第1種および第2種完全楕円積分の数値計算プログラム

2018.8.3　　鈴木　実

1　はじめに

第1種および第2種完全楕円積分の数値計算は,「電子計算機のための数値計算法 III」[1] に述べられているように，ノーム $q = e^{i\pi\tau}$ による展開式が速く収束する．ここに載せた C のプログラムは，同書の ALGOL のプログラムを C に変換したものである。このプログラムによる数値計算は 10 桁以上の精度をもつ。すでに別のエントリーにもこのプログラムは含まれているが，このプログラムを他の目的で利用したい場合のために，ここに別に分けて載せることにした．ついでであるので，計算の元とになる数式の導出法を示した．

2　数値計算の式

文献 [1] には，完全楕円積分の数値計算には，Landen 変換の方法，算術幾何平均の方法，ノーム q を用いる方法があり，最後のノーム q を用いる方法が最も収束が速いことから，同書にはこの方法に拠るプログラムが記されている．

ここでは，プログラムを理解するために必要な数式を導いておこう．

一般に、楕円関数や楕円積分では，母数 k が与えられている場合がほとんどであるため，収束が速い q を用いた計算をするには，まず，k から q を計算する必要がある．ちなみに，k を用いて数値計算する方法は収束が遅く，q を用いる数値計算は q が 0.9 でも十分に早く収束するという [2].

2.1　q の計算

ノーム q は

$$q = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\tau} \tag{1}$$

と定義される．ここで，τ は

$$\tau = \frac{\mathrm{i}K'}{K} \tag{2}$$

である．k と q の関係は楕円テータ関数を用いて,

$$k = \frac{\vartheta_2^2(0,q)}{\vartheta_3^2(0,q)} \tag{3}$$

と与えられる．q はこの式の解として得られる．得られた q により，第1種完全楕円積分 K および K' は、

$$K = \frac{\pi}{2}\vartheta_3^2(0,q) \tag{4}$$

$$K' = \frac{1}{\pi}K\ln(\frac{1}{q}) \tag{5}$$

と表される．

$\vartheta_2^4 + \vartheta_4^4 = \vartheta_3^4$ であるから，式 (3) は,

$$\sqrt{k'} = \frac{\vartheta_4(0,q)}{\vartheta_3(0,q)} \tag{6}$$

と等価である．一方，

$$\vartheta_3(z,q) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} \cos 2nz \tag{7}$$

$$\vartheta_4(z,q) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} \cos 2nz \tag{8}$$

であるから [3]，

$$\vartheta_3(0,q) = \vartheta_3 = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} \tag{9}$$

$$\vartheta_4(0,q) = \vartheta_4 = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} \tag{10}$$

となり，これから，

$$\sqrt{k'} = \frac{1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \cdots}{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \cdots} \tag{11}$$

という関係式が得られる．$|q|$ が十分小さい時，この式は

$$\sqrt{k'} \simeq \frac{1-2q}{1+2q} \tag{12}$$

と近似することができる．そこで，これから q の粗い近似式として，

$$q \simeq \frac{1}{2}\frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}} \tag{13}$$

とすることができる．そこで，いま，この式の右辺を，ϵ とおくと，

$$\epsilon = \frac{1}{2}\frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}} \tag{14}$$

となり，ϵ は q の 1 つの近似値である．この式 (14) に式 (11) を代入すると，

$$\epsilon = \frac{q + q^9 + q^{25} + \cdots}{1 + 2q^4 + 2q^{16} + \cdots} \tag{15}$$

となり，を変形整理すると，

$$q = \epsilon + 2q^4\epsilon - q^9 + 2q^{16}\epsilon - q^{25} + \cdots \tag{16}$$

