第 1 種楕円積分のガウス変換

2018.6.4　　鈴木　実

1　はじめに

楕円積分の母数，補母数を増減して数値計算の収束を速くする変換としてランデン (Landen) 変換がある．ランデン変換には上昇変換と下降変換があり，前者は母数が増加し，後者は母数が減少する変換であり，両方共急速に増加減少するために，数値計算では変換が 5 回前後で十分目的が達成される．

このランデン変換と同じ結果を有していて，かつ変換の方法が異なる方法があり，ガウス変換として知られる．Wolfram MathWorld ではこのように定義されているが，場合によっては，上昇ランデン変換をガウス変換と同じとして扱っている場合もある．実際，岩波数学公式 I[1] では，下降ランデン変換とガウス変換が掲載されている．ここでは，Wolfram[2] と同じ分類でガウス変換について述べることにしよう．

ガウス変換によって，変換される母数 k の変化は上昇ランデン変換の場合と同じである．すなわち，

$$k_1' = \frac{1-k}{1+k} \tag{1}$$

$$k_1 = \frac{2\sqrt{k}}{1+k}, \tag{2}$$

である．ただし，母数の変換は同じであるが，ガウス変換の式が違うので，楕円積分の上限はランデン変換の場合と違う．この点に注意を要する．

2　ガウス変換

第 1 種不完全楕円積分を

$$F(\phi,k) = \int_0^\phi \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} \tag{3}$$

と表す．ガウス変換では，次式により θ から ψ へ変数変換を行う．

$$(1+k)\sin\theta = (1+k\sin^2\theta)\sin\psi \tag{4}$$

まず，式 (3) の左辺を式 (4) により変換しよう．式 (4) は $\sin\theta$ を変数とする 2 次方程式とみなすことができるから，

$$\begin{aligned}
\sin\theta &= \frac{1}{2k\sin\psi}\{(1+k)\pm\sqrt{(1+k)^2-4k\sin^2\psi}\} \\
&= \frac{1+k}{2k\sin\psi}\{1\pm\sqrt{1-k_1^2\sin^2\psi}\} \\
&= \frac{1+k}{2k\sin\psi}\frac{1-(1-k_1^2\sin^2\psi)}{1\mp\sqrt{1-k_1^2\sin^2\psi}} \\
&= \frac{2}{1+k}\frac{\sin\psi}{1+\sqrt{1-k_1^2\sin^2\psi}} \qquad (5)
\end{aligned}$$

となる．複号は右辺が 1 より小さいという条件を満足するように + をとった．これから，

$$
\begin{aligned}
1-\sin^2\theta &= \frac{\left(1+\sqrt{1-k_1^2\sin^2\psi}\right)^2-(k_1^2/k)\sin^2\psi}{\left(1+\sqrt{1-k_1^2\sin^2\psi}\right)^2} \\
&= \frac{2+2\sqrt{1-k_1^2\sin^2\psi}-k_1^2\sin^2\psi-k_1^2/k\sin^2\psi}{\left(1+\sqrt{1-k_1^2\sin^2\psi}\right)^2} \\
&= \frac{2+2\sqrt{1-k_1^2\sin^2\psi}-4\sin^2\psi/(1+k)}{\left(1+\sqrt{1-k_1^2\sin^2\psi}\right)^2} \qquad (6)
\end{aligned}
$$

となる．同様にして，

$$
\begin{aligned}
1-k^2\sin^2\theta &= \frac{(1+\sqrt{1-k_1^2\sin^2\psi})^2-(k_1^2k)\sin^2\psi}{\left(1+\sqrt{1-k_1^2\sin^2\psi}\right)^2} \\
&= \frac{(2+2\sqrt{1-k_1^2\sin^2\psi}-k_1^2\sin^2\psi-k_1^2k\sin^2\psi}{\left(1+\sqrt{1-k_1^2\sin^2\psi}\right)^2} \\
&= \frac{(2+2\sqrt{1-k_1^2\sin^2\psi}-4k\sin^2\psi/(1+k)}{\left(1+\sqrt{1-k_1^2\sin^2\psi}\right)^2} \qquad (7)
\end{aligned}
$$

