)^{-5/2} = 1 - \frac{5}{2}(\gamma q) + \frac{35}{8}(\gamma q)^2 - \frac{105}{16}(\gamma q)^3 + \frac{1155}{128}(\gamma q)^4 - \frac{3003}{256}(\gamma q)^5 + \cdots \tag{44}$$

これを式 (45) に代入し，γ の巾乗にすると，$I = \sum S_i \gamma^i$ の係数 S_i は次のようになる．

$$S_0 = 4\cos^2\theta \tag{45}$$

$$S_1 = 4\cos^2\theta\left(-\frac{1}{2}\right)q + 4\sin\theta\cos\theta\frac{\partial q}{\partial\theta} \tag{46}$$

$$S_2 = 4\cos^2\theta\left(\frac{3}{8}\right)q^2 + 4\sin\theta\cos\theta\left(-\frac{3}{2}\right)q\frac{\partial q}{\partial\theta} + \sin^2\theta\left(\frac{\partial q}{\partial\theta}\right)^2 \tag{47}$$

$$S_3 = 4\cos^2\theta\left(-\frac{5}{16}\right)q^3 + 4\sin\theta\cos\theta\left(\frac{15}{8}\right)q^2\frac{\partial q}{\partial\theta} + \sin^2\theta\left(\frac{\partial q}{\partial\theta}\right)^2\left(-\frac{5}{2}\right)q \tag{48}$$

$$S_4 = 4\cos^2\theta\left(\frac{35}{128}\right)q^4 + 4\sin\theta\cos\theta\left(-\frac{35}{16}\right)q^3\frac{\partial q}{\partial\theta} + \sin^2\theta\left(\frac{\partial q}{\partial\theta}\right)^2\left(\frac{35}{8}\right)q^2 \tag{49}$$

$$S_5 = 4\cos^2\theta\left(-\frac{63}{256}\right)q^5 + 4\sin\theta\cos\theta\left(\frac{35}{128}\right)q^4\frac{\partial q}{\partial\theta} + \sin^2\theta\left(\frac{\partial q}{\partial\theta}\right)^2\left(-\frac{105}{16}\right)q^3 \tag{50}$$

この S_i を積分すると次の導電率に関する表式が得られる．計算の詳細は後に示す．

$$\begin{aligned}
\sigma_{ii} &= \frac{e^2 l}{8\pi^3\hbar^3}(2m_0k_\mathrm{B}T)^{3/2}\frac{1}{2m_0}\mathrm{e}^{(\mathscr{E}_\mathrm{v}-\mathscr{E}_\mathrm{F})/k_\mathrm{B}T}\Gamma(5/2-\lambda)(k_\mathrm{B}T)^{-\lambda}(A\pm B')^{-1/2} \\
&\times\left(\frac{16}{3}\pi + \frac{8}{90}\pi\gamma + \frac{139}{630}\pi\gamma^2 + \frac{3137}{648648}\pi\gamma^3 + \frac{370445}{75613824}\pi\gamma^4 + \frac{215119}{1915550208}\pi\gamma^5 + \cdots\right) \qquad (51)\\
&= \frac{8}{3\sqrt{\pi}}\left(\frac{2\pi m_0k_\mathrm{B}T}{h^2}\right)^{3/2}\mathrm{e}^{(\mathscr{E}_\mathrm{v}-\mathscr{E}_\mathrm{F})/k_\mathrm{B}T}\frac{e^2 l}{m_0}\Gamma(5/2-\lambda)(k_\mathrm{B}T)^{-\lambda}(A\pm B')^{-1/2} \\
&\times\left(1 + \frac{1}{60}\gamma + \frac{139}{3360}\gamma^2 + \frac{3137}{3459456}\gamma^3 + \frac{370445}{403273728}\gamma^4 + \frac{215119}{10216267776}\gamma^5 + \cdots\right) \qquad (52)\\
&= \frac{8}{3\sqrt{\pi}}\left(\frac{2\pi m_0k_\mathrm{B}T}{h^2}\right)^{3/2}\mathrm{e}^{(\mathscr{E}_\mathrm{v}-\mathscr{E}_\mathrm{F})/k_\mathrm{B}T}\frac{e^2 l}{m_0}\Gamma(5/2-\lambda)(k_\mathrm{B}T)^{-\lambda}(A\pm B')^{-1/2} \\
&\times\left(1 + 0.01666667\gamma + 0.04136905\gamma^2 + 0.00090679\gamma^3 + 0.0009185944\gamma^4 + 0.0000210565\gamma^5 + \cdots\right) \qquad (53)
\end{aligned}$$

この最後の式は論文の Eq.(11) である．論文の γ^4 の係数の小数点第 6 桁はミスプリントである．

5　ホール係数

ホール係数はテンソル形式を用いて次式で与えられる（例えば 2015.9.21 の式 (30) を参照.）

$$\sigma_{ikl} = \frac{e^3}{4\pi^3\hbar^4}\int \tau\frac{\partial f_0}{\partial\mathscr{E}}\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial k_i}\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial k_r}\frac{\partial}{\partial k_s}\left(\tau\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial k_k}\right)\epsilon_{lrs}\mathrm{d}\mathbf{k} \tag{54}$$

立方対称であるので，$\partial\mathscr{E}/\partial k_i$ は奇関数となり，$i=1$，$k=2$ とすれば，$l=1$ と $l=2$ の場合は式 (54) の積分は 0 になる．$l=3$ のみ 0 にならずに残り，$r=1$，$s=2$ または $r=2$，$s=1$ となる．したがって，

$$\sigma_{123} = \frac{e^3}{4\pi^3\hbar^4}\int \tau\frac{\partial f_0}{\partial\mathscr{E}}\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial k_1}\left(\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial k_1}\frac{\partial}{\partial k_2} - \frac{\partial\mathscr{E}}{\partial k_2}\frac{\partial}{\partial k_1}\right)\left(\tau\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial k_2}\right)\mathrm{d}\mathbf{k} \tag{55}$$

となる．立方対称であるから，!, 2, 3 を cyclic に変えても積分は変わらない．そこで，

$$\sigma_{231} = \frac{e^3}{4\pi^3\hbar^4}\int \tau\frac{\partial f_0}{\partial \mathscr{E}}\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial k_2}\left(\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial k_2}\frac{\partial}{\partial k_3} - \frac{\partial \mathscr{E}}{\partial k_3}\frac{\partial}{\partial k_2}\right)\left(\tau\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial k_3}\right)\mathrm{d}\mathbf{k} \tag{56}$$

を考えよう．これは，極座標にした場合，$\partial/\partial k_z$ が最も簡単で計算が楽になると考えられるからである．

$\mathscr{E}$ が極座標で表されているので，上の式を極座標に変換する．まず，

$$\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial k_y}\frac{\partial}{\partial k_z} - \frac{\partial \mathscr{E}}{\partial k_z}\frac{\partial}{\partial k_y} \tag{57}$$

から計算しよう．式 (23) より，

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial k_y}\frac{\partial}{\partial k_z} &= \left(\sin\phi\sin\theta\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial k} + \frac{1}{k}\sin\phi\sin\theta\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \theta} + \frac{\cos\phi}{k\sin\theta}\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \theta}\right)\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial k} - \frac{1}{k}\sin\theta\frac{\partial}{\partial \theta}\right)\\
\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial k_z}\frac{\partial}{\partial k_y} &= \left(\cos\theta\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial k} - \frac{1}{k}\sin\theta\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \theta}\right)\left(\sin\phi\sin\theta\frac{\partial}{\partial k} + \frac{1}{k}\sin\phi\sin\theta\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\cos\phi}{k\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\right)
\end{aligned}$$

となるので，式 (57) で，

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial k}\frac{\partial}{\partial k}\text{の係数} = 0 & &\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial k}\frac{\partial}{\partial \theta}\text{の係数} = -\frac{1}{k}\sin\phi\\
&\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial k}\text{の係数} = \frac{1}{k}\sin\phi & &\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\text{の係数} = 0\\
&\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \phi}\frac{\partial}{\partial k}\text{の係数} = \frac{1}{k}\cot\theta\cos\phi & &\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \phi}\frac{\partial}{\partial \theta}\text{の係数} = -\frac{1}{k^2}\cos\phi\\
&\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial k}\frac{\partial}{\partial \phi}\text{の係数} = \frac{1}{k}\cot\theta\cos\phi & &\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial \phi}\text{の係数} = -\frac{1}{k^2}\cos\phi
\end{aligned}$$

