オイラーの角と回転行列およびその固有値と固有ベクトルに関するメモ

2014.8.10　鈴木　実

[1] 座標系の回転と回転行列およびオイラーの角

原点を共有する直交座標軸 xyz 系と XYZ 系は原点を中心とする 3 次元の回転により互いに一致させることができる．この 3 次元の回転は，座標軸を回転軸とする 3 つの回転で合成することにより，回転軸の順番を固定すれば，一義的に表すことができる．その時の 3 つの回転角をオイラーの角 (Euler's angles) という．XYZ 座標系を物体に固定した座標系と考えれば，オイラーの角により，物体の回転を明確に定義することができる．

いま，xyz 直交座標系を考え，これを任意の方向を向く XYZ 直交座標系に一致させるには xyz 系を以下のように回転すればよい．すなわち，以下の方法により，直交座標系を任意の方向に回転させることができる．

回転軸に対して，座標軸を反時計回りに回転した時の角度を正としよう．まず，zOZ 面と xy 面が交差する線と x 軸のなす角度を φ とする．次に，xy 面と XY 面の交線と Y 軸のなす角度を ψ とする．この xy 面と XY 面の交線を結節線 (line of node) という．さらに，z 軸と Z 軸のなす角度を θ とする．

最初に，z 軸を回転軸として xy 軸を φ だけ回転し，回転後の座標軸を x' 軸および y' 軸とする．この回転操作により，x' 軸は zZ 面内に位置し，y' 軸は結節線に一致する．次に，y' 軸を回転軸として，z 軸を θ だけ回転する．回転後の座標軸を x'' 軸および z' 軸とする．この回転操作により，z' 軸は Z 軸に一致する．次に，z' 軸を回転軸として，x'' 軸および y' 軸を ψ だけ回転する．回転後の座標軸を x''' 軸および y'' 軸とする．x''' 軸および y'' 軸はそれぞれ X 軸と Y 軸に一致する．この操作を図 1 に示す．このようにして，xyz 直交座標系から XYZ 直交座標系への回転はオイラーの角により一義的に定義することができる．

球面上の 2 点のみでは，3 次元の回転は一義的には定まらない．なぜなら，いま，球面上の 2 点を考えてみよう．このうちの 1 点から他の 1 点へは，原点を中心とする 3 次元の回転により移動することが可能である．この回転はオイラーの角で一義的に表すことができそうであるが，実際はできない．その理由は，与えられた 2 点間の移動を可能にする回転の種類は，連続的に無限に存在するからである．最も小さな回転角は 2 点を結ぶ大円上に回転が一致する場合で，最も大きな回転角は 2 点を直径とする円と回転が一致する場合である．これを図 2 に示す．したがって，球面上の任意の 2 点のみではオイラーの角を一義的に決定することはできない．

回転の操作を具体的に考えてみよう．xyz 直交系と xyz 直交系を考え，それぞれの単位基底を $\mathbf{e}_1$，$\mathbf{e}_2$，$\mathbf{e}_3$，および $\mathbf{e}'_1$，$\mathbf{e}'_2$，$\mathbf{e}'_3$ とする．それぞれの基底は他の基底の 1 次結合によって表されるから，

$$\mathbf{e}'_1 = a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{12}\mathbf{e}_2 + a_{13}\mathbf{e}_3 \tag{1}$$

$$\mathbf{e}'_2 = a_{21}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2 + a_{23}\mathbf{e}_3 \tag{2}$$

$$\mathbf{e}'_3 = a_{31}\mathbf{e}_1 + a_{32}\mathbf{e}_2 + a_{33}\mathbf{e}_3 \tag{3}$$

と表現できる．上の式で，両辺と $\mathbf{e}_j$ の内積をとることにより，a_{ij} は $\mathbf{e}'_i$ の方向余弦であることがわかる．すなわち，$\mathbf{e}'_i$ と $\mathbf{e}_j$ のなす角度を θ_{ij} とすると，

$$a_ij = \cos\theta_{ij}$$

である．このとき，a_{ij} を成分とする行列 $\widetilde{R}$，すなわち

$$\widetilde{R} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \tag{4}$$

が回転を表す．

$\mathbf{e}_3$ を回転軸として，φ だけ回転する操作 $\widetilde{R}(\mathbf{e}_3,\varphi)$ は

$$\widetilde{R}(\mathbf{e}_3,\varphi)=\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi & 0\\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \tag{5}$$