となる．いま，q を ϵ で展開した場合，その展開式はこの式を用いて求めることができる．つまり，q を ϵ で展開した時の展開係数は，展開式を式 (16) に代入して，両辺の同じ次数の係数を比較すればよい．あるいは，この式をさらに右辺に代入する逐次代入法により近似値が得られる．そのとき，最初から式 (16) を代入してもよいが，ϵ の次数の低いほうから決定されていくので，代入する ϵ の多項式 q_i の最大次数は順次増加していくほうが効率がよい．したがって，文献 [1] にあるように，

$$\begin{aligned}
q_1 &= \epsilon \\
q_2 &= \epsilon + 2q_1^4\epsilon \\
q_3 &= \epsilon + 2q_2^4\epsilon - q_2^9 \\
q_4 &= \epsilon + 2q_3^4\epsilon - q_3^9 + 2q_3^{16}\epsilon \\
q_5 &= \epsilon + 2q_4^4\epsilon - q_4^9 + 2q_4^{16}\epsilon - q_4^{25}
\end{aligned}$$

とすることにより，ϵ^{25} まで求めることができる．この逐次代入法により，

$$q = \epsilon + 2\epsilon^5 + 15\epsilon^9 + 150\epsilon^{13} + 1707\epsilon^{17} + 20910\epsilon^{21} + 268616\epsilon^{25} + O(\epsilon^{29}) \tag{17}$$

という結果が得られる．実際の近似式としては，通常は第 4 項までで十分である．末尾に載せたプログラムでも，ϵ^{13} の項まで計算している．

結局，$k'^2 = 1 - k^2$ より k' を求めて，式 (14) により ϵ を計算し，その値を用いて式 (17) から q を求めるということになる．

式 (17) は k' が 0 に非常に近い時，つまり ϵ が 0.5 に近くなると収束が悪い．そもそも近似が成り立たなくなる．そこで，計算は $0 \le k^2 \le 0.5$ と制限し，$k^2 > 0.5$ の時には，k' に対する K' を求めるほうが収束が速い．つまり，$k'^2 = 1 - k^2$ により k' に一度変換し，K' を求めてから K に変換すればよい．k' に対応するノームを q' とすると，$\tau' = iK/K' = -1/\tau$ であるから，

$$q' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\tau'} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/\tau} = \mathrm{e}^{\pi^2/\ln q} \tag{18}$$

$$K' = \frac{\pi}{2}\vartheta_3^2(0, q') \tag{19}$$

$$K = \frac{1}{\pi}K' \ln(\frac{1}{q'}) \tag{20}$$

として，K' と K が収束性速く計算することができる．

2.2　K と K' の計算

K は，

$$K = \frac{\pi}{2}\vartheta_3^2 = \frac{\pi}{2}(1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \cdots)^2 \tag{21}$$

より計算できる ([3], p.560)．K' は式 (5) から計算できる．

2.3　E と E' の計算

第 2 種完全楕円積分 E は次式を用いて計算する．

$$E = \frac{\pi}{6\vartheta_3^2}\left\{1 + (2 - k^2)\vartheta_3^4 - 24\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n}}{(1 - q^{2n})^2}\right\} \tag{22}$$

文献に挙げた「電子計算機のための数値計算法 III」[1]p.261 の上の式に対応する式の総和の部分は間違っている．この頁の下から 3 つの式は全て間違っている．最後の式の右辺は正しい．したがって，プログラムも正しい．式を引用する場合は注意を要する．

式 (22) は以下のようにして導かれる．文献 [3] の p.558 より，

$$\mathrm{dn}^2\, u = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)} + \frac{E}{K} \tag{23}$$

である．$\Theta(u)$ はヤコビのテータ関数である．これを楕円テータ関数 ϑ_4 に変換しよう．そうすると，

$$\Theta(u) = \vartheta_4(\pi u/2K) \tag{24}$$

$$\Theta'(u) = \vartheta_4'(\pi u/2K)\frac{\pi u}{2K} \tag{25}$$

であるから，これを用いると，

$$\mathrm{dn}^2\, u = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\frac{\vartheta_4'(\pi u/2K)}{\vartheta_4(\pi u/2K)}\frac{\pi u}{2K} + \frac{E}{K} \tag{26}$$