以上の式および式 (**??**) に式 (**??**) を代入すると，

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial k_y}\frac{\partial}{\partial k_z} - \frac{\partial \mathscr{E}}{\partial k_z}\frac{\partial}{\partial k_y}\right)\left(\tau\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial k_z}\right)\\
&= G^2k\tau\gamma\left(\sin\phi\frac{\partial q}{\partial \theta} + \cot\theta\cos\phi\frac{\partial q}{\partial \phi}\right)\left[2\cos\theta + \gamma\left(2q\cos\theta - \sin\theta\frac{\partial q}{\partial \theta}\right)\right]\\
&+ G^2k\tau\left[-2\sin\phi(1+\gamma q) - \gamma\frac{\partial q}{\partial \theta}\cos\phi\right]\left[-2\sin\theta + \gamma\left(-2q\sin\theta + \frac{\partial q}{\partial \theta}\cos\theta - \frac{\partial^2 q}{\partial \theta^2}\sin\theta\right)\right]\\
&+ G^2k\tau\gamma\left[2\cot\theta\cos\phi + \gamma\left(2q\cot\theta\cos\phi - \cos\phi\frac{\partial q}{\partial \theta}\right)\right]\left(2\cos\theta\frac{\partial q}{\partial \phi} - \sin\theta\frac{\partial^2 q}{\partial \phi\partial \theta}\right) \qquad (58)\\
&= G^2k\tau(b_0 + b_1\gamma + b_2\gamma^2) \qquad (59)
\end{aligned}$$

となる．ただし，

$$b_0 = 4\sin\phi\sin\theta \tag{60}$$

$$b_1 = 8q\sin\phi\sin\theta + 2\frac{\partial q}{\partial \theta}\cos\phi\sin\theta + 6\frac{\partial q}{\partial \phi}\cos\phi\cos\theta\cot\theta + 2\frac{\partial^2 q}{\partial \theta^2}\sin\phi\sin\theta - 2\frac{\partial^2 q}{\partial \phi\partial \theta}\cos\phi\cos\theta \tag{61}$$

$$\begin{aligned}
b_2 &= \left(\frac{\partial q}{\partial \theta}\sin\phi + \frac{\partial q}{\partial \phi}\cos\phi\cot\theta\right)\left(2q\cos\theta - \frac{\partial q}{\partial \theta}\sin\theta\right) + \left(2q\sin\phi + \frac{\partial q}{\partial \theta}\cos\phi\right)\left(2q\sin\theta - \frac{\partial q}{\partial \theta}\cos\theta + \frac{\partial^2 q}{\partial \theta^2}\sin\theta\right)\\
&+ \left(2q\cos\phi\cot\theta - \frac{\partial q}{\partial \theta}\cos\phi\right)\left(2\frac{\partial q}{\partial \phi}\cos\theta - \frac{\partial^2 q}{\partial \phi\partial \theta}\sin\theta\right) \qquad (62)
\end{aligned}$$

である．また，

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial k_y} &= \sin\phi\sin\theta\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial k} + \frac{1}{k}\sin\phi\cos\theta\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \theta} + \frac{\cos\phi}{k\sin\theta}\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \phi}\\
&= 2Gk\sin\phi\sin\theta + Gk\gamma\left(2q\sin\phi\sin\theta + \sin\phi\cos\theta\frac{\partial q}{\partial \theta} + \frac{\cos\phi}{\sin\theta}\frac{\partial q}{\partial \phi}\right) \qquad (63)\\
&= Gk(a_0 + a_1\gamma) \qquad (64)
\end{aligned}$$

ただし，

$$a_0 = 2\sin\phi\sin\theta \tag{65}$$

$$a_1 = 2q\sin\phi\sin\theta + \sin\phi\cos\theta\frac{\partial q}{\partial\theta} + \frac{\cos\phi}{\sin\theta}\frac{\partial q}{\partial\phi} \tag{66}$$

である．以上の式を用いると式 (56) は

$$\sigma_{231} = -\frac{e^3}{4\pi^3\hbar^4}\int\frac{\tau}{k_\mathrm{B}T}\mathrm{e}^{(\mathscr{E}_\mathrm{v}-\mathscr{E}_\mathrm{F})/k_\mathrm{B}T}\mathrm{e}^{\mathscr{E}/k_\mathrm{B}T}G^3k^2\tau(a_0+a_1\gamma)(b_0+b_1\gamma+b_2\gamma^2)\mathrm{d}\mathbf{k} \tag{67}$$

$$= -\frac{e^3}{4\pi^3\hbar^4 k_\mathrm{B}T}\mathrm{e}^{(\mathscr{E}_\mathrm{v}-\mathscr{E}_\mathrm{F})/k_\mathrm{B}T}\int\tau^2\mathrm{e}^{-gk^2}G^3k^2\tau Z(\theta,\phi)\mathrm{d}\mathbf{k} \tag{68}$$

$$\tag{69}$$

となる．ここで，

$$Z(\theta,\phi) = (a_0+a_1\gamma)(b_0+b_1\gamma+b_2\gamma^2) \tag{70}$$

とおいた．さらに，

$$gk^2 = t \tag{71}$$

とおくと，

$$\sigma_{231} = -\frac{e^3l^2}{4\pi^3\hbar^4k_\mathrm{B}T}\mathrm{e}^{(\mathscr{E}_\mathrm{v}-\mathscr{E}_\mathrm{F})/k_\mathrm{B}T}\int(tk_\mathrm{B}T)^{-2\lambda}\mathrm{e}^{-t}(-G_0k_\mathrm{B}T)^3(t/g)^2\frac{1}{2}(gt)^{-1/2}Z(\theta,\phi)\mathrm{d}t\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi \tag{72}$$

$$= \frac{e^3l^2}{4\pi^3\hbar^4k_\mathrm{B}T}\mathrm{e}^{(\mathscr{E}_\mathrm{v}-\mathscr{E}_\mathrm{F})/k_\mathrm{B}T}\int t^{3/2-2\lambda}\mathrm{e}^{-t}(k_\mathrm{B}T)^{3-2\lambda}g^{-5/2}G_0^3\frac{1}{2}Z(\theta,\phi)\mathrm{d}t\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi \tag{73}$$

$$= \frac{e^3l^2}{8\pi^3\hbar^4}\mathrm{e}^{(\mathscr{E}_\mathrm{v}-\mathscr{E}_\mathrm{F})/k_\mathrm{B}T}(k_\mathrm{B}T)^{2-2\lambda}\Gamma(\frac{5}{2}-2\lambda)\int(1+\gamma q)^{-5/2}G_0^{1/2}Z(\theta,\phi)\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi \tag{74}$$

$$= \frac{e^3l^2}{8\pi^3\hbar^3}\mathrm{e}^{(\mathscr{E}_\mathrm{v}-\mathscr{E}_\mathrm{F})/k_\mathrm{B}T}(k_\mathrm{B}T)^{3/2-2\lambda}\Gamma(\frac{5}{2}-2\lambda)\frac{(A\pm B')^{1/2}}{(2m_0)^{1/2}}\int(1+\gamma q)^{-5/2}Z(\theta,\phi)\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi \tag{75}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{e^3l^2}{h^3(2m_0)^{1/2}}\mathrm{e}^{(\mathscr{E}_\mathrm{v}-\mathscr{E}_\mathrm{F})/k_\mathrm{B}T}(k_\mathrm{B}T)^{3/2-2\lambda}\Gamma(\frac{5}{2}-2\lambda)(A\pm B')^{1/2} \\ &\times\int\left[\left(1-\frac{5}{2}\gamma q+\frac{35}{8}\gamma^2q^2-\frac{105}{16}\gamma^3q^3+\frac{1155}{128}\gamma^4q^4\cdots\right)(a_0+a_1\gamma)(b_0+b_1\gamma+b_2\gamma^2)\right]\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi \end{aligned} \tag{76}$$