である (斉藤正彦著「線型代数入門」p.22 は後に記すベクトルの回転)．同様に，$\mathbf{e}_1$，$\mathbf{e}_2$ を回転軸として，φ だけ回転する操作 $\widetilde{R}(\mathbf{e}_1,\varphi)$，$\widetilde{R}(\mathbf{e}_2,\varphi)$ は

$$\widetilde{R}(\mathbf{e}_1,\varphi)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi\\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix} \tag{6}$$

$$\widetilde{R}(\mathbf{e}_2,\varphi)=\begin{pmatrix}\cos\varphi & 0 & -\sin\varphi\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi\end{pmatrix} \tag{7}$$

となる．この関係は基底が座標軸と一致しない場合でも成り立つ．

点 $\mathbf{r}$ の基底 $\{\mathbf{e}_i\}$ および基底 $\{\mathbf{e}'_i\}$ よる座標成分を x,y,z および X,Y,Z で表すと，

$$\mathbf{r} = x\,\mathbf{e}_1+y\,\mathbf{e}_2+z\,\mathbf{e}_3 \tag{8}$$
$$\mathbf{r} = X\mathbf{e}'_1+Y\mathbf{e}'_2+Z\mathbf{e}'_3 \tag{9}$$

である．(1)–(3) を (9) に代入すると，

$$\mathbf{r}=(a_{11}X+a_{21}Y+a_{31}Z)\mathbf{e}_1+(a_{12}X+a_{22}Y+a_{32}Z)\mathbf{e}_2+(a_{13}X+a_{23}Y+a_{33}Z)\mathbf{e}_3 \tag{10}$$

となる．この $\mathbf{r}$ は (8) と一致するので，

$$x\,\mathbf{e}_1+y\,\mathbf{e}_2+z\,\mathbf{e}_3=(a_{11}X+a_{21}Y+a_{31}Z)\mathbf{e}_1+(a_{12}X+a_{22}Y+a_{32}Z)\mathbf{e}_2+(a_{13}X+a_{23}Y+a_{33}Z)\mathbf{e}_3 \tag{11}$$

である．この式の両辺を $\mathbf{e}_i$ と内積を作ることにより，

$$\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}={}^t\widetilde{R}\begin{pmatrix}X\\ Y\\ Z\end{pmatrix} \tag{12}$$

あるいは，

$$\begin{pmatrix}X\\ Y\\ Z\end{pmatrix}=\widetilde{R}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} \tag{13}$$

が成り立つ．${}^t\widetilde{R}$ は $\widetilde{R}$ の転置行列である．$\widetilde{R}$ は直交行列であるので，$\widetilde{R}^{-1}={}^t\widetilde{R}$ である[1]．

［2］ベクトルの回転

ここで，ベクトルの回転を表す行列を導くために，(12) と (13) の意味を考えてみよう．座標 (X,Y,Z) は回転後の座標系の基底 $\{\mathbf{e}'_i\}$ による成分であるが，これを回転前の基底 $\{\mathbf{e}_i\}$ による成分と見た場合を考える．この場合は，基底は変わらないので，ベクトル (x,y,z) がベクトル (X,Y,Z) へと回転した場合と見ることができる．混乱を避けるために，回転後の成分 (X,Y,Z) を (x',y',z') と書くことにする．回転する前の座標系から見

[1] 回転してもベクトルの長さは変わらないから $\mathbf{r}^2=\mathbf{r}'^2$ より $\mathbf{r}^2={}^t(\widetilde{R}\mathbf{r})(\widetilde{R}\mathbf{r})={}^t\mathbf{r}({}^t\widetilde{R}\widetilde{R})\mathbf{r}$ となり，${}^t\widetilde{R}\widetilde{R}=1$ である．

ると，座標軸の回転と点の関係は相対的であるから，(x', y', z') は，点 (x, y, z) を原点を中心として座標系の回転と反対方向に回転した座標と見なすことができる．すなわち，

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \tag{14}$$

とすれば，ベクトル $\mathbf{r}$ からベクトル $\mathbf{r}'$ への回転は (13) より，

$$\mathbf{r}' = \widetilde{R}\,\mathbf{r} \tag{15}$$

と表される．座標軸の回転と同じ方向にベクトルを回転させたい場合には，座標系の回転と対応するベクトルの回転が逆方向であるので，$\widetilde{R}^{-1}$ を作用させればよい．$\widetilde{R}^{-1} = {}^t\widetilde{R}$ であるから，座標軸の回転と同じ方向のベクトルの回転は，(15) に対応して，

$$\mathbf{r}' = {}^t\widetilde{R}\,\mathbf{r} \tag{16}$$

と表される．つまり，回転する座標系に固定したベクトルの回転は ${}^t\widetilde{R}$ で表されるのである．あるいは，座標系の回転と同じベクトルの回転は ${}^t\widetilde{R}$ で表されるのである．