となる．

次に，この式の u を $u+\mathrm{i}K'$ で置き換えると，

$$\mathrm{dn}^2\,(u+\mathrm{i}K') = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\frac{\vartheta_4'(\pi u/2K+\pi\tau/2)}{\vartheta_4(\pi u/2K+\pi\tau/2)}\frac{\pi u}{2K}+\frac{E}{K} \tag{27}$$

となる．ここで次の関係式

$$\vartheta_4(z+\pi\tau/2) = N\vartheta_1(z) \tag{28}$$

$$\mathrm{dn}\,(u+\mathrm{i}K') = -\mathrm{i}\,\mathrm{cs}\,u \tag{29}$$

を用いると，$N = q^{-1/4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}$ であることにに注意して，

$$-\,\mathrm{cs}^2\,u = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\frac{\vartheta_1'(\pi u/2K)}{\vartheta_1(\pi u/2K)}\frac{\pi u}{2K}+\frac{E}{K} \tag{30}$$

となる．この式は両辺とも $u=0$ に特異点を持つので，それを相殺させるため，$u=0$ の主要部を明らかにする必要がある．

ここで，表記を簡単にするため $\pi u/2K = z$ と書くことにすると，

$$\vartheta_1(z) = 2Gq^{1/4}\sin z\prod_{n=1}^{\infty}(1-2q^{2n}\cos 2z+q^{4n}) \tag{31}$$

であるから，

$$\vartheta_1(z) = \sin z\phi(z) \tag{32}$$

とおくと，

$$\phi(z) = 2Gq^{1/4}\prod_{n=1}^{\infty}(1-2q^{2n}\cos 2z+q^{4n}) \tag{33}$$

である．式 (32) を微分することにより

$$\vartheta_1'(z) = \cos z\phi(z)+\sin z\phi'(z) \tag{34}$$

となり，これからすぐに，

$$\phi(0) = \vartheta_1'(0) \tag{35}$$

という関係が得られる．

また，式 (33) を微分することにより，

$$\begin{aligned}\phi'(z) &= \sum_{m=1}^{\infty}8Gq^{1/4}\frac{q^{2m}\sin 2z}{1-2q^{2m}\cos 2z+q^{4m}}\prod_{n=1}^{\infty}(1-2q^{2n}\cos 2z+q^{4n})\\ &= 4\sum_{m=1}^{\infty}\frac{q^{2m}\sin 2z}{1-2q^{2m}\cos 2z+q^{4m}}\phi(z)\end{aligned} \tag{36}$$

$$\begin{aligned}\phi''(z) &= 8\sum_{m=1}^{\infty}\frac{q^{2m}\cos 2z}{1-2q^{2m}\cos 2z+q^{4m}}\phi(z)-16\sum_{m=1}^{\infty}\frac{q^{4m}\sin^2 2z}{(1-2q^{2m}\cos 2z+q^{4m})^2}\phi(z)\\ &\quad+4\sum_{m=1}^{\infty}\frac{q^{2m}\sin 2z}{1-2q^{2m}\cos 2z+q^{4m}}\phi'(z)\end{aligned} \tag{37}$$

となる．したがって，式 (36) より，

$$\phi'(0) = 0, \tag{38}$$

式 (37) より，

$$\phi''(0) = 8\phi(0)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n}}{(1-q^{2n})^2} \tag{39}$$

が成り立つ．次に，式 (32) を 3 回微分すると，

$$\begin{aligned}\vartheta_1''(z) &= \binom{2}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}(\sin z)\phi(z) + \binom{2}{1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(\sin z)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\phi(z) + \binom{2}{0}(\sin z)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\phi(z) \\ &= -\sin z\phi(z) + 2\cos z\phi'(z) + \sin z\phi''(z) \qquad (40) \\ \vartheta_1'''(z) &= \binom{3}{3}\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}z^3}(\sin z)\phi(z) + \binom{3}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}(\sin z)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\phi(z) + \binom{3}{1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(\sin z)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\phi(z) + \binom{3}{0}(\sin z)\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}z^3}\phi(z) \\ &= -\cos z\phi(z) - 3\sin z\phi'(z) + 3\cos z\phi''(z) + \sin z\phi'''(z) \qquad (41)\end{aligned}$$