となり，残りは γ の冪級数になり，その係数は θ と ϕ に関する積分である．積分計算の詳細は後に記すとして，結果は次のようになる．

$$\begin{aligned} \sigma_{231} = \frac{32\pi}{3}\frac{e^3l^2}{h^3(2m_0)^{1/2}}\mathrm{e}^{(\mathscr{E}_\mathrm{v}-\mathscr{E}_\mathrm{F})/k_\mathrm{B}T}(k_\mathrm{B}T)^{3/2-2\lambda}\Gamma(\frac{5}{2}-2\lambda)(A\pm B')^{1/2}(1-0.01667\gamma+0.017956\gamma^2 \\ -0.0069857\gamma^3+0.0012610\gamma^4\cdots) \end{aligned} \tag{77}$$

この式は論文 [1] の Eq.(12) である．このように，エネルギーが立方対称性を有する場合の導電率，ホール係数は異方性のパラメータが知られれば計算できる．

6　正孔の濃度の式 (18) の積分計算

積分の項のみを示す．

- γ^0 の係数

$$I_0 = \int_0^\pi\int_0^{2\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi = 4\pi$$

- γ^1 の係数

$$I_1 = -\frac{3}{2}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} q\sin\theta \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$$

まず，$w = \cos^4\phi + \sin^4\phi$ を次のように整理する．

$$w = \cos^4\phi + \sin^4\phi = \left(\frac{1+\cos 2\phi}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+\cos 2\phi}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}(1+\cos^2 2\phi) = \frac{1}{4}(3+\cos 4\phi) \tag{78}$$

したがって，

$$\int_0^{2\pi} w\mathrm{d}\phi = \frac{3}{4}2\pi$$

である．$\cos\theta = z$ とおき，係数を除いた q の積分を計算する．

$$\begin{aligned}\int q\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left[w\sin^4\theta + \cos^4\theta - \frac{2}{3}\right]\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left[\frac{3}{4}(1-z^2)^2 + z^4 - \frac{2}{3}\right]2\pi\mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left[\frac{7}{4}z^4 - \frac{3}{2}z^2 + \frac{1}{12}\right]2\pi\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\left[\frac{7}{10} - 1 + \frac{1}{6}\right]2\pi = -\frac{2}{15}\pi\end{aligned}$$

したがって，

$$I_1 = \frac{-3}{2}\frac{-2}{15}\pi = \frac{1}{20}4\pi$$

となる．

- γ^2 の係数

まず，

$$\int_0^{2\pi} w^2\mathrm{d}\phi = \int_0^{2\pi}\frac{1}{32}(19 + 12\cos 4\phi + \cos 8\phi)\mathrm{d}\phi = \frac{19}{32}2\pi$$

となる．したがって，

$$\begin{aligned}\int q^2\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi &= \frac{1}{4}\int_{-1}^{1}\left[w\sin^4\theta + \cos^4\theta - \frac{2}{3}\right]^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi \\ &= \frac{1}{4}\int_{-1}^{1}\left[\frac{19}{32}(1-z^2)^4 + 2\frac{3}{4}(z^4 - \frac{2}{3})(1-z^2)^2 + (z^2 - \frac{2}{3})^2\right]2\pi\mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{4}\int_{-1}^{1}\left[\frac{99}{16}z^8 - \frac{43}{4}z^6 + \frac{131}{24}z^4 - \frac{3}{4}z^2 + \frac{11}{144}\right]2\pi\mathrm{d}z \\ &= \frac{11}{315}\pi = \frac{11}{1260}4\pi\end{aligned}$$

となる．これより，

$$I_2 = \frac{15}{8}\frac{11}{1260}\pi = \frac{165}{10080}4\pi$$

が得られる．

- γ^3 の係数

これまでと同様に，まず，

$$\int_0^{2\pi} w^3\mathrm{d}\phi = \int_0^{2\pi}\frac{1}{128}(63 + 55\cos 4\phi + 9\cos 8\phi + \cos 8\phi\cos 4\phi)\mathrm{d}\phi = \frac{63}{128}2\pi$$

を導いておく．これを用いると，

$$\begin{aligned}\int q^3\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi &= \frac{1}{8}\int_{-1}^{1}\left[w\sin^4\theta+\cos^4\theta-\frac{2}{3}\right]^3\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi\\ &= \frac{1}{8}\int_{-1}^{1}\left[\frac{63}{128}(1-z^2)^6+3\frac{19}{32}(1-z^2)^4(z^4-\frac{2}{3})+3\frac{3}{4}(1-z^2)^2(z^2-\frac{2}{3})^2+(z^2-\frac{2}{3})^3\right]2\pi\mathrm{d}z\\ &= \frac{1}{8}\int_{-1}^{1}\left[\frac{707}{128}z^{12}-\frac{933}{64}z^{10}+\frac{1809}{128}z^8-\frac{199}{32}z^6+\frac{527}{384}z^4-\frac{13}{64}z^2+\frac{29}{3456}\right]2\pi\mathrm{d}z\\ &= \frac{1}{8}\left(-\frac{898}{135135}\right)2\pi=-\frac{449}{1081080}4\pi\end{aligned}$$

となる．これより

$$I_3=\left(-\frac{35}{16}\right)\left(-\frac{449}{1081080}\right)4\pi=\frac{15715}{17297280}4\pi$$

が得られる．

7 導電率の式 (51) の積分計算

項別積分を示す前に，$w=\cos^4\phi+\sin^4\phi$ の巾乗の ϕ に関する積分を計算しておこう．式 (78) から，

$$\int_0^{2\pi}w\mathrm{d}\phi=\int\frac{1}{4}(3+\cos4\phi)\mathrm{d}\phi=\frac{3}{4}2\pi=\frac{3}{2}\pi \tag{79}$$

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}w^2\mathrm{d}\phi &= \int\frac{1}{16}(3+\cos4\phi)^2\mathrm{d}\phi=\int\frac{1}{16}(9+6\cos4\phi+\cos^2 4\phi)\mathrm{d}\phi\\ &= \int\frac{1}{32}(19+12\cos4\phi+\cos8\phi)\mathrm{d}\phi=\frac{19}{32}2\pi=\frac{19}{16}\pi\end{aligned} \tag{80}$$

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}w^3\mathrm{d}\phi &= \int\frac{1}{4}(3+\cos4\phi)\frac{1}{32}(19+12\cos4\phi+\cos8\phi)\mathrm{d}\phi\\ &= \int\frac{1}{128}(63+55\cos4\phi+9\cos8\phi+\cos4\phi\cos8\phi)=\frac{63}{128}2\pi=\frac{63}{64}\pi\end{aligned} \tag{81}$$

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}w^4\mathrm{d}\phi &= \int\frac{1}{1024}(19+4\cos4\phi+\cos8\phi)^2\mathrm{d}\phi\\ &= \int\frac{1}{2048}(867+912\cos4\phi+216\cos8\phi+\cos16\phi+48\cos4\phi\cos8\phi)\mathrm{d}\phi\\ &= \frac{867}{2048}2\pi=\frac{867}{1024}\pi\end{aligned} \tag{82}$$

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}w^5\mathrm{d}\phi &= \int\frac{1}{4}(3+\cos4\phi)\frac{1}{2048}(867+912\cos4\phi+216\cos8\phi+\cos16\phi+48\cos4\phi\cos8\phi)\mathrm{d}\phi\\ &= \int\frac{1}{2048}(3069+3675\cos4\phi+1116\cos8\phi+3\cos16\phi+72\cos12\phi+216\cos4\phi+\cos4\phi+24\cos4\phi\cos12\phi)\\ &= \frac{3069}{8192}2\pi=\frac{3069}{4096}\pi\end{aligned} \tag{83}$$

以下の積分で w^n の ϕ に関する積分にはここの結果を用いる．また，次の関係式を用いる．各係数の第 2 項は 0 になる．一般的にこれを証明できそうに考えられるが，差し当たってできていない．θ 単独の積分，あるいは ϕ 単独の積分では 0 にならない．

$$\frac{\partial q}{\partial\theta}=2\sin\theta\cos\theta[w\sin^2\theta-\cos^2\theta] \tag{84}$$