(12) と (13) は異なる基底による回転前と回転後の座標成分であり，(15) と (16) は同じ基底による回転後の座標成分であることに注意することが大切である．ただし，この場合，座標系の回転 $\widetilde{R}$ とベクトルの回転 $\widetilde{R}$ は対応しており，互いに逆方向である．

以上のことから，単位基底 $\mathbf{e}_i$ を回転して得られる基底 $\mathbf{e}'_i$ を，ベクトルの回転と考えれば，(16) より，次式が成り立つ．

$$\mathbf{e}'_i = {}^t\widetilde{R}\,\mathbf{e}_i \tag{17}$$

座標系に段階的に回転操作を施した場合の基底の変換を系統的に表現するには次のようにすれば良い．そのために，単位基底 $\{\mathbf{e}_i\}$ と $\{\mathbf{e}'_i\}$ を用いて $(\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2\ \mathbf{e}_3)$ および $(\mathbf{e}'_1\ \mathbf{e}'_2\ \mathbf{e}'_3)$ という行列を作ると，(1)–(3) は次のように書き換えることができる．

$$(\mathbf{e}'_1\ \mathbf{e}'_2\ \mathbf{e}'_3) = (\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2\ \mathbf{e}_3)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} = (\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2\ \mathbf{e}_3)\,{}^t\widetilde{R} \tag{18}$$

これにより，いくつかの回転操作を段階的に操作した場合の回転行列は個々の回転操作を用いて表すことができるようになる[2]．

(18) を用いて，直交座標系を複数回にわたり段階的に回転操作した場合の座標系が回転行列の積で表されることを示そう．回転後の座標系の基底が $\{\mathbf{e}'_i\}$，$\{\mathbf{e}''_i\}$，$\{\mathbf{e}'''_i\}$ と変化したとすると，

$$(\mathbf{e}'''_1\ \mathbf{e}'''_2\ \mathbf{e}'''_3) = (\mathbf{e}''_1\ \mathbf{e}''_2\ \mathbf{e}''_3)\,{}^t\widetilde{R}_3 = (\mathbf{e}'_1\ \mathbf{e}'_2\ \mathbf{e}'_3)\,{}^t\widetilde{R}_2{}^t\widetilde{R}_3 = (\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2\ \mathbf{e}_3)\,{}^t\widetilde{R}_1{}^t\widetilde{R}_2{}^t\widetilde{R}_3 \tag{19}$$

である．したがって，(19) の第 4 式で，全体の回転行列を ${}^t\widetilde{R}$ とすると，

$${}^t\widetilde{R} = {}^t\widetilde{R}_1{}^t\widetilde{R}_2{}^t\widetilde{R}_3 \tag{20}$$

あるいは，

$$\widetilde{R} = \widetilde{R}_3\,\widetilde{R}_2\,\widetilde{R}_1 \tag{21}$$

[2] (17) と (18) は本来一致していないといけないように思われるのに，異なるのは少し気持ち悪い．これは式の意味が違うためで，(17) は $\mathbf{e}'_i$ の座標成分を表す式であるのに対し，(18) は $\mathbf{e}'_i$ を $\mathbf{e}_i$ の一次結合で表すための式であり，表現は当然変わってくる．直交座標系であるから，$\mathbf{e}_i$ の成分を用いて他の 2 つの基底の成分を表すことができるので，それを (18) に代入すれば (17) が得られるのである．

と表されることがわかる．したがって，回転行列をベクトルの回転操作として扱う場合は，$\mathbf{e}_i'''$ と $\mathbf{e}_i$ の関係を例に取れば，

$$\mathbf{e}_i''' = {}^t\widetilde{R}\ \mathbf{e}_i = {}^t\widetilde{R}_1 {}^t\widetilde{R}_2 {}^t\widetilde{R}_3\ \mathbf{e}_i \tag{22}$$