を得る．

式 (5) を微分すると，

$$
\begin{aligned}
\cos\theta\mathrm{d}\theta &= \frac{2}{1+k}\left\{\frac{\cos\psi}{1+\sqrt{1-k_1^2\sin^2\psi}}+\frac{k_1^2\sin^2\psi\cos\psi}{\left(1+\sqrt{1-k_1^2\sin^2\psi}\right)^2\sqrt{1-k_1^2\sin^2\psi}}\right\}\mathrm{d}\psi \\
&= \frac{2}{1+k}\frac{\cos\psi}{\left(1+\sqrt{1-k_1^2\sin^2\psi}\right)\sqrt{1-k_1^2\sin^2\psi}}\mathrm{d}\psi \qquad (8)
\end{aligned}
$$

となる．ここで，式 (3) を

$$
F(\phi,k)=\int_0^\phi\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}=\int_0^\phi\frac{\cos\theta\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} \qquad (9)
$$

と変形し，

$$
\Delta=\sqrt{1-k_1^2\sin^2\psi} \qquad (10)
$$

とおくことにしよう．式 (9) に式 (6)，(7)，(8) を代入して，

$$
\begin{aligned}
F(\phi,k) &= \int_0^{\phi_1} \frac{1+\Delta}{\sqrt{2+2\Delta-4\sin^2\psi/(1+k)}} \frac{1+\Delta}{\sqrt{2+2\Delta-4k\sin^2\psi/(1+k)}} \frac{2}{1+k} \frac{\cos\psi}{1+\Delta} \frac{\mathrm{d}\psi}{\Delta} \\
&= \frac{1}{1+k} \int_0^{\phi_1} \frac{1+\Delta}{\sqrt{(1+\Delta)^2-2(1+\Delta)\sin^2\psi+k_1^2\sin^4\psi}} \frac{\cos\psi}{\Delta}\mathrm{d}\psi \\
&= \frac{1}{1+k} \int_0^{\phi_1} \frac{(1+\Delta)\cos\psi}{\sqrt{1+2\Delta+1-k_1^2\sin^2\psi-2(1+\Delta)\sin^2\psi+k_1^2\sin^4\psi}} \frac{\mathrm{d}\psi}{\Delta} \\
&= \frac{1}{1+k} \int_0^{\phi_1} \frac{(1+\Delta)\cos\psi}{\sqrt{2(1+\Delta)(1-\sin^2\psi)-k_1^2\sin^2\psi(1-\sin^2\psi)}} \frac{\mathrm{d}\psi}{\Delta} \\
&= \frac{1}{1+k} \int_0^{\phi_1} \frac{(1+\Delta)\cos\psi}{\sqrt{1-\sin^2\psi}\sqrt{(1+\Delta)^2}} \frac{\mathrm{d}\psi}{\Delta} = \frac{1}{1+k} \int_0^{\phi_1} \frac{\mathrm{d}\psi}{\Delta} \\
&= \frac{1}{1+k} F(\phi_1,k_1)
\end{aligned}
\tag{11}
$$

を得る．ここで，式 (1) より

$$
1+k = \frac{2}{1+k_1'} \tag{12}
$$

であるから，

$$
F(\phi,k) = \frac{1+k_1'}{2} F(\phi_1,k_1) \tag{13}
$$

となる．以上をまとめると

$$
F(\phi,k) = \frac{1}{1+k} F(\phi_1,k_1) \tag{14}
$$

$$
F(\phi,k) = \frac{1+k_1'}{2} F(\phi_1,k_1) \tag{15}
$$

$$
F(\phi_1,k_1) = (1+k) F(\phi,k) \tag{16}
$$

$$
F(\phi_1,k_1) = \frac{2}{1+k_1'} F(\phi,k) \tag{17}
$$

となる．

このガウス変換は上昇ランデン変換と似ているが，注意する必要がある．母数と補母数の変換は同じであるが，変換式が異なるために，ϕ_1 が違う．この違いは，完全楕円積分のときに現れる．ランデン変換の場合，$\phi=\pi/2$ のときに $\phi_1=\pi$ であるが，ガウス変換の場合，式 (4) から，

$$
(1+k\sin\phi) = (1+k\sin^2\phi)\sin\phi_1 \tag{18}
$$

であるから，$\phi_1=\pi/2$ となり，ランデン変換とは異なるので注意を要する．

なお，数学公式 I の p.145 で，1 行目の k は k_1 の誤り，d) 変換の下の行で，

$$
\cos\psi = \cos\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}
$$

は

$$
\cos\psi = \frac{\cos\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}{1+k\sin^2\varphi}
$$

の誤りである．

参考文献

[1] 森口繁一，宇田川☒久，一松信,「数学公式 I」（岩波書店）, 1971 年, p.145.

[2] Wolfram MathWorld Gauss's Transformation
`http://mathworld.wolfram.com/GausssTransformation.html`