- γ^0 の係数

$$I_0 = \int 4\cos^2\theta\sin\theta \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi = \int 4z^2 \mathrm{d}z\mathrm{d}\phi = \frac{16}{3}\pi$$

- γ^1 の係数の第 1 項 I_{1-1}，第 1 項 I_{1-2}

$$\begin{aligned}
I_{1-1} &= \int -2\cos^2\theta q \sin\theta \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi = -\int \cos^2\theta\left(w\sin^4\theta + \cos^4\theta - \frac{2}{3}\right)\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi \\
&= -\int\left(z^4w + z^6 - \frac{2}{3}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}\phi = -\int\left(\frac{3}{4}z^2(1-z^2)^2 + z^6 - \frac{2}{3}z^2\right)2\pi\mathrm{d}z \\
&= -\int\left(\frac{7}{4}z^6 - \frac{3}{2}z^4 + \frac{1}{12}z^2\right)2\pi = -\left(\frac{14}{28} - \frac{6}{10} + \frac{2}{36}\right)2\pi = \frac{8}{90}\pi \\
I_{1-2} &= \int 4\sin\theta\cos\theta\frac{\partial q}{\partial\theta}\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi = 8\sin^2\theta\cos^2\theta[w\sin^2\theta - \cos^2\theta]\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi \\
&= \int 8[w(z^6 - 2z^4 + z^2) + (z^6 - z^4)]\mathrm{d}z\mathrm{d}\phi = 8\left[\frac{3}{4}\left(\frac{2}{7} - \frac{4}{5} + \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{7} - \frac{2}{5}\right)\right]2\pi = 0 \\
I_1 &= I_{1-1} + I_{1-2} = \frac{8}{90}\pi = \frac{16\pi}{3}\frac{1}{60}
\end{aligned}$$

- γ^2 の係数の第 1 項 I_{2-1}，第 1 項 I_{2-2}，第 1 項 I_{2-3}

$$\begin{aligned}
I_{2-1} &= \int\frac{3}{2}\cos^2\theta\ q^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi = \int\frac{3}{8}z^2\left[w(1-z^2)^2 + z^4 - \frac{2}{3}\right]^2\mathrm{d}z\mathrm{d}\phi \\
&= \int\frac{3}{8}\left[w^2(z^{10} - 4z^8 + 6z^6 - 4z^4 + z^2) + w\left(2z^{10} - 4z^8 + \frac{2}{3}z^6 + \frac{8}{3}z^4 - \frac{4}{3}z^2\right)\right. \\
&+ \left.\left(z^{10} - \frac{4}{3}z^6 + \frac{4}{9}z^2\right)\right]\mathrm{d}z\mathrm{d}\phi \\
&= \frac{3}{8}\left[\frac{19}{32}\left(\frac{2}{11} - \frac{8}{9} + \frac{12}{7} - \frac{8}{5} + \frac{2}{3}\right) + \frac{3}{4}\left(\frac{4}{11} - \frac{8}{9} + \frac{4}{21} + \frac{8}{15} - \frac{4}{9}\right) + \left(\frac{2}{11} - \frac{8}{21} + \frac{8}{27}\right)\right]2\pi \\
&= \frac{11}{630}\pi \\
I_{2-2} &= \int -6\sin\theta\cos\theta q\frac{\partial q}{\partial\theta}\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi \\
&= \int -6z^2(1-z^2)\left[w(1-z^2)^2 + z^4 - \frac{2}{3}\right][w(1-z^2) - z^2]\mathrm{d}z\mathrm{d}\phi \\
&= \int 6\left[w^2(z^{10} - 4z^8 + 6z^6 - 4z^4 + z^2) + w\left(2z^{10} - 5z^8 + \frac{10}{3}z^6 + \frac{1}{3}z^4 - \frac{2}{3}z^2\right)\right. \\
&+ \left.\left(z^{10} - z^8 - \frac{2}{3}z^6 + \frac{2}{3}z^2\right)\right]\mathrm{d}z\mathrm{d}\phi \\
&= 6\left[\frac{19}{32}\left(\frac{2}{11} - \frac{8}{9} + \frac{12}{7} - \frac{8}{5} + \frac{2}{3}\right) + \frac{3}{4}\left(\frac{4}{11} - \frac{10}{9} + \frac{20}{21} + \frac{2}{15} - \frac{4}{9}\right) + \left(\frac{2}{11} - \frac{2}{9} - \frac{4}{21} + \frac{4}{15}\right)\right]2\pi \\
&= 0 \\
I_{2-3} &= \int\sin^2\theta\left(\frac{\partial q}{\partial\theta}\right)^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi = \int 4(1-z^2)^2z^2[w(1-z^2) - z^2]^2\mathrm{d}z\mathrm{d}\phi \\
&= \int 4\left[w^2(z^{10} - 4z^8 + 6z^6 - 4z^4 + z^2) + w\left(2z^{10} - 6z^8 + 6z^6 - 2z^4\right) + \left(z^{10} - 2z^8 + z^6\right)\right]\mathrm{d}z\mathrm{d}\phi \\
&= 8\pi\left[\frac{19}{32}\left(\frac{2}{11} - \frac{8}{9} + \frac{12}{7} - \frac{8}{5} + \frac{2}{3}\right) + \frac{3}{4}\left(\frac{4}{11} - \frac{12}{9} + \frac{12}{7} - \frac{2}{5}\right) + \left(\frac{2}{11} - \frac{4}{9} + \frac{2}{7}\right)\right]2\pi = \frac{64}{315}\pi \\
I_2 &= I_{2-1} + I_{2-2} + I_{2-3} = \frac{139}{630}\pi = \frac{16\pi}{3}\frac{139}{3360}
\end{aligned}$$