となるので，

$$\vartheta_1''(0) = 0 \qquad (42)$$

$$\vartheta_1'''(0) = -\phi(0) + 3\phi''(0) \qquad (43)$$

が成り立つ．式 (43) から，

$$\phi''(0) = \frac{1}{3}\{\vartheta_1'''(0) + \vartheta_1'(0)\} \qquad (44)$$

が成り立つ．

次に，

$$\frac{\vartheta_1'(z)}{\vartheta_1(z)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\ln\vartheta_1(z) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\{\ln\sin z + \ln\phi(z)\} = \cot z + \frac{\phi'(z)}{\phi(z)} \qquad (45)$$

であるから，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{\vartheta_1'(z)}{\vartheta_1(z)} = -\operatorname{cosec}^2 z + \frac{\phi''(z)\phi(z) - \phi'^2(z)}{\phi^2(z)} \qquad (46)$$

である．この式の右辺第 1 項は $u = 0$ に特異点があるので，これをマクローリン展開するため，次のように $\sin z$ から順に展開しよう．

$$\begin{aligned}\sin z &= z - \frac{1}{3!}z^3 + O(z^5) \\ \operatorname{cosec} z &= \frac{1}{z}\{1 - \frac{1}{3!}z^2 + O(z^4)\}^{-1} \\ \operatorname{cosec}^2 z &= \frac{1}{z^2}\{1 - \frac{1}{3!}z^2 + O(z^4)\}^{-2} = \frac{1}{z^2}\{1 + \frac{1}{3}z^2 + O(z^4)\}\end{aligned}$$

これから，式 (46) は，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{\vartheta_1'(z)}{\vartheta_1(z)} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{3} + O(z^2) + \frac{\phi''(z)\phi(z) - \phi'^2(z)}{\phi^2(0)} \qquad (47)$$

となる．

次に，式 (30) の左辺を特異点 $u = 0$ でマクローリン展開する．そのため，次の関係式に注意する．

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\operatorname{sn} u &= \operatorname{cn} u\operatorname{dn} u \\ \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\operatorname{sn} u &= -\operatorname{sn} u\operatorname{dn}^2 u - k^2\operatorname{sn} u\operatorname{cn}^2 u \\ \frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}z^3}\operatorname{sn} u &= -\operatorname{cn} u\operatorname{dn} u(\operatorname{dn}^2 u + k^2\operatorname{cn}^2 u) + 4k^2\operatorname{sn}^2 u\operatorname{cn} u\operatorname{dn} u \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\operatorname{cn} u &= -\operatorname{sn} u\operatorname{dn} u \\ \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\operatorname{cn} u &= -\operatorname{cn} u\operatorname{dn}^2 u + k^2\operatorname{sn}^2 u\operatorname{cn} u\end{aligned}$$

そうすると，

$$
\begin{aligned}
\operatorname{sn} u &= u - \frac{1}{6}(1+k^2)u^3 + O(u^5) \\
\operatorname{cn} u &= 1 - \frac{1}{2}u^2 + O(u^4)
\end{aligned}
$$

となり，これから

$$
\begin{aligned}
-\operatorname{cs}^2 u &= -\frac{\operatorname{cn}^2 u}{\operatorname{sn}^2 u} \\
&= -\frac{1}{u^2}\{1 - \frac{1}{2}u^2 + O(u^4)\}^2\{1 - \frac{1}{6}(1+k^2)u^2 + O(u^4)\}^{-2} \\
&= -\frac{1}{u^2}\{1 - u^2 + O(u^4)\}\{1 + \frac{1}{3}(1+k^2)u^2 + O(u^4)\} \\
&= -\frac{1}{u^2}\{1 + \frac{1}{3}(1+k^2)u^2 - u^2 + O(u^4)\} \\
&= -\frac{1}{u^2} + \frac{1}{3}(2-k^2) + O(u^2) \qquad (48)
\end{aligned}
$$

