Cauchy の行列式定理

2020.8.25　　鈴木　実

1　はじめに

コーシーの定理といえば，コーシーの積分定理が最もよく知られているが，他にもあって，行列式の展開に関する公式も導いており，それもコーシーの定理と呼ばれている [1, 2]．ここではその導出と応用例を述べる．

2　Cauchy の定理

a_{ij} を成分とする n 次正方行列 A の行列式を $D^{(n)}$ とする．そのとき，

$$D^{(n)} = (-1)^{r+s} a_{rs} D^{(n-1)}_{rs} - \sum_{j\neq r, k\neq s} (-1)^{\nu_1+\nu_2} a_{rk} a_{js} D^{(n-2)}_{rj,ks} \tag{1}$$

が成り立つ．ここで，$\nu_1 = r+s+j+k$ で，ν_2 は $s>k$ のとき 0，$s<k$ のとき 1 である．これを Cauchy の定理という．

3　導出

n 元 1 次形式 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ について次の式が成り立つ．

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} \tag{2}$$

一方，行列式 $D^{(n)}$ は第 i 行の要素 $a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}$ を n 個の変数と考えると n 元 1 次形式の関数とみなすことができる．同様に第 j 列の要素 $a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{nj}$ を n 個の変数と考えると n 元 1 次形式の関数とみなすことができる．つまり，行列式 $D^{(n)}$ は $2n$ 通りの n 元 1 次形式の関数とみなすことができる．

行列式 $D^{(n)}$ を次のように交代数 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ を用いて

$$D^{(n)} = \prod_{i=1}^{n} (a_{i1}e_1 + a_{i2}e_2 + \cdots + a_{in}e_n) \tag{3}$$

と表す [3]．この式を a_{rk} で偏微分すると，

$$\frac{\partial D^{(n)}}{\partial a_{rk}} = \prod_{i=1}^{r-1} (a_{i1}e_1 + a_{i2}e_2 + \cdots + a_{in}e_n)\, e_k \prod_{i=r+1}^{n} (a_{i1}e_1 + a_{i2}e_2 + \cdots + a_{in}e_n) \tag{4}$$

となることがわかる．ここで，式の中央にある e_j を互換により式の先頭までもってくると，$e_k e_k = 0$ により各行の e_k はすべて消えることとと，それ以外の交代数との互換により $(-1)^{k-1}$ の符号が付けられるが，再度元の位置まで戻すと，今度は e_k 以外の交代数に関して同じ互換により同じ符号変化があるので，結局，符号の変化はなく，ただ e_k の左側の e_k は消える．次に，e_k を互換により式の最後尾に移動すると，e_k の項は消えて，それ以外の交代数の $n-r$ 回の互換により $(-1)^{n-r}$ の符号がつく．結局，

$$\frac{\partial D^{(n)}}{\partial a_{rk}} = \prod_{i=1, i\neq r}^{n} (a_{i1}e_1 + \cdots + a_{i,k-1}e_{k-1} + a_{i,k+1}e_{k+1} + \cdots + a_{in}e_n)(-1)^{n-r} e_r \tag{5}$$

となることがわかる．この式を見ると，符号 $(-1)^{n-r}$ の前の部分は r 行 k 列を取り除いた小行列式 $D_{rk}^{(n-1)}$ であることがわかる．したがって，

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial D^{(n)}}{\partial a_{rk}} &= \prod_{i=1, i\neq r}^{n} (a_{i1}e_1 + \cdots + a_{i,k-1}e_{k-1} + a_{i,k+1}e_{k+1} + \cdots + a_{in}e_n)e_r(-1)^{n-r} \\
&= D_{rk}^{(n-1)} e_1 e_2 \cdots e_{k-1}e_{k+1}\cdots e_n e_k (-1)^{n-r} \\
&= D_{rk}^{(n-1)} e_1 e_2 \cdots e_{k-1}e_j e_{k+1}\cdots e_n (-1)^{n-r}(-1)^{n-k} \\
&= D_{rk}^{(n-1)} e_1 e_2 \cdots e_n (-1)^{r+j} \\
&= (-1)^{r+k} D_{rk}^{(n-1)} \qquad (6)
\end{aligned}
$$