と表すことができる[3]．この部分は混乱しやすいので注意が必要である．つまり，座標軸の回転であるか，ベクトルの回転であるか，その違いを明確に区別しておくことが大切である．すなわち，複数の段階を経て座標系に回転操作を施した場合，全体の回転方向が逆であるから，個別の回転操作の順番と回転の方向は，座標軸の回転操作とベクトルの回転操作では完全に逆になるということである．つまり，(21) が座標系を $\widetilde{R}_1$，$\widetilde{R}_2$，$\widetilde{R}_3$ と回転した場合で，同じ方向にベクトルを回転させるには，(21) に示すように，${}^t\widetilde{R}_3$，${}^t\widetilde{R}_2$，${}^t\widetilde{R}_1$ と逆に回転させなければならないということである．以下では，紛らわしくならないように，座標軸の回転を $\widetilde{R}$ で表し，対応するベクトルの回転を ${}^t\widetilde{R}$ で表すことにする．

(21) から，直交座標系を連続的に回転させた場合，合成された回転は，回転行列 $\widetilde{R}$ の積で表すことができることがわかる．したがって，オイラーの角による座標系回転の表現は (5)–(7) を用いて次のように表されることがわかる．

$$\widetilde{R} = \widetilde{R}(z,\psi)\widetilde{R}(y,\theta)\widetilde{R}(z,\varphi) \tag{23}$$

(23) の行列の意味は，座標軸を 3 段階で回転して任意の座標軸の回転を表すということである．最初に z 軸の周りに x 軸を φ 回転し，次に新しい y' 軸の周りに z 軸を θ 回転し，最後に，新しい z' 軸の周りに ψ 回転して任意の座標軸の回転を表している．これをベクトル $\mathbf{r}$ から $\mathbf{r}'$ への同じ方向のベクトル回転を表す行列 ${}^t\widetilde{R}$ で表せば，

$$\mathbf{r}' = {}^t\widetilde{R}\ \mathbf{r} = {}^t\widetilde{R}(z,\varphi){}^t\widetilde{R}(y,\theta){}^t\widetilde{R}(z,\psi) \tag{24}$$

である．ここで，${}^t\widetilde{R}$ は (5)–(7) より次の $(3,3)$ 型行列で表される．

$$\begin{aligned}
{}^t\widetilde{R} &= \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} && (25) \\
&= \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi & -\cos\theta\cos\varphi\sin\psi - \sin\varphi\cos\psi & \sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi & -\cos\theta\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi & \sin\theta\sin\varphi \\ -\sin\theta\cos\psi & \sin\theta\sin\psi & \cos\theta \end{pmatrix} && (26)
\end{aligned}$$

(25) と (26) はオイラーの角で座標軸を回転する場合に，z 軸，y 軸，z 軸と回転する場合の回転行列であり，zyz 型と呼ばれる．この回転行列 (26) は，(25) から明らかなように，ベクトルの回転操作を表す．斉藤正彦著「線型代数入門」(pp.168–170) では記述が端折ってあり，この定義が記述されていないため，どちらの回転かすぐにはわからず，突然 (26) が出てくるので，座標軸の回転か，あるいはベクトルの回転であるのか，とまどうところである．

くどいようだが，念のためもう一度注意点をメモしておこう．オイラーの角 φ，θ，ψ，を用いて座標軸を回転した時，あるベクトル $\mathbf{v}$ に着目しよう．回転後の座標系では $\mathbf{v}$ は $\mathbf{V}$ の位置に来る．回転前の座標系と回転後の座標系を重ねあわせると，ベクトル $\mathbf{V}$ は，$\mathbf{v}$ から $\mathbf{V}$ に回転しており，この回転は座標系の回転と反対方向である．一方，ベクトル $\mathbf{v}$ に座標系の回転と同じ回転を施すと，$\mathbf{v}$ は $\mathbf{v}'$ へ回転する．この回転は $\mathbf{v}$ から $\mathbf{V}$ への回転とちょうど反対である．したがって，始点を $\mathbf{v}$ として，$\mathbf{V}$ から $\mathbf{v}$ への回転と同じである．これから，オイラーの角を用いたベクトルの回転を行列で表すときには，最初に，ψ の逆回転，つぎに θ の逆回転，最後に φ の逆回転となるのである．これが理解できていない場合は，「線型代数入門」p.170 に出てくる式，つまり (25) がなぜそういう順番になるのか，悩んでしまうことになる．

[3] この式は，$\mathbf{e}_i$ を (17) にしたがって，${}^t\widetilde{R}_1$，${}^t\widetilde{R}_2$，${}^t\widetilde{R}_3$ と回転して得られる式と同じでなければならないように思われるが，実際には異なる．$\mathbf{e}_i'''$ は，座標系を $\widetilde{R}_1$，$\widetilde{R}_2$，$\widetilde{R}_3$ と回転していった時の全体の回転の反対方向で表され，各段階の回転の逆方向回転 ${}^t\widetilde{R}_1$ を繋ぎあわせたものとは違うのである．したがって，(17) から得られる $\mathbf{e}_i''' = {}^t\widetilde{R}_3 {}^t\widetilde{R}_2 {}^t\widetilde{R}_1$ は (22) とは異なるのである．.