となる．

以上の式 (47)，(48) を式 (30) に代入することにより，

$$
-\frac{1}{u^2} + \frac{1}{3}(2-k^2) + O(u^2) = \{-\frac{1}{z^2} - \frac{1}{3} + O(z^2) + \frac{\phi''(z)\phi(z) - \phi'^2(z)}{\phi^2(z)}\}\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2 + \frac{E}{K} \qquad (49)
$$

となる．$z = \pi u/2K$ を代入すると，

$$
-\frac{1}{u^2} + \frac{1}{3}(2-k^2) + O(u^2) = -\frac{1}{u^2} + \{-\frac{1}{3} + O(z^2) + \frac{\phi''(z)\phi(z) - \phi'^2(z)}{\phi^2(z)}\}\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2 + \frac{E}{K} \qquad (50)
$$

となる．$\vartheta_3^2 = 2K/\pi$ を代入して整理すると，

$$
\frac{1}{3}(2-k^2) + O(u^2) = \{-\frac{1}{3} + O(z^2) + \frac{\phi''(z)\phi(z) - \phi'^2(z)}{\phi^2(z)}\}\frac{1}{\vartheta_3^4} + \frac{E}{K} \qquad (51)
$$

となる．$u = 0$ すなわち $z = 0$ とおいて式 (35) を代入すると，

$$
\frac{1}{3}(2-k^2) = \{-\frac{1}{3} + \frac{\phi''(0)}{\phi(0)}\}\frac{1}{\vartheta_3^4} + \frac{E}{K} \qquad (52)
$$

となり，式 (38)，(44) を代入すると，

$$
\frac{1}{3}(2-k^2) = \{-\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\frac{\vartheta_1'''(0) + \vartheta_1'(0)}{\vartheta_1'(0)}\}\frac{1}{\vartheta_3^4} + \frac{E}{K} \qquad (53)
$$

となる．これを整理すると，

$$
\frac{E}{K} = \frac{1}{3}(2 - k^2 - \frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'\vartheta_3^4}) \qquad (54)
$$

となる．これは，Whittaker-Watson[2] の p.518 Example 2 の式である．

式 (52) に式 (39) を代入して整理すると，

$$
\frac{E}{K} = \frac{1}{3\vartheta_3^4}\{1 + (2-k^2)\vartheta_3^4 - 24\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n}}{(1-q^{2n})^2}\} \qquad (55)
$$

となる．$2K/\pi = \vartheta_3^2$ を代入すると，

$$
E = \frac{\pi}{6\vartheta_3^4}\{1 + (2-k^2)\vartheta_3^4 - 24\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n}}{(1-q^{2n})^2}\} \qquad (56)
$$

となり，最初に示した式が導かれる．

また，$k'^2 = \vartheta_4^4/\vartheta_3^4$ であるから，$(2-k^2)\vartheta_3^4 = (1+k'^2)\vartheta_3^4 = \vartheta_4^4+\vartheta_3^4$ であることを用いると，$2K/\pi = \vartheta_3^2$ を代入すると，

$$E = \frac{\pi}{2\vartheta_3^4}\{\frac{1}{3}(1+\vartheta_3^4+\vartheta_4^4) - 8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n}}{(1-q^{2n})^2}\} \tag{57}$$

と表すこともできる．

ここで，式 (56) の総和は，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n}}{(1-q^{2n})^2} = q^2+3q^4+4q^6+7q^8+6q^{10}+12q^{12}+\cdots \tag{58}$$

である．

E' の計算には，次のルジャンドルの公式 ([4], p.291) を用いる．

$$KE'+K'E-KK' = \frac{\pi}{2} \tag{59}$$

この式を変形すると，

$$\begin{aligned} E' &= \frac{1}{K}(\frac{\pi}{2}+KK'-K'E) \\ &= K'(1-\frac{E}{K})+\frac{1}{K}\frac{\pi}{2} \\ &= K'(1-\frac{E}{K})+\frac{1}{\vartheta_3^2} \end{aligned} \tag{60}$$

となり，これから E' を計算することができる．

参考文献

[1] 山内二郎，宇野利雄，一松信,「電子計算機のための数値計算法 III」（培風館）, 1971 年, p.258.