となる．

上の結果を用いて，行列式 $D^{(n)}$ の第 r 行の要素 a_{rk} $(k = 1, 2, \cdots, n)$ を n 個の変数とみなし，これに式 (2) を適用すると，

$$
\begin{aligned}
D^{(n)} &= a_{r1}\frac{\partial D^{(n)}}{\partial a_{r1}} + a_{r2}\frac{\partial D^{(n)}}{\partial a_{r2}} + \cdots + a_{rn}\frac{\partial D^{(n)}}{\partial a_{rn}} \\
&= (-1)^{r+1}a_{r1}D_{r1}^{(n-1)} + (-1)^{r+2}a_{r2}D_{r2}^{(n-1)} + \cdots + (-1)^{r+n}a_{rn}D_{rn}^{(n-1)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{r+k} a_{rk} D_{rk}^{(n-1)} \qquad (7)
\end{aligned}
$$

となることがわかる．

次に，$D_{rk}^{(n-1)}$ の第 s 列の要素 a_{js} $(j = 1, 2, \cdots, n; j \neq r)$ を $n-1$ 個の変数とみなしてこれに式 (2) を適用するのであるが，その前に準備として小行列式 $D_{rk}^{(n-1)}$ を a_{js} で偏微分してみよう．まず，$D_{rk}^{(n-1)}$ を交代数で表すと，

$$
D_{rk}^{(n-1)} = \prod_{i=1, i\neq r}^{n} (a_{i1}e_1 + \cdots + a_{i,k-1}e_{k-1} + a_{i,k+1}e_{k+1} + \cdots + a_{in}e_n) \qquad (8)
$$

となる．これを a_{js} で偏微分する．ただし，$j \neq r$ かつ $s \neq k$ でなければならない．

[1] $s > k$ のとき，

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial D_{rk}^{(n-1)}}{\partial a_{js}} &= \prod_{i=1, i\neq r}^{j-1} (a_{i1}e_1 + \cdots + a_{i,k-1}e_{k-1} + a_{i,k+1}e_{k+1} + \cdots + a_{in}e_n) \\
&\qquad \times e_s \prod_{i=j+1, i\neq r}^{n} (a_{i1}e_1 + \cdots + a_{i,k-1}e_{k-1} + a_{i,k+1}e_{k+1} + \cdots + a_{in}e_n) \qquad (9)
\end{aligned}
$$

となることがわかる．式 (5) のときと同じように，式中央の e_s を互換により式の先頭に持って行くことにより e_s が消え，また戻すことにより符号は元に戻る．結局，中央の e_s の左側の e_s の項はすべて消える．次に，e_s を式の末尾まで互換により移動すると，e_s は消え，$j+1$ 行から n 行まで互換が $n-j$ 回あるから全体の符号が $(-1)^{n-j}$ に変わる．したがって，

$$
\frac{\partial D_{rk}^{(n-1)}}{\partial a_{js}} = \prod_{i=1, i\neq r,k}^{n} (a_{i1}e_1 + \cdots + a_{i,k-1}e_{k-1} + a_{i,k+1}e_{k+1} \cdots a_{is-1}e_{s-1} + a_{is+1}e_{s+1} + \cdots + a_{in}e_n)e_s(-1)^{n-j} \qquad (10)
$$

となる．この式で，末尾の $e_s(-1)^{n-j}$ を除いた部分は，元の行列式 $D_{rk}^{(n-1)}$ から第 j 行と第 s 列を除いた小行列式になっていることがわかる．あるいは $D^{(n)}$ から第 r, j 行と第 k, s 列を除いた小行列式になっているとも