[3] オイラーの角を用いた回転行列の固有値と固有ベクトル

ベクトルの回転を表す (26) の回転行列 ${}^t\widetilde{R}$ に関して，この操作に関する不変のベクトルは回転軸を表す．したがって，固有値と固有ベクトルを求めれば，ベクトルの回転のもう一つの表現が得られる．しかし，一見して (26) は複雑で，固有値計算は大儀そうに見える．実際,「線型代数入門」でも天下りで与えている．導出は少し大変ではあるが，実際に特性方程式を解けば,「線型代数入門」p.168 の結果が得られることをここにメモしておこう．

特性方程式 $\left|x\,\widetilde{E} - {}^t\widetilde{R}\right| = 0$ は,

$$\begin{vmatrix} x - \cos\theta\cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi & \cos\theta\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi & -\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\sin\psi & x + \cos\theta\sin\varphi\sin\psi - \cos\varphi\cos\psi & -\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\cos\psi & -\sin\theta\sin\psi & x - \cos\theta \end{vmatrix} = 0 \tag{27}$$

と表される．これを第 3 列で展開すると，相殺する項が出てくるのでこれを消した後は,

$$\begin{aligned} &(x-\cos\theta)\{\cos\theta(\cos^2\varphi\cos^2\psi + \sin^2\varphi\cos^2\psi) + \cos\theta(\sin^2\varphi\sin^2\psi + \cos^2\varphi\sin^2\psi) \\ &-x[\cos\theta\cos(\varphi+\psi) + \cos(\varphi+\psi)] + x^2 \\ &-\sin\theta\sin\varphi(\sin\theta\sin\varphi\sin^2\psi + \sin\theta\sin\varphi\cos^2\varphi + x\sin\theta\sin\psi) \\ &-\sin\theta\cos\varphi(\sin\theta\cos\varphi\sin^2\psi + \sin\theta\cos\varphi\cos^2\psi - x\sin\theta\cos\psi) = 0 \end{aligned} \tag{28}$$

これを以下のように順次整理する．

$$\begin{aligned} (x-\cos\theta)[\cos\theta + x^2 - x(\cos\theta+1)\cos(\varphi+\psi)] - \sin^2\theta + x\sin^2\theta\cos(\varphi+\psi) &= 0 \\ \cos\theta(x-\cos\theta) + x^2(x-\cos\theta) - x(x-\cos\theta)(\cos\theta+1)\cos(\varphi+\psi) - \sin^2\theta + x\sin^2\theta\cos(\varphi+\psi) &= 0 \\ x^3 - [\cos\theta + (\cos\theta+1)\cos(\varphi+\psi)]x^2 + [\cos\theta + \cos\theta(\cos\theta+1)\cos(\varphi+\psi) + \sin^2\theta\cos(\varphi+\psi)]x - 1 &= 0 \end{aligned}$$

これより，結局,

$$x^3 - \{(\cos\theta+1)[\cos(\varphi+\psi)+1] - 1\}x^2 + \{(\cos\theta+1)[\cos(\varphi+\psi)+1] - 1\}x - 1 = 0 \tag{29}$$

という方程式が得られる．この方程式は $x=1$ を解に持つことがすぐにわかる．(29) を $x-1$ で割ると次の 2 次方程式になる．

$$x^2 - \{(\cos\theta+1)[\cos(\varphi+\psi)+1] - 2\}x + 1 = 0 \tag{30}$$

ここで，$(\cos\theta+1) < 2$ および $[\cos(\varphi+\psi)+1] < 2)$ であるから，$(\cos\theta+1)^2[\cos(\varphi+\psi)+1]^2 < 4(\cos\theta+1)[\cos(\varphi+\psi)+1]$ となり，判別式は負となり，解は次の複素解である．

$$x = \left[\frac{1}{2}(\cos\theta+1)[\cos(\varphi+\psi)+1] - 1\right] \pm \mathrm{i}\sqrt{1 - \left[\frac{1}{2}(\cos\theta+1)[\cos(\varphi+\psi)+1] - 1\right]^2} \tag{31}$$