● γ^3 の係数の第 1 項 I_{3-1}，第 1 項 I_{3-2}，第 1 項 I_{3-3}

$$
\begin{aligned}
I_{3-1} &= \int -\frac{5}{4}\cos^2\theta\ q^3 \sin\theta \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi = \int -\frac{5}{32}z^2\left[w(1-z^2)^2+z^4-\frac{2}{3}\right]^3 \mathrm{d}z\mathrm{d}\phi \\
&= \int -\frac{5}{32}\left[w^3(z^{14}-6z^{12}+15z^{10}-20z^8+15z^6-6z^4+z^2)\right. \\
&+ 3w^2\left(z^{14}-4z^{12}+\frac{16}{3}z^{10}-\frac{4}{3}z^8-3z^6+\frac{8}{3}z^4-\frac{2}{3}z^2\right) \\
&+ 3w\left(z^{14}-2z^{12}-\frac{1}{3}z^{10}+\frac{8}{3}z^8-\frac{8}{9}z^6-\frac{8}{9}z^4+\frac{4}{9}z^2\right)+\left.\left(z^{14}-2z^{10}+\frac{4}{3}z^6-\frac{8}{27}z^2\right)\right]\mathrm{d}z\mathrm{d}\phi \\
&= -\frac{5\pi}{16}\left[\frac{63}{128}\left(\frac{2}{15}-\frac{12}{13}+\frac{30}{11}-\frac{40}{9}+\frac{30}{7}-\frac{12}{5}+\frac{2}{3}\right)\right. \\
&+ \frac{57}{32}\left(\frac{2}{15}-\frac{8}{13}+\frac{32}{33}-\frac{8}{27}-\frac{6}{7}-\frac{16}{15}-\frac{4}{9}\right) \\
&+ \frac{9}{4}\left(\frac{2}{15}-\frac{4}{13}-\frac{2}{33}+\frac{16}{27}-\frac{16}{63}-\frac{16}{45}+\frac{8}{27}\right)\left.\left(\frac{2}{15}-\frac{4}{11}+\frac{8}{21}-\frac{16}{81}\right)\right]2\pi = \frac{449\pi}{648648} \\
I_{3-2} &= \int \frac{15}{2}\sin\theta\cos\theta q^2\frac{\partial q}{\partial\theta}\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi \\
&= \int \frac{15}{2}z^2(1-z^2)\left[w(1-z^2)^2+z^4-\frac{2}{3}\right]^2[w(1-z^2)-z^2]\mathrm{d}z\mathrm{d}\phi \\
&= \int \frac{15}{2}\left[w^3(\frac{1}{2}z^{14}-3z^{12}+\frac{15}{2}z^{10}-10z^8+\frac{15}{2}z^6-3z^4+\frac{1}{2}z^2)\right. \\
&+ w^2\left(\frac{3}{2}z^{14}-\frac{13}{2}z^{12}+\frac{31}{3}z^{10}-\frac{19}{3}z^8-\frac{1}{2}z^6+\frac{13}{6}z^4-\frac{2}{3}z^2\right) \\
&+ w\left(\frac{3}{2}z^{14}-4z^{12}-\frac{13}{6}z^{10}+\frac{7}{3}z^8-\frac{22}{9}z^6+\frac{2}{9}z^4+\frac{2}{9}z^2\right) \\
&+ \left.\left(\frac{1}{2}z^{14}-\frac{1}{2}z^{12}-\frac{2}{3}z^{10}+\frac{2}{3}z^8+\frac{2}{9}z^6-\frac{2}{9}z^4\right)\right]\mathrm{d}z\mathrm{d}\phi \\
&= 15\pi\left[\frac{63}{128}\left(\frac{2}{15}-\frac{12}{13}+\frac{30}{11}-\frac{40}{9}+\frac{30}{7}-\frac{12}{5}+\frac{2}{3}\right)+\frac{19}{32}\left(\frac{1}{5}+\frac{62}{33}-\frac{38}{27}-\frac{1}{7}-\frac{13}{15}-\frac{4}{9}\right)\right. \\
&+ \frac{3}{4}\left(\frac{1}{5}-\frac{3}{18}+\frac{13}{33}+\frac{14}{27}-\frac{44}{63}+\frac{4}{45}+\frac{4}{27}\right)+\left.\left(\frac{1}{15}-\frac{1}{13}-\frac{4}{33}+\frac{4}{27}+\frac{4}{63}-\frac{4}{45}\right)\right]2\pi = 0 \\
I_{3-3} &= -\frac{5}{2}\int \sin^2\theta\left(\frac{\partial q}{\partial\theta}\right)^2 q\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi = \int -5(1-z^2)^2z^2[w(1-z^2)-z^2]^2\left[w(1-z^2)^2+z^4-\frac{2}{3}\right]\mathrm{d}z\mathrm{d}\phi \\
&= -5\int\left[w^3(z^{14}-6z^{12}+15z^{10}-20z^8+15z^6-6z^4+z^2)\right. \\
&+ w^2\left(3z^{14}-14z^{12}+\frac{76}{3}z^{10}-\frac{64}{3}z^8+\frac{21}{3}z^6+\frac{2}{3}z^4-\frac{2}{3}z^2\right) \\
&+ w\left(3z^{14}-10z^{12}+\frac{32}{3}z^{10}-2z^8-3z^6+\frac{4}{3}z^4\right)+\left.\left(z^{14}-2z^{12}+\frac{1}{3}z^{10}+\frac{4}{3}z^8-\frac{2}{3}z^6\right)\right]\mathrm{d}z\mathrm{d}\phi \\
&= -10\pi\left[\frac{63}{128}\left(\frac{2}{15}-\frac{12}{13}+\frac{30}{11}-\frac{40}{9}+\frac{30}{7}-\frac{12}{5}+\frac{2}{3}\right)+\frac{19}{32}\left(\frac{6}{15}-\frac{28}{13}+\frac{152}{33}-\frac{128}{27}+\frac{42}{21}+\frac{4}{15}-\frac{4}{9}\right)\right. \\
&+ \frac{3}{4}\left(\frac{6}{15}-\frac{20}{13}+\frac{64}{33}-\frac{4}{9}-\frac{6}{7}+\frac{8}{15}\right)+\left.\left(\frac{2}{15}-\frac{4}{13}+\frac{2}{33}+\frac{8}{27}-\frac{4}{21}\right)\right]2\pi = \frac{16}{3861}\pi \\
I_3 &= I_{3-1}+I_{3-2}+I_{3-3} = \frac{449}{648648}\pi+\frac{16}{3861}\pi = \frac{3137}{648648}\pi = \frac{16\pi}{3}\frac{3137}{3459456}
\end{aligned}
$$