いえる．したがって，これを $D^{(n-2)}_{rj,ks}$ と表す．そうすると，上の式は，

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial D^{(n-1)}_{rk}}{\partial a_{js}} &= \prod_{i=1, i\neq r,k}^{n} (a_{i1}e_1 + \cdots + a_{i,j-1}e_{j-1} + a_{i,j+1}e_{j+1} \cdots a_{it-1}e_{t-1} + a_{it+1}e_{t+1} + \cdots + a_{in}e_n)e_s(-1)^{n-j} \\
&= D^{(n-2)}_{rj,ks} e_1 \cdots e_{j-1}e_{j+1} \cdots e_{s-1}e_{s+1} \cdots e_n e_s (-1)^{n-j} \\
&= D^{(n-2)}_{rj,ks} e_1 \cdots e_{j-1}e_{j+1} \cdots e_{s-1}e_s e_{s+1} \cdots e_n (-1)^{n-j}(-1)^{n-s} \\
&= D^{(n-2)}_{rj,ks} e_1 \cdots e_{j-1}e_{j+1} \cdots e_n (-1)^{j+s} \\
&= (-1)^{j+s} D^{(n-2)}_{rj,ks} \qquad (11)
\end{aligned}
$$

となる．上の変形で，最後尾の e_s を e_{s+1} の前まで互換で移動するとき，$k < s$ であるから，互換の数は $n-s$ 回である．これから $(-1)^{n-s}$ の因子が付加されている．

以上から，$a_{1s}, a_{2s}, \cdots, a_{r-1,s}, a_{r+1,s}, \cdots, a_{ns}$ を $n-1$ 個の変数とみなして 1 次形式に関する偏微分の式を利用すると，$k = s$ は除いて，

$$
\begin{aligned}
D^{(n-1)}_{rk} &= a_{1s}\frac{\partial D^{(n-1)}_{rk}}{\partial a_{1s}} + a_{2s}\frac{\partial D^{(n-1)}_{rk}}{\partial a_{2s}} + \cdots + a_{r-1,s}\frac{\partial D^{(n-1)}_{rk}}{\partial a_{r-1,s}} + a_{r+1,s}\frac{\partial D^{(n-1)}_{rk}}{\partial a_{r+1,s}} + \cdots + a_{ns}\frac{\partial D^{(n-1)}_{rk}}{\partial a_{ns}} \\
&= a_{1s}(-1)^{1+s}D^{(n-2)}_{r1,ks} + a_{2s}(-1)^{2+s}D^{(n-2)}_{r2,ks} + \cdots + a_{r-1,s}(-1)^{r-1+s}D^{(n-2)}_{r\ r-1,ks} \\
&+ a_{r+1,s}(-1)^{r+1+s}D^{(n-2)}_{r\ r+1,ks} + \cdots + a_{ns}(-1)^{n+s}D^{(n-2)}_{rn,ks} \\
&= \sum_{j=1, j\neq r}^{n} a_{js}(-1)^{j+s}D^{(n-2)}_{rj,ks} \qquad (12)
\end{aligned}
$$

これを式 (7) に代入する．そのとき，式 (12) は $a_{1s}, a_{2s}, \cdots, a_{r-1,s}, a_{r+1,s}, \cdots, a_{ns}$ を変数とみなして偏微分展開をしているが，式 (7) の $a_{r1}D^{(n-1)}_{r1}$ の項にはこれらの変数がないので，この項を除いた残りの項に式 (12) を代入することになる．そうすると，

$$
\begin{aligned}
D^{(n)} &= (-1)^{r+1}a_{r1}D^{(n-1)}_{r1} + \cdots + (-1)^{r+s-1}a_{r\ s-1}D^{(n-1)}_{r\ s-1} \\
&+ (-1)^{r+s}a_{rs}D^{(n-1)}_{rs} + (-1)^{r+s+1}a_{r\ s+1}D^{(n-1)}_{r\ s+1} + \cdots + (-1)^{r+n}a_{rn}D^{(n-1)}_{rn} \\
&= (-1)^{r+1}a_{r1}\sum_{j=1, j\neq r}^{n} a_{js}(-1)^{j+s}D^{(n-2)}_{rj,1s} + \cdots + (-1)^{r+s-1}a_{r\ s-1}\sum_{j=1, j\neq r}^{n} a_{js}(-1)^{j+s}D^{(n-2)}_{rj,1-s\ s} \\
&+ (-1)^{r+s}a_{rs}D^{(n-1)}_{rs} + (-1)^{r+s+1}a_{r\ s+1}\sum_{j=1, j\neq r}^{n} a_{js}(-1)^{j+s}D^{(n-2)}_{rj,s+1\ s} + \cdots + (-1)^{r+n}a_{rn}\sum_{j=1, j\neq r}^{n} a_{js}(-1)^{j+s}D^{(n-2)}_{rj,ns} \\
&= \sum_{k=1, k\neq s}^{n}(-1)^{r+k}a_{rk}\sum_{j=1, j\neq r}^{n} a_{js}(-1)^{j+s}D^{(n-2)}_{rj,ks} + (-1)^{r+s}a_{rs}D^{(n-1)}_{rs} \\
&= (-1)^{r+s}a_{rs}D^{(n-1)}_{rs} + \sum_{k=1, k\neq s}^{n}\sum_{j=1, j\neq r}^{n}(-1)^{r+k}(-1)^{j+s}a_{rk}a_{js}D^{(n-2)}_{rj,ks} \qquad (13)
\end{aligned}
$$