[2] E. T. Whittaker and G. N. Watson, “A Course of Modern Analysis”, 4th Edition Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press, Internet ArchiveOpen Library,
ダウンロード URL,
`https://ia802704.us.archive.org/11/items/courseofmodernan00whit/courseofmodernan00whit.pdf`

[3] 「自然科学者のための数学概論［増訂版］」1954 年（岩波書店）.

[4] Harris Hancock “Lectures on the theory of elliptic functions”
ダウンロード URL,
`https://openlibrary.org/works/OL5730167W/Lectures_on_the_theory_of_elliptic_functions`

プログラムソース

以下のプログラムでは，配列 `p[7]` を定義し，母数 k を `p[0]` に入れてから，配列配列 `p[]` の番地を関数に渡して関数 `QKKEE(p)` を呼ぶことにより，第 1 種完全楕円積分 $K(k)$，第 2 種完全楕円積分 $E(k)$，およびそれぞれの補母数に対する値 $K(k')$，$E(k')$，ノーム q，それと補ノーム q' の値がそれぞれ，`p[1]`，`p[2]`，`p[3]`，`p[4]`，`p[5]`，`p[6]` に入る．

使い方は，`main()` のようにすれば良い．

```
// provides values for the complete elliptic integrals of the 1st and 2nd kind
// algorhythm from the textbook 電子計算機のための数値計算法 III p.258


#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <string.h>
#include <math.h>

int QKKEE(double *p)
// p[0]=k, p[1]=kk, p[2]=ee, p[3]=kkbis, p[4]=eebis, p[5]=q, p[6]=qbis;
{
    double k, k2, kbis, skbis, eps, eps4, q, lnq, qbis, q2, q3, th32;
    double kk, kkbis, ee, eebis;
    double pi=3.14159265359;
    double piov2, piov6, pi2;
    int LARGE;
    piov2=pi/2.0;
    piov6=pi/6.0;
    pi2=pi*pi;
    k=p[0];
    k2=k*k;
    LARGE=(k2>=0.5);
    if(LARGE) k2=1-k2;
    if(k2==0)
    {
        p[1]=piov2;
        p[2]=piov2;
        p[3]=1e124;
        p[4]=1.0;
        p[5]=0;
        p[6]=1.0;
        return 0;
    }
    kbis=sqrt(1-k2);
    skbis=sqrt(kbis);
    eps=0.5*k2/(2*(1+skbis*(1+kbis)+kbis)-k2);
    eps4=pow(eps, 4);
    q=((15.0*eps4+2.0)*eps4+1.0)*eps;
    lnq=log(q);
    qbis=exp(pi2/lnq);
    q2=q*q;
    q3=q2*q;
    th32=(((q2*q3+1.0)*q3+1.0)*q*2.0+1.0);
    th32*=th32;
    kk=piov2*th32;
    kkbis=-0.5*lnq*th32;
    ee=(piov6/th32)*(1.0+th32*th32*(2.0-k2)
            -((((144.0*q2+168.0)*q2+96.0)*q2+72)*q2+24.0)*q2);
    eebis=kkbis*(1.0-ee/kk)+1.0/th32;
    if(LARGE)
    {
        p[1]=kkbis;
        p[2]=eebis;
        p[3]=kk;
        p[4]=ee;
        p[5]=qbis;
        p[6]=q;
    }
    else
    {
        p[1]=kk;
```

```
        p[2]=ee;
        p[3]=kkbis;
        p[4]=eebis;
        p[5]=q;
        p[6]=qbis;
    }
    return 0;
}

int main()
{
    double k, p[7];
    int i;
    for(i=0;i<10;i++)
    {
        k=i/10.0;
        p[0]=k;
        QKKEE(p);
        printf("k= %lf   ", k);
        printf("K(k)= %lf  ", p[1]);
        printf("E(k)= %lf \n", p[2]);
    }
}
```