● γ^4 の係数の第 1 項 I_{4-1}，第 1 項 I_{4-2}，第 1 項 I_{4-3}

$$
\begin{aligned}
I_{4-1} &= \int 4\cos^2\theta\ \left(\frac{35}{128}\right) q^4 \sin\theta \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi = \int \frac{35}{512} z^2 \left[w(1-z^2)^2 + z^4 - \frac{2}{3}\right]^4 \mathrm{d}z\mathrm{d}\phi \\
&= \frac{35}{512} \int \left[w^4(z^{18} - 8z^{16} + 28z^{14} - 56z^{12} + 70z^{10} - 56z^8 + 28z^6 - 8z^4 + z^2)\right. \\
&+ w^3 \left(4z^{18} - 24z^{16} + \frac{172}{3}z^{14} - 64z^{12} + 20z^{10} + \frac{88}{3}z^8 - 36z^6 + 16z^4 - \frac{8}{3}z^2\right) \\
&+ w^2 \left(6z^{18} - 24z^{16} + 28z^{14} + 8z^{12} - \frac{118}{3}z^{10} + \frac{64}{3}z^8 + 8z^6 - \frac{32}{3}z^4 + \frac{8}{3}z^2\right) \\
&+ w \left(4z^{18} - 8z^{16} - 4z^{14} + 16z^{12} - \frac{8}{3}z^{10} - \frac{32}{3}z^8 + \frac{112}{27}z^6 + \frac{64}{27}z^4 - \frac{32}{27}z^2\right) \\
&+ \left.\left(z^{18} - \frac{8}{3}z^{14} + \frac{8}{3}z^{10} - \frac{32}{27}z^6 - \frac{16}{81}z^2\right)\right] \mathrm{d}z\mathrm{d}\phi \\
&= -\frac{35\pi}{256}\left[\frac{867}{2048}\left(\frac{2}{19} - \frac{16}{17} + \frac{56}{15} - \frac{112}{13} + \frac{140}{11} - \frac{112}{9} + 8 - \frac{16}{5} + \frac{2}{3}\right)\right. \\
&+ \frac{63}{128}\left(\frac{8}{19} - \frac{48}{17} + \frac{344}{45} - \frac{128}{13} + \frac{40}{11} + \frac{176}{27} - \frac{72}{7} + \frac{32}{5} - \frac{16}{9}\right) \\
&+ \frac{19}{32}\left(\frac{12}{19} - \frac{48}{17} + \frac{56}{15} + \frac{16}{13} - \frac{236}{33} + \frac{128}{27} + \frac{16}{7} - \frac{64}{15} + \frac{16}{9}\right) \\
&+ \left.\frac{3}{4}\left(\frac{8}{19} - \frac{16}{17} - \frac{8}{15} + \frac{32}{13} - \frac{16}{33} - \frac{64}{27} + \frac{32}{27} + \frac{128}{135} - \frac{64}{81}\right) - \left(\frac{9}{12} - \frac{16}{45} + \frac{16}{33} - \frac{64}{189} + \frac{32}{243}\right)\right] 2\pi = \frac{1351\pi}{6873984} \\
I_{4-2} &= \int -\frac{35}{4}\sin\theta\cos\theta q^3 \frac{\partial q}{\partial\theta} \sin\theta \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi \\
&= -\frac{35}{4}\int z^2(1-z^2)\left[w(1-z^2)^2 + z^4 - \frac{2}{3}\right]^2 [w(1-z^2) - z^2] \mathrm{d}z\mathrm{d}\phi \\
&= -\frac{35}{4}\int \left[w^4\left(\frac{1}{4}z^{18} - 2z^{16} + 7z^{14} - 14z^{12} - \frac{35}{2}z^{10} - 14z^8 + 7z^6 - 2z^4 + \frac{1}{4}z^2\right)\right. \\
&+ w^3\left(z^{18} - \frac{25}{4}z^{16} + 16z^{14} - \frac{83}{4}z^{12} + \frac{25}{2}z^{10} + \frac{1}{4}z^8 - 5z^6 + \frac{11}{4}z^4 + \frac{1}{2}z^2\right) \\
&+ w^2\left(\frac{3}{2}z^{18} - \frac{27}{4}z^{16} + \frac{21}{2}z^{14} - 4z^{12} + \frac{37}{6}z^{10} + \frac{83}{12}z^8 - \frac{3}{2}z^6 - \frac{5}{6}z^4 + \frac{1}{3}z^2\right) \\
&+ w\left(z^{18} - \frac{11}{4}z^{16} + z^{14} + \frac{13}{4}z^{12} - \frac{17}{6}z^{10} - \frac{2}{3}z^8 + \frac{34}{27}z^6 - \frac{5}{27}z^4 - \frac{2}{27}z^2\right) \\
&+ \left.\left(\frac{1}{4}z^{18} - \frac{1}{4}z^{16} - \frac{1}{2}z^{14} + \frac{1}{2}z^{12} + \frac{1}{3}z^{10} - \frac{1}{3}z^8 - \frac{2}{27}z^6 + \frac{2}{27}z^4\right)\right] \mathrm{d}z\mathrm{d}\phi \\
&= \frac{15\pi}{2}\left[\frac{867}{2048}\left(\frac{1}{38} - \frac{4}{17} + \frac{14}{15} - \frac{28}{13} + \frac{35}{11} - \frac{28}{9} + 2 - \frac{4}{5} + \frac{1}{6}\right)\right. \\
&+ \frac{63}{128}\left(\frac{2}{19} - \frac{35}{24} + \frac{32}{15} - \frac{83}{26} + \frac{25}{11} + \frac{1}{18} - \frac{10}{7} + \frac{11}{10} - \frac{1}{3}\right) \\
&+ \frac{19}{32}\left(\frac{3}{19} - \frac{27}{34} + \frac{7}{5} - \frac{8}{13} - \frac{37}{33} + \frac{83}{54} - \frac{3}{7} - \frac{1}{3} + \frac{2}{9}\right) \\
&+ \frac{3}{4}\left(\frac{2}{19} - \frac{11}{34} + \frac{2}{15} + \frac{1}{2} - \frac{17}{33} - \frac{4}{27} + \frac{68}{189} - \frac{2}{27} - \frac{4}{81}\right) \\
&+ \left.\left(\frac{1}{38} - \frac{1}{34} - \frac{1}{15} + \frac{1}{13} + \frac{2}{33} - \frac{2}{27} - \frac{4}{189} + \frac{4}{135}\right)\right] 2\pi = 0 \\
I_{4-3} &= \frac{35}{8}\int \sin^2\theta\left(\frac{\partial q}{\partial\theta}\right)^2 q^2 \sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi = \frac{35}{8}\int (1-z^2)^2 z^2 [w(1-z^2) - z^2]^2 \left[w(1-z^2)^2 + z^4 - \frac{2}{3}\right]^2 \mathrm{d}z\mathrm{d}\phi
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{35}{8}\int \left[w^4(z^{18}-8z^{16}+28z^{14}-56z^{12}+70z^{10}-56z^8+28z^6-8z^4+z^2)\right.\\
&+ w^3(4z^{18}-26z^{16}+\frac{212}{3}z^{14}-102z^{12}+80z^{10}-\frac{82}{3}z^8-4z^6+6z^4+\frac{4}{3}z^2)\\
&+ w^2\left(6z^{18}-30z^{16}+57z^{14}-\frac{136}{3}z^{12}+\frac{16}{9}z^{10}+\frac{182}{9}z^8-11z^6+\frac{8}{9}z^4+\frac{4}{9}z^2\right)\\
&+ w\left(4z^{18}-14z^{16}+14z^{14}+\frac{10}{3}z^{12}-\frac{118}{9}z^{10}+\frac{16}{3}z^8+\frac{4}{3}z^6-\frac{8}{9}z^4\right)\\
&+ \left.\left(z^{18}-2z^{16}-\frac{1}{3}z^{14}+\frac{8}{3}z^{12}-\frac{8}{9}z^{10}-\frac{8}{9}z^8+\frac{4}{4}z^6\right)\right]\mathrm{d}z\mathrm{d}\phi\\
&= \frac{35\pi}{4}\left[\frac{867}{2048}\left(\frac{2}{19}-\frac{16}{17}+\frac{56}{15}-\frac{112}{13}+\frac{140}{11}-\frac{112}{9}+8-\frac{16}{5}+\frac{2}{3}\right)\right.\\
&+ \frac{63}{128}\left(\frac{8}{19}-\frac{52}{17}+\frac{424}{45}-\frac{204}{13}+\frac{160}{11}-\frac{164}{27}-\frac{8}{7}+\frac{12}{5}-\frac{8}{9}\right)\\
&+ \frac{19}{32}\left(\frac{12}{19}-\frac{60}{17}+\frac{38}{5}-\frac{272}{39}+\frac{32}{99}+\frac{364}{81}-\frac{22}{7}-\frac{16}{45}+\frac{8}{27}\right)\\
&+ \frac{3}{4}\left(\frac{8}{19}-\frac{28}{17}+\frac{28}{15}+\frac{20}{39}-\frac{236}{99}+\frac{32}{27}+\frac{8}{21}-\frac{16}{45}\right)\\
&+ \left.\left(\frac{2}{19}-\frac{4}{17}-\frac{2}{45}+\frac{16}{39}-\frac{16}{99}-\frac{16}{81}+\frac{8}{63}\right)\right]2\pi = \frac{926}{196911}\pi
\end{aligned}
$$

$$
I_4 = I_{4-1}+I_{4-2}+I_{4-3} = \frac{1351}{6873984}\pi+\frac{926}{196911}\pi = \frac{370445}{75613824}\pi = \frac{16\pi}{3}\frac{370445}{403273728}
$$