となることがわかる．以上は式 (9) で $s > k$ のときであった．

[2] $s < k$ のとき

次に，$s < k$ の場合について，異なるのは，式 (11) で e_s を e_{s+1} の前に互換で移動するときである．今の場合は $s < k$ であるので，e_{s+1} と e_n の間には e_k が抜けているから互換の数が 1 回少ないことになる．その結果，式 (11) は

$$
\frac{\partial D^{(n-1)}_{rk}}{\partial a_{js}} = (-1)^{j+s-1}D^{(n-2)}_{rj,ks} \qquad (14)
$$

となり符号が変わる．式 (14) を式 (7) に適用するときは，-1 の指数部分の s が $s-1$ になるだけであるから，式 (13) で代入された部分の指数の s を $s-1$ に置き換えるだけである．すなわち，以下のようになる．

$$D^{(n)} = (-1)^{r+s} a_{rs} D_{rs}^{(n-1)} + \sum_{k=1,k\neq s}^{n} \sum_{j=1,j\neq r}^{n} (-1)^{r+k} (-1)^{j+s-1} a_{rk} a_{js} D_{rj,ks}^{(n-2)} \tag{15}$$

である．以上で式 (1) の Cauchy の定理は導かれた．

4　例

4.1　例 1

$$D = \begin{vmatrix} b_{pq} & a_{p1} & a_{p2} & \cdots \\ b_{1q} & a_{11} & a_{12} & \cdots \\ b_{2q} & a_{21} & a_{22} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}, \quad A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} \tag{16}$$

とする．D の第 1 行 b_{pj} と第 1 列 b_{iq} は A の境界を作っている．このような境界がある行列式の計算に Cauchy の定理は有用である．式 (1) から

$$D = b_{pq} - \sum_{k,i} b_{pk} b_{iq} A_{ik} \tag{17}$$

となる．A_{ik} は a_{ik} の補小行列式である．

4.2　例 2

$$D = \begin{vmatrix} x_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x_3 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x_n \end{vmatrix} \tag{18}$$

この行列式に次のように第 1 列と第 1 行を追加しても値は変わらない．

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & x_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ 1 & a_1 & x_2 & a_3 & \cdots \\ 1 & a_1 & a_2 & x_3 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} \tag{19}$$

第 1 行に a_i を掛けて第 i 列から引くことをすべての列について行うと，

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots \\ 1 & x_1 - a_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & x_2 - a_2 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & x_3 - a_3 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} \tag{20}$$

となる．この行列式の第１行第１列の補小行列式は

$$D_{11} = \begin{vmatrix} x_1 - a_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & x_2 - a_2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & x_3 - a_3 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} \tag{21}$$

である．かつ，行列式 D_{11} の $n-1$ 次小行列式は対角成分の補小行列式以外はすべて０である．したがって，Cauchy の定理により，

$$D = \prod_{i=1}^{n}(x_i - a_i) + \sum_{i=1}^{n}\prod_{j \neq i}^{n}(x_j - a_j) \tag{22}$$

となる．

参考文献

[1] Robert Forsyth Scott, "A Treatise on the Theory of Determinants and Their Applications in Analysis and Geometry", Cambridge at the University Press, 1880.
http://www.totoha.net/archiv/scott1880.pdf

[2] https://mathworld.wolfram.com/CauchysDeterminantTheorem.html

[3] 「行列式展開の一般式」(2020/8/12 のエントリー)
http://totoha.web.fc2.com/determinant_expand.pdf