すぐに $|x| = 1$ であることがわかるので,

$$x = \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\alpha} \tag{32}$$

とすることができる．ただし,

$$\cos\alpha = \frac{1}{2}(\cos\theta+1)[\cos(\varphi+\psi)+1] - 1 \tag{33}$$

である．以上から，(26) の固有値は 1 および $\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\alpha}$ であることがわかる．

固有値 $\lambda = 1$ に対する固有ベクトルは (26) の ${}^t\widetilde{R}$ を用いて，連立方程式 $({}^t\widetilde{R} - \lambda{}^t\widetilde{E})\mathbf{r} = 0$ を解けば良い．

$$\begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi - 1 & -\cos\theta\cos\varphi\sin\psi - \sin\varphi\cos\psi & \sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi & -\cos\theta\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi - 1 & \sin\theta\sin\varphi \\ -\sin\theta\cos\psi & \sin\theta\sin\psi & \cos\theta - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \tag{34}$$

この斉次方程式は z を任意の定数として，(34) のうち，2 つの方程式を抜き出して解けば良い．第 2 行と第 3 行を用いると，次のように変形できる．

$$\begin{pmatrix} \cos\theta\sin\varphi\cos\psi+\cos\varphi\sin\psi & -\cos\theta\sin\varphi\sin\psi+\cos\varphi\cos\psi-1 \\ -\sin\theta\cos\psi & \sin\theta\sin\psi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -z\begin{pmatrix} \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta-1 \end{pmatrix} \tag{35}$$

ここで，左辺 $(2,2)$ 型の行列の行列式は $\sin\theta(\cos\varphi-\cos\psi)$ であるから，x，y はクラメルの公式を用いて，

$$x = \frac{1}{\sin\theta(\cos\varphi-\cos\psi)}\begin{vmatrix} -z\sin\theta\sin\varphi & -\cos\theta\sin\varphi\sin\psi+\cos\varphi\cos\psi-1 \\ -z(\cos\theta-1) & \sin\theta\sin\psi \end{vmatrix} \tag{36}$$

$$y = \frac{1}{\sin\theta(\cos\varphi-\cos\psi)}\begin{vmatrix} \cos\theta\sin\varphi\cos\psi+\cos\varphi\sin\psi & -z\sin\theta\sin\varphi \\ -\sin\theta\cos\psi & -z(\cos\theta-1) \end{vmatrix} \tag{37}$$

と書くことができる．z は任意の定数であるので，

$$z = \sin\theta(\cos\varphi-\cos\psi) \tag{38}$$

と選ぶことができる．そうすると，

$$\begin{aligned} x &= -\sin^2\theta\sin\varphi\sin\psi-(\cos\theta-1)(\cos\theta\sin\varphi\sin\psi-\cos\varphi\cos\psi+1) \\ &= -\sin\varphi\sin\psi+\cos\theta\cos\varphi\cos\psi-\cos\theta+\cos\theta\sin\varphi\sin\psi-\cos\varphi\cos\psi+1 \\ &= -\cos(\varphi-\psi)+\cos\theta\cos(\varphi-\psi)-(\cos\theta-1) \\ &= (1-\cos\theta)[1-\cos(\varphi-\psi)] \end{aligned} \tag{39}$$

および

$$\begin{aligned} y &= -(\cos\theta-1)(\cos\theta\sin\varphi\cos\psi+\cos\varphi\cos\psi)-\sin^2\theta\sin\varphi\cos\psi \\ &= -\sin\varphi\cos\psi-\cos\theta\cos\varphi\sin\psi+\cos\theta\sin\varphi\cos\psi+\cos\varphi\sin\psi \\ &= \cos\theta\sin(\varphi-\psi)-\sin(\varphi-\psi) \\ &= (\cos\theta-1)\sin(\varphi-\psi) \end{aligned} \tag{40}$$

が得られる．以上から固有値 1 に対する固有ベクトル $\mathbf{z}'$ は

$$\mathbf{z}' = \begin{pmatrix} (1-\cos\theta)[1-\cos(\varphi-\psi)] \\ (\cos\theta-1)\sin(\varphi-\psi) \\ \sin\theta(\cos\varphi-\cos\psi) \end{pmatrix} \tag{41}$$

となる．以上のようにして,「線型代数入門」p.168 に天下りで示されている式が得られる．このベクトルは (26) の回転に対して不変であるから，回転行列の示すベクトルの回転における回転軸である．また，(33) で示される α がその回転角である．回転角であることは，θ，φ，ψ のうち，1 つを残して他を 0 にすれば α と一致することからもわかる．