- γ^5 の係数の第 1 項 I_{5-1}，第 1 項 I_{5-2}，第 1 項 I_{5-3}

$$
\begin{aligned}
I_{5-1} &= \int 4\cos^2\theta\left(-\frac{63}{256}\right)q^5\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi = -\frac{63}{2048}\int\ z^2\left[w(1-z^2)^2+z^4-\frac{2}{3}\right]^5\mathrm{d}z\mathrm{d}\phi\\
&= -\frac{63}{2048}\int\left[w^5\left(z^{22}-10z^{20}+45z^{18}-120z^{16}+210z^{14}-252z^{12}+210z^{10}-120z^8+45z^6-10z^4+z^2\right)\right.\\
&+ w^4\left(5z^{22}-40z^{20}+\frac{410}{3}z^{18}-\frac{760}{3}z^{16}+\frac{770}{3}z^{14}-\frac{280}{3}z^{12}-\frac{280}{3}z^{10}+\frac{440}{3}z^8-\frac{265}{3}z^6+\frac{80}{3}z^4-\frac{10}{3}z^2\right)\\
&+ w^3\left(10z^{22}-60z^{20}+\frac{410}{3}z^{18}-120z^{16}+\frac{410}{9}z^{14}+180z^{12}-\frac{370}{3}z^{10}-\frac{80}{9}z^8+\frac{160}{3}z^6-\frac{80}{3}z^4+\frac{40}{3}z^2\right)\\
&+ w^2\left(10z^{22}-40z^{20}+40z^{18}+40z^{16}-\frac{290}{3}z^{14}+\frac{80}{3}z^{12}+\frac{1540}{27}z^{10}-\frac{1120}{27}z^8-\frac{40}{9}z^6+\frac{320}{27}z^4-\frac{80}{27}z^2\right)\\
&+ w\left(5z^{22}-10z^{20}-\frac{25}{3}z^{18}+\frac{80}{3}z^{16}-\frac{80}{3}z^{12}+\frac{200}{27}z^{10}+\frac{320}{27}z^8-\frac{400}{81}z^6-\frac{160}{81}z^4-\frac{80}{81}z^2\right)\\
&+ \left.\left(z^{22}-\frac{10}{3}z^{18}+\frac{40}{9}z^{14}-\frac{80}{27}z^{10}+\frac{80}{81}z^6-\frac{32}{243}z^2\right)\right]\mathrm{d}z\mathrm{d}\phi\\
&= -\frac{63}{2048}\left[\frac{3069}{8192}\left(\frac{2}{23}-\frac{20}{21}+\frac{90}{19}-\frac{240}{17}+28-\frac{504}{13}+\frac{420}{11}-\frac{80}{3}+\frac{90}{7}-4+\frac{2}{3}\right)\right.\\
&+ \frac{867}{2048}\left(\frac{10}{23}-\frac{80}{21}+\frac{820}{57}-\frac{1520}{51}+\frac{308}{9}-\frac{560}{39}-\frac{560}{33}+\frac{880}{27}-\frac{530}{21}+\frac{32}{3}-\frac{20}{9}\right)\\
&+ \frac{63}{128}\left(\frac{20}{23}-\frac{40}{7}+\frac{820}{57}-\frac{240}{17}-\frac{164}{27}+\frac{360}{13}-\frac{740}{33}-\frac{160}{81}+\frac{320}{21}-\frac{32}{3}+\frac{80}{27}\right)\\
&+ \frac{19}{32}\left(\frac{20}{23}-\frac{80}{21}+\frac{80}{19}+\frac{80}{17}-\frac{116}{9}+\frac{160}{39}+\frac{280}{27}-\frac{2240}{243}-\frac{80}{63}+\frac{128}{27}-\frac{160}{81}\right)\\
&+ \frac{3}{4}\left(\frac{10}{23}-\frac{20}{21}-\frac{50}{57}+\frac{160}{51}-\frac{160}{39}+\frac{400}{297}+\frac{640}{243}-\frac{800}{567}-\frac{64}{81}+\frac{160}{243}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\left(\frac{2}{23}-\frac{20}{57}+\frac{16}{27}-\frac{160}{297}+\frac{160}{567}-\frac{64}{729}\right)\Big]\,2\pi=\frac{17231}{1915550208}\pi\\
I_{5-2}&=\int 4\sin\theta\cos\theta\frac{35}{128}\frac{\partial q}{\partial\theta}q^4\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi=\frac{35}{32}\int\ 2z^2(1-z^2)\frac{1}{16}\left[w(1-z^2)^2+z^4-\frac{2}{3}\right]^4[w(1-z^2)-z^2]\mathrm{d}z\mathrm{d}\phi\\
&=\frac{35}{32}\int\Big[w^5\left(\frac{1}{8}z^{22}-\frac{5}{4}z^{20}+\frac{45}{8}z^{18}-15z^{16}+\frac{105}{4}z^{14}-\frac{63}{2}z^{12}+\frac{105}{4}z^{10}-15z^8+\frac{45}{8}z^6-\frac{5}{4}z^4+\frac{1}{8}z^2\right)\\
&+w^4\left(\frac{5}{8}z^{22}-\frac{41}{8}z^{20}+\frac{109}{6}z^{18}-\frac{215}{6}z^{16}+\frac{497}{12}z^{14}-\frac{301}{12}z^{12}+\frac{7}{6}z^{10}+\frac{61}{6}z^8-\frac{185}{24}z^6+\frac{61}{24}z^4-\frac{1}{3}z^2\right)\\
&+w^3\left(\frac{5}{4}z^{22}-8z^{20}+\frac{245}{12}z^{18}-\frac{145}{6}z^{16}+\frac{85}{12}z^{14}+\frac{44}{3}z^{12}-\frac{209}{12}z^{10}+\frac{35}{6}z^8+\frac{5}{3}z^6-\frac{5}{3}z^4+\frac{1}{3}z^2\right)\\
&+w^2\left(\frac{5}{4}z^{22}-\frac{23}{4}z^{20}+\frac{17}{2}z^{18}-\frac{1}{2}z^{16}-\frac{43}{4}z^{14}+\frac{107}{12}z^{12}+\frac{32}{27}z^{10}-\frac{119}{27}z^8+\frac{13}{9}z^6+\frac{7}{27}z^4-\frac{4}{27}z^2\right)\\
&+w\left(\frac{5}{8}z^{22}-\frac{7}{4}z^{20}+\frac{7}{24}z^{18}+\frac{19}{6}z^{16}-\frac{7}{3}z^{14}-\frac{5}{3}z^{12}+\frac{55}{27}z^{10}+\frac{2}{27}z^8-\frac{46}{81}z^6+\frac{8}{81}z^4+\frac{2}{81}z^2\right)\\
&+\left(\frac{1}{8}z^{22}-\frac{1}{8}z^{20}-\frac{1}{3}z^{18}+\frac{1}{3}z^{16}+\frac{1}{3}z^{14}-\frac{1}{3}z^{12}-\frac{4}{27}z^{10}+\frac{4}{27}z^8+\frac{2}{81}z^6-\frac{2}{81}z^4\right)\Big]\mathrm{d}z\mathrm{d}\phi\\
&=\frac{35}{32}\Big[\frac{3069}{8192}\left(\frac{1}{92}-\frac{5}{42}+\frac{45}{76}-\frac{30}{17}+\frac{7}{2}-\frac{63}{13}+\frac{105}{22}-\frac{10}{3}+\frac{45}{28}-\frac{1}{2}+\frac{1}{12}\right)\\
&+\frac{867}{2048}\left(\frac{5}{92}-\frac{41}{84}+\frac{109}{57}-\frac{215}{51}+\frac{497}{90}-\frac{301}{78}+\frac{7}{33}+\frac{61}{27}-\frac{185}{84}+\frac{61}{60}-\frac{2}{9}\right)\\
&+\frac{63}{128}\left(\frac{5}{46}-\frac{16}{21}+\frac{245}{114}-\frac{145}{51}+\frac{17}{18}+\frac{88}{39}-\frac{19}{6}+\frac{35}{27}+\frac{10}{21}-\frac{2}{3}+\frac{2}{9}\right)\\
&+\frac{19}{32}\left(\frac{5}{46}-\frac{23}{42}+\frac{17}{19}-\frac{1}{17}-\frac{43}{30}+\frac{107}{78}+\frac{64}{297}-\frac{238}{243}+\frac{26}{63}+\frac{14}{135}-\frac{8}{81}\right)\\
&+\frac{3}{4}\left(\frac{5}{92}-\frac{1}{6}+\frac{7}{228}+\frac{19}{51}-\frac{14}{45}-\frac{10}{39}+\frac{10}{27}+\frac{4}{243}-\frac{92}{567}+\frac{16}{405}+\frac{4}{243}\right)\\
&+\left(\frac{1}{92}-\frac{1}{84}-\frac{2}{57}+\frac{2}{51}+\frac{2}{45}-\frac{2}{39}-\frac{8}{297}+\frac{8}{243}+\frac{4}{567}-\frac{4}{405}+\right)\Big]\,2\pi=0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_{5-3}&=\int\sin^2\theta\left(\frac{\partial q}{\partial\theta}\right)^2\left(-\frac{105}{16}\right)q^3\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi=-\frac{105}{16}\int\ (1-z^2)4[w(1-z^2)-z^2]\frac{1}{8}\left[w(1-z^2)^2+z^4-\frac{2}{3}\right]^3\mathrm{d}z\mathrm{d}\phi\\
&=-\frac{105}{32}\int\big[w^5\left(z^{22}-10z^{20}+45z^{18}-120z^{16}+210z^{14}-252z^{12}+210z^{10}-120z^8+45z^6-10z^4+z^2\right)\\
&+w^4\left(5z^{22}-42z^{20}+154z^{18}-320z^{16}+406z^{14}-308z^{12}+112z^{10}+16z^8-35z^6+14z^4-2z^2\right)\\
&+w^3\left(10z^{22}-68z^{20}+191z^{18}-274z^{16}+\frac{547}{3}z^{14}+12z^{12}-107z^{10}+\frac{202}{3}z^8-11z^6-4z^4+\frac{4}{3}z^2\right)\\
&+w^2\left(10z^{22}-52z^{20}+99z^{18}-64z^{16}-42z^{14}+\frac{256}{3}z^{12}-\frac{935}{27}z^{10}-\frac{292}{27}z^8+\frac{98}{9}z^6-\frac{40}{27}z^4-\frac{8}{27}z^2\right)\\
&+w\left(5z^{22}-18z^{20}+16z^{18}+14z^{16}-29z^{14}+\frac{20}{3}z^{12}+\frac{308}{27}z^{10}-\frac{56}{9}z^8-\frac{4}{9}z^6+\frac{16}{27}z^4\right)\\
&+\left(z^{22}-2z^{20}-z^{18}+4z^{16}-\frac{2}{3}z^{14}-\frac{8}{3}z^{12}+\frac{28}{27}z^{10}+\frac{16}{27}z^8-\frac{8}{27}z^6\right)\Big]\mathrm{d}z\mathrm{d}\phi\\
&=-\frac{105}{32}\Big[\frac{3069}{8192}\left(\frac{2}{23}-\frac{20}{21}+\frac{90}{19}-\frac{240}{17}+28-\frac{504}{13}+\frac{420}{11}-\frac{80}{3}+\frac{90}{7}-4+\frac{2}{3}\right)\\
&+\frac{867}{2048}\left(\frac{10}{23}-4+\frac{309}{19}-\frac{640}{17}+\frac{812}{15}-\frac{616}{13}+\frac{224}{11}+\frac{32}{9}-10+\frac{28}{5}-\frac{4}{3}\right)\\
&+\frac{63}{128}\left(\frac{20}{23}-\frac{136}{21}+\frac{382}{19}-\frac{548}{17}+\frac{1094}{45}+\frac{24}{13}-\frac{214}{11}+\frac{404}{27}-\frac{22}{7}-\frac{8}{5}+\frac{8}{9}\right)
\end{aligned}
$$

$$+\frac{19}{32}\left(\frac{20}{23}-\frac{104}{21}+\frac{198}{19}-\frac{128}{17}-\frac{28}{5}+\frac{512}{39}-\frac{170}{27}-\frac{584}{243}+\frac{28}{9}-\frac{16}{27}-\frac{16}{81}\right)$$
$$+\frac{3}{4}\left(\frac{10}{23}-\frac{12}{7}+\frac{32}{19}+\frac{28}{17}-\frac{58}{15}+\frac{40}{39}+\frac{56}{27}-\frac{112}{81}-\frac{8}{63}+\frac{32}{135}\right)$$
$$+\left(\frac{2}{23}-\frac{4}{21}-\frac{2}{19}+\frac{8}{17}-\frac{4}{45}-\frac{16}{39}+\frac{56}{297}+\frac{32}{243}-\frac{16}{189}+\right)\Bigg]2\pi=\frac{773}{7482618}\pi$$
$$I_5=I_{5-1}+I_{5-2}+I_{5-3}=\frac{17231}{1915550208}\pi+\frac{773}{7482618}\pi=\frac{215119}{1915550208}\pi=\frac{16\pi}{3}\frac{215119}{10216267776}$$

8 ホール導電率の式 (77) の積分計算

式 (77) の積分計算する部分は

$$I=\int\left[\left(1-\frac{5}{2}\gamma q+\frac{35}{8}\gamma^2q^2-\frac{105}{16}\gamma^3q^3+\frac{1155}{128}\gamma^4q^4\cdots\right)(a_0+a_1\gamma)(b_0+b_1\gamma+b_2\gamma^2)\right]\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$$

である．I を γ の冪級数にして γ^i の係数を I_i とすると，

$$I_0=\int a_0b_0\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi \tag{85}$$
$$I_1=\int\left[(a_0b_1+a_1b_0)-\frac{5}{2}a_0b_0q\right]\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi \tag{86}$$
$$I_2=\int\left[(a_1b_1+a_0b_2)-\frac{5}{2}(a_0b_1+a_1b_0)q+\frac{35}{8}a_0b_0q^2\right]\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi \tag{87}$$
$$I_3=\int\left[a_1b_2-\frac{5}{2}(a_1b_1+a_0b_2)q+\frac{35}{8}(a_0b_1+a_1b_0)q^2-\frac{105}{16}a_0b_0q^3\right]\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi \tag{88}$$
$$I_4=\int\left[-\frac{5}{2}a_1b_2q+\frac{35}{8}(a_1b_1+a_0b_2)q^2-\frac{105}{16}(a_0b_1+a_1b_0)q^3+\frac{1155}{128}a_0b_0q^4\right]\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi \tag{89}$$

である．

- γ^0 の係数の計算

$$I_0=\int a_0b_0\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi=\int 8\sin^2\phi\sin^2\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi=8\pi\int_{-1}^{1}(1-z^2)\mathrm{d}z=\frac{32}{3}\pi$$

- γ^1 の係数の計算

被積分関数のうち，

$$a_0b_1=2\sin\phi\sin\theta\left(8q\sin\phi\sin\theta+2\frac{\partial q}{\partial\theta}\cos\phi\sin\theta+6\frac{\partial q}{\partial\phi}\cos\phi\cos\theta\cot\theta+2\frac{\partial^2q}{\partial\theta^2}\sin\phi\sin\theta-2\frac{\partial^2q}{\partial\phi\partial\theta}\cos\phi\cos\theta\right)$$

で第 2,3,5 項は ϕ の積分で 0 になる．したがって，

$$\int a_0b_1\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi=\int 2(8q\sin^2\phi\sin^2\theta+2\frac{\partial^2q}{\partial\theta^2}\sin^2\phi\sin^2\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$$
$$=2\pi\int\{8\left[\frac{3}{4}(1-z^2)^2+z^4-\frac{2}{3}\right]\frac{1}{2}(1-z^2)+2(1-z^2)[2(2z^2-1)\left(\frac{3}{4}-\frac{7}{4}z^2\right)+7z^2(1-z^2)]\}\mathrm{d}z$$
$$=2\pi\int\left(-\frac{8}{3}+\frac{71}{3}z^2-42z^4+21z^6\right)\mathrm{d}z=-\frac{32}{45}\pi$$

次に，

$$a_1 b_0 = 2q\sin\phi\sin\theta + \frac{\partial q}{\partial\theta}\sin\phi\cos\theta + \frac{\partial q}{\partial\phi}\frac{\cos\phi}{\sin\theta}4\sin\phi\sin\theta$$

の積分で，第 3 項は ϕ の積分で 0 になるから，

$$\int a_1 b_0 \sin\theta \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi = \int \left(2q\sin\phi\sin\theta + \frac{\partial q}{\partial\theta}\sin\phi\cos\theta\right) 4\sin\phi\sin\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$$
$$= \int [(w\sin^4\theta + \cos^4\theta - \frac{2}{3}) + 2\cos^2\theta(w\sin^2\theta - \cos^2\theta)]4\sin^2\phi\sin^2\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$$
$$= 2\pi\int \{2\left[\frac{3}{4}(1-z^2)^2 + z^4 - \frac{2}{3}\right](1-z^2) + 4z^2(1-z^2)\left(\frac{3}{4} - \frac{7}{4}z^2\right)\}\mathrm{d}z$$
$$= 2\pi\int\left(\frac{7}{2}z^6 - \frac{7}{2}z^4 - \frac{1}{6}z^2 + \frac{1}{6}\right)\mathrm{d}z = -\frac{16}{45}\pi$$

である．最後に，

$$\int a_0 b_0 q \sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi = \int 8\sin^2\phi\sin^2\theta\frac{1}{2}\left[(w\sin^4\theta + \cos^4\theta - \frac{2}{3}\right]\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$$
$$= 2\pi\int 2(1-z^2)\left[\frac{3}{4}(1-z^2)^2 + z^4 - \frac{2}{3}\right]\mathrm{d}z$$
$$= 2\pi\int\left(-\frac{7}{2}z^6 + \frac{13}{2}z^4 - \frac{19}{6}z^2 + \frac{1}{6}\right)\mathrm{d}z = -\frac{16}{45}\pi$$

となり，したがって，

$$I_1 = \int\left(a_0 b_1 + a_1 b_0 - \frac{5}{2}a_0 b_0 q\right)\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$$
$$= -\frac{32\pi}{45} - \frac{16\pi}{45} - \frac{5}{2}\left(-\frac{16\pi}{45}\right) = -\frac{8\pi}{45} = \frac{32\pi}{3}\left(-\frac{1}{60}\right) = \frac{32\pi}{3}(-0.0166667)$$

となる．残りは後日．

参考文献

[1] B. Lax and J. G. Mavroides, Phys. Rev. **100**, 1650 (1955).